ISSN 2219-5203

НАУКОВИЙ ВІСНИК МЕЛІТОПОЛЬСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО ПЕДАГОГІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

2 23 / 2019

СЕРІЯ : ПЕДАГОГІКА

АСПІРАНТСЬКІ СТУДІЇ

УДК 517.912:[57+21]

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Наталія Титаренко, Юлія Балаєва

Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького

Анотація:
У статті презентовано розв'язання прикладних задач з медицини та біології за допомогою диференціальних рівнянь. З огляду на те, що в науковій літературі немає детального опису етапів створення моделей і шаблонів, які допомогли б скласти диференціальні рівняння для різних прикладних задач, автори статті визначили основні етапи створення моделей, розглянули алгоритм складання диференціального рівняння за умовою задачі й самі диференціальні рівняння для розв'язання задач з різних галузей знань, прийоми моделювання задач за допомогою диференціальних рівнянь, а також запропонували унаочнення процесу розв'язання фізичних і біологічних задач із застосуванням диференціальних рівнянь засобами комп'ютерних презентацій. Розглянуто математичну постановку задачі моделювання як сукупність математичних співвідношень, які відображають поведінку та характеристики об'єкта моделювання. Математичний опис моделі складено на основі законів фізики, хімії тощо, які характеризують динаміку і статику процесів у досліджуваному об'єкті, і виражено мовою відповідних розділів математики.

Ключові слова:
диференціальні рівняння; прикладні задачі, розв'язувані за допомогою диференціальних рівнянь; математичне моделювання; кількість речовини; зміна кількості бактерій; руйнування клітин; швидкість охолодження тіла.

Аннотация:
Титаренко Наталья, Балаева Юлия. Применение дифференциальных уравнений к решению прикладных задач.
В статье представлено решение прикладных задач по медицине и биологии с помощью дифференциальных уравнений. Исходя из того, что в научной литературе отсутствует детальное описание этапов создания моделей и шаблонов, которые помогли бы составить дифференциальные уравнения для различных прикладных задач, авторы статьи определили основные этапы создания моделей, рассмотрели алгоритм составления дифференциального уравнения по условию задачи, использование дифференциальных уравнений для решения задач из различных областей знаний, приемы моделирования задач с помощью дифференциальных уравнений, а также представили наглядность процесса решения физических и биологических задач с применением дифференциальных уравнений средствами компьютерных презентаций. Рассмотрена математическая постановка задачи моделирования как совокупность математических соотношений, описывающих поведение и характеристики объекта моделирования. Математическое описание модели составлено на основе законов физики, химии и т. д., характеризующих динамику и статику процессов в исследуемом объекте, и выражено на языке соответствующих разделов математики.

Ключевые слова:
дифференциальные уравнения; прикладные задачи, решаемые с помощью дифференциальных уравнений; математическое моделирование; количество вещества; изменение количества бактерий; разрушение клеток; скорость охлаждения тела.

Resume:
Tytarenko Nataliia, Balaeva Yuliia. Application of differential equations to solving applied tasks.
The article deals with the solution of applied problems in medicine and biology through differential equations. In the scientific literature there is no detailed description of the stages of creating models and templates that would help to make differential equations for various applications. Therefore, the article defines the main stages of creating models, considers the algorithm of compiling the differential equation on the condition of the problem, considers the use of differential equations for solving problems from different branches of knowledge, methods of modeling problems with the help of differential equations; Aiming at the process of solving physical and biological problems with the use of differential equations by means of computer presentations. The mathematical formulation of the modeling problem as a set of mathematical relations describing the behavior and characteristics of the modeling object is considered. The mathematical description of the model is based on the laws of physics, chemistry, etc., which characterize the dynamics and statics of processes in the investigated object, and is expressed in the language of any sections of mathematics.

Key words:
differential equations, applied problems solved by means of differential equations, mathematical modeling, amount of matter, change of bacteria count, cell destruction, speed of cooling of a body.

Постановка проблеми. Основним завданням сучасної системи освіти є формування гармонійно розвиненої особистості, конкурентоспроможного фахівця на ринку праці. На набуття цих якостей націлений компетентнісний підхід до формування змісту й організації навчального процесу.

З практичного погляду, компетентнісний підхід є засобом посилення прикладного, практичного характеру освіти. Знання основних математичних законів і правил, кількісних методів дослідження, алгебраїчних обчислювальних прийомів – одна з найважливіших вимог до професійної діяльності сучасного фахівця.

У процесі підготовки вчителів математики та інформатики для загальноосвітніх шкіл необхідно приділяти особливу увагу використанню математичних методів під час розв'язання сучасних прикладних задач. Також важливо показати наявний тісний зв'язок між дисциплінами, що вивчаються.

Найбільшого поширення в процесі побудови математичних моделей набули алгебраїчні рівняння та системи, звичайні диференціальні рівняння та їхні системи, диференціальні рівняння в частинних похідних, матрична алгебра, методи теорії ймовірності, математичної статистики й випадкових процесів.

Найбільші труднощі під час формулювання математичної постановки задачі виникають у моделях на перетині різних дисциплін. Тому ефективність математичного моделювання значною мірою залежить від здатності математика поставити себе на місце фахівця іншого профілю, вивчити його погляди й знайти певний компроміс, що враховує все необхідне. Уміння звести вихідну проблему до відомого класу математичних задач і обґрунтувати це потребує високої кваліфікації математика-прикладника.

У наш час актуальним є використання диференціальних рівнянь у таких науках, як біологія, економіка, фізика, хімія, геометрія тощо, коли є необхідність кількісного опису явищ. Застосування диференціальних рівнянь часто полегшує можливість виявлення тих чи інших властивостей їхніх розв'язків, що надалі можуть служити теоретично обґрунтованим фундаментом для теоретичних досліджень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Диференціальні рівняння та їх можливості останнім часом інтенсивно досліджуються. Серед праць, присвячених вивченню задач, розв'язання яких зводиться до розв'язання диференціальних рівнянь, слід згадати насамперед роботи А. М. Самойленка, М. О. Перестюка, А. Ю. Лучки, О. А. Бойчука, М. І. Ронто.

Формулювання цілей статті. Диференціальні рівняння – це основа математичного моделювання різних процесів, що відбуваються в живій і неживій природі. Адже людина прагне відповісти якщо й не на всі, то на багато запитань, які в неї виникають у процесі пізнання світу. За допомогою диференціальних рівнянь можна уникнути занадто вартісного експерименту чи того експерименту, який має не дуже етичну форму [4, с. 32]. Тому метою статті є дослідження методів розв'язання задач з медицини і біології за допомогою диференціальних рівнянь: обробка інформації; порівняння, аналіз, узагальнення, моделювання; спостереження, математичний експеримент.

Виклад основного матеріалу дослідження. Живий організм являє собою занадто складну систему, аби його можна було розглядати одразу в усіх подробицях, тому дослідник завжди обирає спрощений погляд, що відповідає розв'язанню конкретної задачі. На це свідоме спрощення реальних біосистем і спирається метод моделювання, для якого використовують диференціальні рівняння.

Математичне моделювання як метод дослідження має ряд переваг [5, с. 67]. По-перше, метод викладу кількісних закономірностей математичною мовою, тобто мовою графіків і формул, – точний і ощадливий. По-друге, перевірка гіпотез, сформульованих на основі зібраних даних, може бути здійснена шляхом тестування математичної моделі, створеної на основі цієї гіпотези. Результати такого дослідження або дають додаткові підтвердження гіпотез, або зумовлюють необхідність їх уточнення чи навіть перегляду. По-третє, математична модель дає змогу судити про поведінку таких систем в умовах, які важко створити під час експерименту чи в клініці, а також сприяє вивченню роботи досліджуваної системи загалом чи роботи будь-якої її окремої частини.

У розв'язанні будь-якої задачі за допомогою математичного апарату можна виділити три етапи:

1. Виразити умови задачі мовою математики.
2. Розв'язати задачу.
3. Оцінити результати.

Перша частина роботи зазвичай полягає в складанні диференціального рівняння і є найбільш складною, оскільки загальних методів складання диференціальних рівнянь немає, а навички в цій сфері виробляються шляхом набуття власного досвіду.

Розв'язання прикладних задач за допомогою диференціальних рівнянь вимагає такої послідовності дій [3, с. 24]:

1. Встановити змінні величини в цих явищах і виявити закони, що пов'язують їх.
2. Обрати незалежну змінну й функцію цієї змінної, яку необхідно знайти.
3. Виходячи з умов задачі, визначити початкові або крайові умови.
4. Виразити всі величини, що фігурують в умові задачі, через незалежну змінну, шукану функцію та її похідні.
5. Виходячи з умов задачі й відповідного закону, якому підпорядковується це явище, скласти диференціальне рівняння.
6. Знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл диференціального рівняння.
7. За початковою або крайовою умовами знайти частинний розв'язок.
8. Дослідити отриманий розв'язок.

Розглянемо прийоми розв'язання деяких типів задач.

1. Встановити залежність зміни кількості лікарських форм речовини в таблетці з плином часу. (Швидкість розчинення лікарських форм речовини з таблеток пропорційна кількості лікарських форм речовини в таблетці) [1, с. 79].

Позначимо через m кількість речовини в таблетці, що залишилася до часу розчинення (t). Тоді

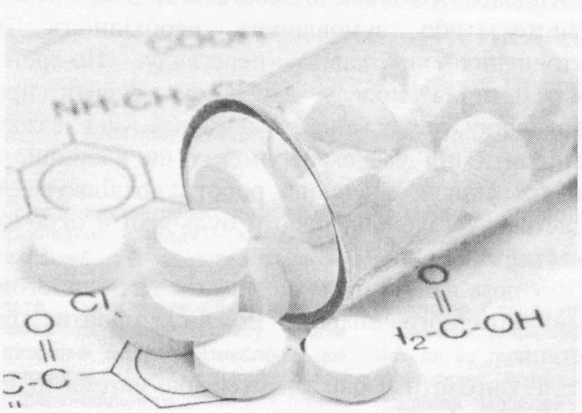
$dm / dt = -km$,

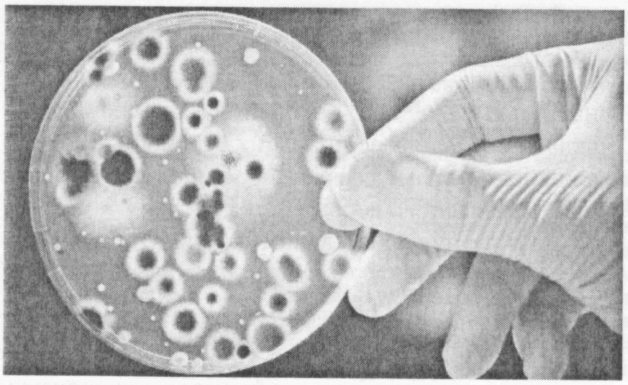
де k – стала швидкості розчинення. Знак «-» у рівнянні означає, що кількість лікарських форм речовини з плином часу зменшується.

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

$\frac{dm}{m} = -kdt$ інтегруємо й отримуємо:

$\ln|m| = -kt + \ln C$, звідси $m = Ce^{-kt}$





2) Встановити залежність зміни кількості бактерій від часу. (Швидкість розмноження деяких бактерій пропорційна кількості бактерій у цей момент) [1, с. 80].

Позначимо кількість бактерій, наявних у цей момент, через x. Тоді

$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{k}x$, де k – коефіцієнт пропорційності.

Тоді $\frac{dx}{x} = kdt$, інтегруємо й отримуємо:

$\ln|x| = kt + \ln C$, звідси

$x = Ce^{kt}$.

3) Закон руйнування клітин у звуковому полі.

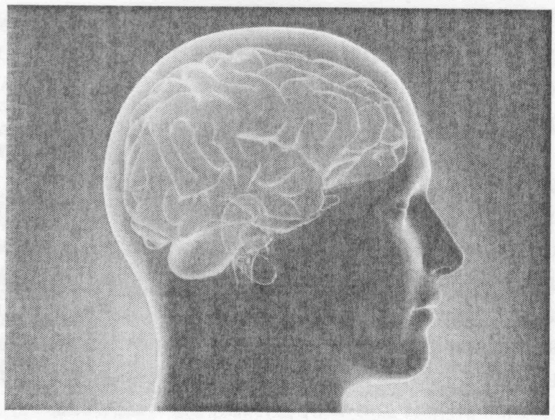
Кавітація ультразвукових хвиль виявляється у формі розривів суспензійного середовища й утворення дрібних бульбашок і пустот, щільність яких незначна, порівняно зі щільністю води [5, с. 103]. Найпростіші (бактерії, водорості, дріжджі, лейкоцити, еритроцити) можуть бути зруйновані за кавітації, що виникає в інтенсивному звуковому полі. Відносні швидкості руйнування біологічних клітин різних видів залишаються постійними в дуже широкому діапазоні частот. Ці швидкості можуть характеризувати відносну крихкість клітин різних видів. Щоб передати це кількісно, потрібно визначити швидкість руйнування клітини у постійному звуковому полі. Вивчення цього питання показує: доки хоча б 1% популяції залишається незруйнованим, можна записати:

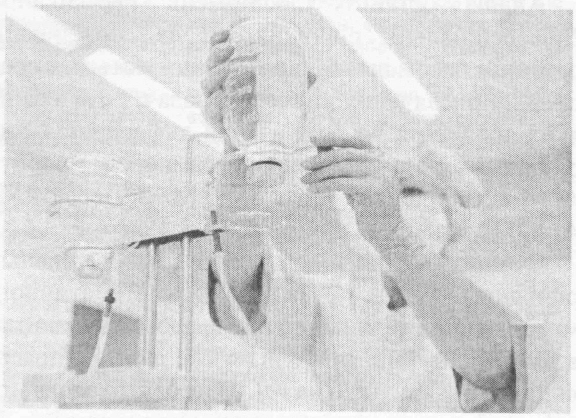
$\frac{dN}{dt} = -RN$,

де N – концентрація клітин; t – час; R – стала.

$\frac{dN}{N} = -Rdt$, інтегруємо й отримуємо:

$N = Ce^{-Rt}$.





4) У теорії епідемій за умови, що досліджуване захворювання носить тривалий характер, процес передачі інфекції значно швидший, ніж протягом самої хвороби, і заражені особи не видаляються з колонії і передають під час контактів інфекцію незараженим особам.

Нехай у початковий момент $t = 0$ є: a – кількість заражених, b – кількість незаражених осіб,

$x(t)$, $y(t)$ – відповідно кількість заражених і незаражених осіб до моменту часу t. У будь-який момент часу t для проміжку, меншого від часу життя одного покоління, має місце рівність:

$x + y = a + b$ (1)

За таких умов потрібно встановити закон зміни кількості незаражених осіб з плином часу, тобто знайти $y = f(x)$.

Оскільки інфекція передається під час зустрічей заражених осіб із незараженими, то кількість незаражених осіб буде зменшуватись з плином часу пропорційно до кількості зустрічей між зараженими й незараженими особами. Для проміжку часу dt, $dy = -\beta xy$, звідси $dy / dt = -\beta xy$, де β – коефіцієнт пропорційності.

Підставивши в це рівняння значення x з рівності (1), отримаємо диференціальне рівняння:

$\frac{dy}{dt} = -\beta y\,(a + b - y)$ розділимо на $y \cdot (a + b - y)$ і отримаємо:

$\int \frac{dy}{y\,(a+b-y)} = -\int \beta dt,$ розкладаючи знаменник лівої частини на множники, зводимо обчислення лівого інтегралу до обчислення двох інтегралів:

$\int \frac{dy}{(a+b)y} + \int \frac{dy}{(a+b)(a+b-y)} = -\int \beta dt,$

інтегруємо й отримуємо:

$\frac{\ln|y|}{a+b} - \frac{\ln|a+b-y|}{a+b} = -\beta t + C,$ що є загальним інтегралом рівняння.

Приклад 1. Концентрація лікарської речовини в крові зменшується внаслідок виведення речовини з організму. Швидкість зменшення концентрації дорівнює 0,02 концентрації речовини в цей момент. Визначити залежність концентрації цієї речовини в крові від часу, якщо в початковий момент часу вона дорівнювала 0,4 мг/л.

Розв'язання. Нехай $K-$ концентрація речовини в цей момент часу. Швидкість зміни концентрації в момент t пов'язана співвідношенням: $-\frac{dK}{dt} = 0{,}02K$. Знак «-» означає зниження концентрації з плином часу: $-\frac{dK}{dt} = 0{,}02K$ домножимо на (-1)

$\frac{dK}{dt} = -0{,}02K$ – домножимо на dt

$dK = -0{,}02K\,dt$ – розділимо на K

$\frac{dK}{K} = -0{,}02\,dt$ – інтегруємо

$\int \frac{dK}{K} = -\int 0{,}02\,dt$-

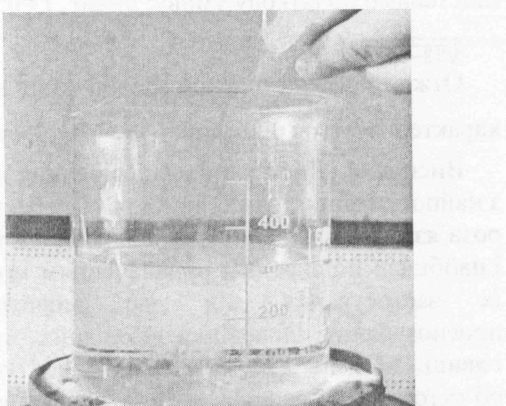
$\ln K = -0{,}02t + \ln C$, де $C \in R$. Потенціюємо й отримуємо:

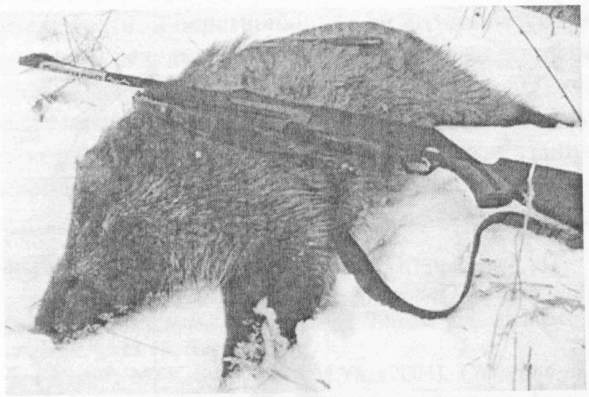
$K = Ce^{-0{,}02t}$ – загальний розв'язок рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок, якщо *t =0,* $K_0 = 0{,}4$ мг/л.

$0{,}4 = Ce^{0}$мг/л; C =0,4

$K = 0{,}4e^{-0{,}02t}$ – частинний розв'язок рівняння.





Приклад 2. Браконьєр убив кабана. Обхідник, який виявив труп кабана, виміряв його температуру – вона виявилася 31°. За годину обхідник знову виміряв температуру – вона виявилася 29°. Припускаючи, що температура повітря не змінювалась і дорівнювала 21°, знайти, за скільки часу до моменту першого вимірювання температури було скоєно злочин, якщо температуру живого кабана прийняти за 37°.

Розв'язання. Припустимо, що швидкість охолодження тіла в довкіллі пропорційна різниці між температурою тіла й температурою довкілля. Позначаючи через x(t) температуру кабана в момент часу t, отримуємо рівняння: $\frac{dx}{dt} = -k(x-a)$ (*), де $a-$ температура повітря. Початкові умови такі: $x(0)$ =31; $x(1)$ =29.

Загальний розв'язок рівняння (*) має вигляд: *ln(x-a)=-kt+C*. Підставляючи значення t=0 і t=1, отримаємо систему рівнянь для визначення C і k:

$$\begin{cases} \ln(31-21) = C \\ \ln(29-21) = -k + C \end{cases} \quad \begin{cases} C = \ln 10 \\ k = \ln 10 - \ln 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = \ln 10 \\ k = \ln\frac{5}{4} \approx 0{,}22 \end{cases}$$

Звідси: $t = -\frac{1}{k}\ln\frac{x-21}{31-21}$. Підставляючи в рівняння x = 37, знаходимо час $t \approx -$ 2,10630. Отже, злочин скоєно за 2 години 6 хвилин до моменту першого обходу.

Приклад 3. Розробити математичну модель, що дає змогу описати політ баскетбольного м'яча, кинутого гравцем у баскетбольну корзину [2, с. 54].

Модель повинна давати змогу:

• обчислювати положення м'яча в будь-який момент часу;

• визначати точність влучання м'яча в кошик після кидка за різних початкових параметрів.

Вихідні дані:

• маса і радіус м'яча;

• початкові координати, початкова швидкість і кут кидка м'яча;

• координати центру й радіус кошика.

Рух баскетбольного м'яча може бути описаний відповідно до законів класичної механіки Ньютона (рис. 1).

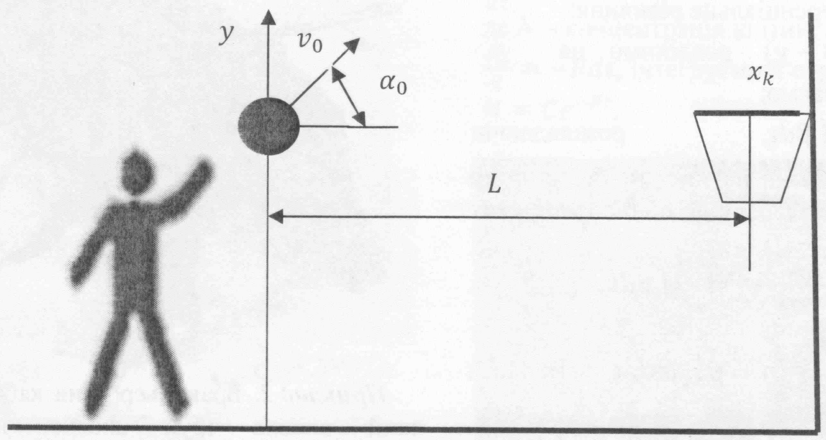


Рис. 1. Схема до постановки задачі про баскетболіста

Приймемо такі гіпотези:

• об'єктом моделювання є баскетбольний м'яч радіуса R;

• м'яч будемо вважати матеріальною точкою масою m, положення якого збігається з центром мас м'яча;

• рух відбувається в полі сил тяжіння зі сталим прискоренням вільного падіння й описується рівняннями класичної механіки Ньютона;

• рух м'яча відбувається в одній площині, перпендикулярній до поверхні Землі й проходить через точку кидка й центр кошика;

• нехтуємо опором повітря й збуреннями, спричиненими власним обертанням м'яча навколо центру мас.

Математичну постановку задачі про баскетболіста можна представити в координатній формі. Знайти залежність $x(t), y(t), v_x(t), v_y(t)$ з розв'язку системи диференціальних рівнянь:

$$m\frac{dv_x}{dt} = 0, v_x = \frac{dx}{dt},$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg, v_y = \frac{dy}{dt}$$

за таких умов: $x(0) = x_0, y(0) = y_0$,

$v_x(0) = v_0 cos\alpha_0$,

$v_y(0) = v_0 sin\alpha_0$

Можна знайти параметр Δ за формулою:

$\Delta = x(t_k) - x_k$,

де t_k визначається з умов:

$t_k > 0, \quad v_y(t_k) < 0, \quad y(t_k) = y_k$

Отже, з математичного погляду задача про баскетболіста звелася до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку із заданими початковими умовами.

Приклад 4. Нехай залежність попиту *x* і пропозиції *y* від ціни *p* мають вигляд: [2, с. 61]

$$x(p) = -11 + p + 4\frac{dp}{dt},$$

$$y(p) = 22 - 2p + 3\frac{dp}{dt}$$

Знайти залежність рівноважної ціни від часу, якщо в початковий момент часу ціна *p* дорівнювала 20.

Рівноважна ціна – ціна на конкурентному ринку, за якої кількість товарів і послуг, які бажають придбати споживачі, абсолютно відповідає кількості товарів і послуг, які виробники бажають запропонувати. Тобто за умови рівноважної ціни *x =y:*

$-11 + p + 4\frac{dp}{dt} = 22 - 2p + 3\frac{dp}{dt}$, зводимо спільні доданки й отримуємо:

$\frac{dp}{dt} + 3p - 33 = 0, \qquad \frac{dp}{dt} = 33 - 3p,$

домножимо на *dt* й розділимо на (33-3*p*).

$\frac{dp}{33-3p} = dt$. Інтегруємо: $\int \frac{dp}{33-3p} = \int dt$ і отримуємо $-\frac{1}{3}\ln|33 - 3p| = t + \ln C$, де C – стала. Потенціюємо й отримуємо:

$(33 - 3p)^{-\frac{1}{3}} = Ce^t$ – ця рівність є загальним інтегралом рівняння.

Для того, щоб знайти частинний розв'язок задачі, треба знайти сталу С. Для цього підставимо початкову умову: *p* =20 , *t* =0:

$\frac{1}{\sqrt[3]{33-3*20}} = Ce^0$, звідси $\mathrm{C} = -\frac{1}{3}$.

Отже, залежність рівноважної ціни від часу характеризується рівністю: $(33 - 3p)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}e^t$.

Висновки. Диференціальні рівняння є одним з найпотужніших засобів для математичного розв'язання практичних задач. Найважливішим і найбільш поширеним призначенням моделей є їх застосування під час вивчення та прогнозування поведінки складних процесів і явищ. Модель дає змогу навчитися керувати об'єктом шляхом апробування різних варіантів управління. Якщо властивості об'єкта з плином часу змінюються, то особливого значення набуває завдання прогнозування станів такого об'єкта під дією різних чинників.

Здатність структурувати проблему, виокремлювати математичні відношення, створювати математичну модель ситуації, аналізувати й перетворювати її, інтерпретувати отримані результати – усе це входить до поняття математичної компетентності. Отже, математична компетентність сприяє адекватному використанню математики для розв'язання проблем, що виникають у повсякденному житті.

Список використаних джерел

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения и их приложения: учеб. пособие / Лесняк Л. И., Старенченко В. А., Цепилевич Л. И., Шалыгина Т. А. Томск: Изд-во Томск. гос. архит.-строит. ун-та, 2012. 216 с.
2. Перестюк М. О., Свіщук М. Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь: навчальний посібник. Київ: ТВіМС, 2004. 221 с.
3. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння: підручник. 3-є вид., перероб. і доп. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. 527 с.
4. Станжицький О. М., Таран Є. Ю., Гординський Л. Д. Основи математичного моделювання: навчальний посібник. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2001. 61 с.
5. Тарасик В. П. Математическое моделирование технических систем: учебник для вузов. Минск: ДизайнПРО, 2004. 640 с.

References

1. Lesnyak, L.I., Stanchenko, V.A., Tsipilevich, L.I., Shalygin, T.A. (2012). *Ordinary differential equations and their applications.* Tomsk: Iz-vo. Tomsk. gos. architect-stroit. un-ta. [in Russian]
2. Perestyk, M.O., Svyshchuk, M.Ya. (2004). *Collection of problems on differential equations: study guide.* Kyiv: TVIMS. [in Ukrainian]
3. Samoilenko, A.M., Perestyuk, M.O., Parasuk, I.O. (2010). *Differential equations: textbook.* Kyiv: "Kiev University. [in Ukrainian]
4. Standzhytskyi, O.M., Taran, Ye.Yu., Gordinsky, L.D. (2001). *Fundamentals of Mathematical Modeling: textbook.* Kyiv.[in Ukrainian]
5. Tarasik, V.P. (2004). *Mathematical modeling of technical systems: textbook for high schools.* Minsk: DesignPRO. [in Russian]

Відомості про авторів:
Титаренко Наталія Євгенівна
tolegale@gmail.com
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького
вул. Гетьманська, 20, м. Мелітополь, Запорізька обл., 72312, Україна

Балаєва Юлія Ровшанівна
yulibalaeva4@gmail.com
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького
вул. Гетьманська, 20, м. Мелітополь, Запорізька обл., 72312, Україна

doi: 10.33842/22195203/2019/23/134/139

Матеріал надійшов до редакції 25. 03. 2019 р.
Прийнято до друку 19. 04. 2019 р.

Information about the authors:
Tytarenko Nataliia Yevhenivna
tolegale@gmail.com
Bohdan Khmelnytsky Melitopol State Pedagogical University
20 Hetmans'ka St., Melitopol, Zaporizhia region, 72312, Ukraine

Balaeva Yuliia Rovshanovna
yulibalaeva4@gmail.com
Bohdan Khmelnytsky Melitopol State Pedagogical University
20 Hetmans'ka St., Melitopol, Zaporizhia region, 72312, Ukraine

doi: 10.33842/22195203/2019/23/134/139

Received at the editorial office 25. 03. 2019.
Accepted for publishing 19. 04. 2019.