УДК 517.956.32:517.983.246

ОПЕРАТОР РЕАКЦИИ СИСТЕМЫ ЛАМЭ

Фоменко В. Г.

Мелитопольский институт государственного и муниципального управления «Классического приватного университета», ул. Дзержинского, 390, Мелитополь, Украина, 72316

E-mail: fomenkovova@mail.ru

Введение

Одной из важных проблем математической физики является обратная задача теории распространения волн в упругом теле. Она состоит в следующем. Пусть имеется неоднородное изотропное твёрдое тело, плотность которого, также как и скорости распространения быстрой и медленной волн, являются функциями точки и неизвестны. Предположим, что мы возбуждаем колебания поверхности тела. Тогда от поверхности вглубь тела будут распространяться волны, которые, взаимодействуя с границей, создают усилия, регистрирующиеся наблюдателем. Ясно, что волны приносят некоторую информацию о строении тела. Цель решения обратной задачи − извлечь из этой информации сведения о внутреннем строении тела.

Для того чтобы формализовать эти соображения, вводится так называемый оператор реакции, который определяет отклик системы на внешнее воздействие. Предполагается, что, зная этот оператор, можно однозначно восстановить внутренние параметры системы − скорости быстрой и медленной волн. Знание оператора реакции является ключевым для решения обратной задачи для многомерного волнового уравнения $\rho u_{tt} - \Delta u = 0$ методом граничного управления (the boundary control method) − BC-методом (Белишев,1986; см. [1], часть II). В этом случае он просто совпадает с производной вдоль нормали от волнового поля u на границе. В случае же уравнения Ламэ он имеет более сложный вид и определяется (в декартовых координатах), например, в [2]. Имея ввиду дальнейшее применение оператора реакции к решению обратной задачи для систмы Ламэ BC-методом, для наших целей будет необходимо записать его в специальной двухкомпонентной форме с инвариантными компонентами. В случае уравнения Ламэ с $\rho = 1, \mu = const$ BC-метод изложен в [3]. Там же получено выражение для оператора реакции этой системы в такой форме.

Целью данной работы является нахожение инвариантной формы оператора реакции системы Ламэ в общем виде и установление связи между различными представлениями этого оператора.

1. Система Ламэ.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ − ограниченная область с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$.

Уравнение Ламэ, которое описывает волновое движение в упругом теле, записанное покомпонентно в декартовых координатах, имеет вид ([4], стр. 8):

$$\rho(u_i)_{tt} = (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i} div\mathrm{u} + \mu\Delta u_i + \frac{\partial\lambda}{\partial x_i} div u + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\mu}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \quad (\mathrm{i} = 1, 2, 3);$$

с гладкими переменными коэффициентами $\rho(x) > 0,\ \mu(x) > 0, 3\lambda(x) + 2\mu(x) > 0$ в $\overline{\Omega}$. (Под гладкостью здесь и в дальнейшем будем подразумевать бесконечную гладкость, т.е. что функции принадлежат классу C^∞).

Вектор u $=(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ является функцией (x,t), где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, t -$ время.

Правую часть этого уравнения, обе части которого предварительно умножим на $\frac{1}{\rho}$, можно записать в виде действия некоторого оператора (оператора Ламэ):

$$\mathrm{L}u = \frac{1}{\rho}[\mu(\Delta u + div u) + \nabla(\lambda div u) + \sum_{k=1}^{3} \nabla\mu(\nabla \mathrm{u_k} + \partial_\mathrm{k}\mathrm{u})\mathrm{e_k}], \ (\mathrm{e_k} \text{ — координатные орты}).$$

Оказывается, что это выражение можно записать также в инвариантной (не зависящей от системы координат) форме:

$$\mathrm{L}u = \frac{1}{\rho}[\nabla\big((\lambda + 2\mu)div u\big) - rot(\mu rot u) + 2((\nabla\mu, u)u - \nabla\mu \cdot div u + [\nabla\mu \times rot u])], \qquad (1.1)$$

здесь $(\nabla\mu, u)u -$ это производная от векторного поля u по направлению градиента μ.

Оператор Ламэ можно также записать в виде, из которого сразу же видна его самосопряжённость:

$$\mathrm{L} = \frac{1}{\rho}[\nabla(\lambda + 2\mu)div - rot\mu rot + 2([\nabla\mu \times rot] + [\nabla\mu \times rot]^* + H_\mu - \Delta\mu)], \qquad (1.2)$$

(эта формула получена совместно с М. И. Белишевым);

где $H_\mu -$ гессиан μ, который действует так: $(H_\mu u, v) = u_i v_k \partial_i \partial_k \mu$ (здесь и далее производится суммирование от 1 до 3 по повторяющимся индексам), а знак $*$ над оператором означает сопряжение.

Рассмотрим начально-краевую задачу для оператора Ламэ:

$$\alpha^T = \begin{cases} u_{tt} - Lu = 0 & \text{в } int\, Q^T \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 & \text{в } \Omega \\ u|_{\Sigma^T} = f & \text{на } \Sigma^T, \end{cases}$$

в которой $0 < T < \infty$; $int\, Q^T$ – внутренность цилиндра $Q^T = \Omega \times [0,T]$; $\Sigma^T = \Gamma \times [0,T] -$ его боковая поверхность.

Функция $f = f(\gamma, t)$, где $\gamma \in \Gamma$, называется граничным управлением.

Решение задачи α^T обозначим $u = u^f(x,t)$. В математической физике решение u^f имеет смысл волы, инициированной граничным источником и распространяющейся вглубь области Ω от края Γ.

2. Метрики и области влияния.

Гиперболическая система α^T имеет два семейства характеристик $\varphi(x,t) = const$ в Q^T, определяемые уравнениями:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - c_\alpha|\nabla\varphi|^2 = 0, \qquad (\alpha = p, s),$$

где $c_p = \left(\frac{2\mu+\lambda}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$, $c_s = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ есть соответственно скорости продольной (быстрой), и поперечной (медленной) волн.

Эти скорости определяют две метрики в $\overline{\Omega}$:

$$\mathrm{d}\tau_\alpha^2 = \frac{|dx|^2}{c_\alpha^2} \qquad (\alpha = p, s;\ |dx|^2 = \sum_{i=1}^{3}(dx_i)^2),$$

превращающие Ω в риманово многообразие с краем Γ.

Отвечающие этим метрикам расстояния есть:

$$\mathrm{dist}_\alpha(\mathrm{a},\, \mathrm{b}) = \inf \int \frac{|dx|}{c_\alpha(x)}\,. \qquad (\mathrm{a},\, b \in \overline{\Omega}),$$

где интеграл берётся вдоль гладкой кривой $L_{ab} \subset \Omega$, соединяющим a и b, а нижняя грань берётся по всем таким гладким кривым L_{ab}.

Для открытого подмножества $\sigma \subseteq \Gamma$ определим область влияния σ (см. [2]):

$$\Omega_\alpha^{\sigma,T} = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}_\alpha(x, \sigma) < T\},\ \mathrm{T} > 0.$$

И времена заполнения:

$$\mathrm{T}_\alpha^\sigma = \inf\left\{\mathrm{T} > 0 :\ \Omega_\alpha^{\sigma,T} \supset \Omega\right\}.$$

Неравенство $c_s < c_p$ влечёт включение:

$$\Omega_s^{\sigma,T} \subset \Omega_p^{\sigma,T}\ ;\ \ T_s^\sigma > T_p^\sigma\,.$$

Введём пространство $\mathcal{H} = L_{2,\rho}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ (с мерой $\rho d\Omega$) и подпространства:

$$\mathcal{H}_\alpha^{\sigma,T} = \left\{y \in \mathcal{H} : supp\ y \subset \overline{\Omega}_\alpha^{\sigma,T}\right\},\ \alpha = p, s.$$

Очевидно включение: $\mathcal{H}_s^{\sigma,T} \subseteq \mathcal{H}_p^{\sigma,T}$.

Имеет место следующее утверждение:
Отображение f→ u^f непрерывно из $L_2(\Sigma^T;\ \mathbb{R}^3)$ в $\mathrm{C}\big([0,T];\ L_2(\Omega;\ \mathbb{R}^3)\big)$. (Теорема 1 из [2]).

3. Оператор реакции.

Определим $\Sigma^{\sigma,T} = \overline{\sigma} \times [0,T]$ $(\sigma \subseteq \Gamma)$.

С системой α^T свяжем оператор реакции $R^{\sigma,T}$ (“вход-выход”):

$$R^{\sigma,T} : L_2(\Sigma^{\sigma,T}; \mathbb{R}^3) \to L_2(\Sigma^{\sigma,T}; \mathbb{R}^3)$$

с областью определения $\mathrm{Dom}R^{\sigma,T} = C_0^\infty(\Sigma^{\sigma,T}; \mathbb{R}^3)$.

Оператор реакции $R^{\sigma,T}$ действует на вектор управления f (см. [2]):

$$(R^{\sigma,T} f)_i = \sum_{j,k,l=1}^3 n_j\, c_{ijkl}\, \partial_l u_k^{\tilde{f}} \ \text{ на }\ \Sigma^{\sigma,T}\ \ (\mathrm{i} = 1,\, 2,\, 3), \tag{3.1}$$

где n_j (j=1, 2, 3) – компоненты внешней нормали, а управление $\tilde{f} = \begin{cases} f(\gamma, t), \gamma \in \sigma \\ 0, \qquad \gamma \notin \sigma \end{cases}$ есть продолжение управления f с $\Sigma^{\sigma,T}$ на Σ^T нулём;
тензор $c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\big(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\big)$, здесь λ, μ – переменные коэффициенты Ламэ;
оператор $\partial_l = \frac{\partial}{\partial x_l}$.

Обозначим $R^T = R^{\Gamma,T}$ (т.е. оператор реакции R^T задан на всей границе Г). Он описывает отелик динамической системы α^T на воздействие, производимое управлением.

Действие оператора реакции R^T можно записать и в инвариантной форме.

Для этого заметим, что любой вектор v, заданный на границе области, можно представить в виде: $v = v^\nu \cdot n + v_\theta$,
n – единичный вектор внешней нормали, v^n – скалярное произведение (v, n), а v_θ – компонента вектора v, лежащая в касательной плоскости к границе Г и проходящая через данную точку $\gamma \in \Gamma$.

Например, так можно разложить и заданное управление f на нормальную к границе и касательную составляющие:

$$f = f^n \cdot n + f_\theta = \binom{f^n}{f_\theta}.$$

Тогда нетрудно установить, что действие оператора реакции R^T, эквивалентное записи (3.1), будет:

$$R^T f = \lambda divu \cdot n + \mu\left(2\frac{\partial u}{\partial n} + [n \times rotu]\right) \qquad (\text{ср. с } [4], \text{стр. } 8)$$

или, что то же самое:

$$R^T f = \begin{pmatrix} \lambda divu + 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^n \\ -\mu\Phi(rot\,u)_\theta + 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\theta \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где $\Phi v = -[n \times v]$ – поворот компоненты v_θ в касательной плоскости на $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке.

С другой стороны, можно получить выражение для оператора реакции в инвариантной форме, исходя из формулы Грина для оператора Ламэ:

$$(Lu, v)_\mathcal{H} - (u, Lv)_\mathcal{H} = (Nu, Dv)_\mathcal{F} - (Du, Nv)_\mathcal{F}\,, \tag{3.3}$$

где $\mathcal{H} = L_{2,\rho}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{F} = L_2(\Gamma, \mathbb{R}^3)$;

$Du = u|_\Gamma$ – оператор Дирихле (сужение функции u на границу Γ),

Nu – оператор Неймана , действие которого в декартовых координатах:

$$(Nu)_i = c_{ijkl}\,\partial_l u_k n_j\ .$$

Оператор реакции R^T переводит $\mathrm{D}u^f$ в $\mathrm{N}u^f$, поэтому $R^T f = \mathrm{N}u^f$.

Скалярное произведение $(u, v)_\mathcal{H}$ в пространстве $\mathcal{H}$ (или $\mathcal{F}$) определяется стандартным образом через интеграл по всей области Ω (или по всей границе Γ) от произведения этих функций u и v:

$$(u, v)_{\,\mathcal{H}} = \int |(u(x), v(x))| \rho(\mathrm{x}) d\Omega\,, (\mathrm{u}(\gamma), v(\gamma))$$

$$(u, v)_{\,\mathcal{F}} = \int |(\mathrm{u}(\gamma), v(\gamma))| d\gamma.$$

Причём обычное скалярное произведение $(u, v) = u^n v^n + (u_\theta, v_\theta)$.

Подставив в формулу Грина (3.3) выражение для оператора Ламэ в инвариантной форме (1.1) , и интегрируя по частям (аналогично тому, как это сделано в [3]), найдём ещё одно выражение для оператора реакции (обозначим его R_G^T):

$$R_G^T f = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) div\, u^f \\ \mu\Phi(rotu\,)_\theta - 2\Phi(u^f \times \nabla\mu)_\theta \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Заметим, что в работе [3] получено выражение для оператора реакции (в случае уравнения Ламэ с $\rho = 1, \mu = const$), которое, очевидно, является частным случаем выражения (3.4).

Выражения (3.2) для $R^T\mathrm{f}$ и (3.4) для $R_G^T f$ получились немного различными, но это неудивительно, так как в формуле Грина (3.3) оператор Неймана определён с точностью до прибавления оператора Дирихле, умноженного на константу. Иначе говоря, формула Грина не изменится, если в ней заменить оператор N на $\tilde{N} = N + \alpha D$ ($\alpha = const \in \mathbb{R}$).

Нетрудно получить, что для рассматриваемого оператора Ламэ L (1.1) связь между R^T и R^T_G будет следующей:

$$R^T = R^T_G + \begin{pmatrix} 0 & -2\mu div_\theta(\cdot) \\ 2\nabla_\theta(\mu\cdot) & -2\partial_n\mu \end{pmatrix}. \qquad (3.5)$$

В этой формуле div_θ и ∇_θ − поверхностная дивергенция и градиент соответственно. Оператор $\begin{pmatrix} 0 & -2\mu div_\theta(\cdot) \\ 2\nabla_\theta(\mu\cdot) & -2\partial_n\mu \end{pmatrix}$ действует на вектор управления f $=\begin{pmatrix} f^n \\ f_\theta \end{pmatrix}$ по формуле:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2\mu div_\theta(\cdot) \\ 2\nabla_\theta(\mu\cdot) & -2\partial_n\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f^n \\ f_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu div_\theta f_\theta \\ 2\nabla_\theta(\mu f^n) - 2\partial_n\mu\cdot f_\theta \end{pmatrix}.$$

Выводы

В работе получены выражения (1.1), (1.2) для оператора Ламэ в форме, не зависящей от системы координат. На этой основе найден инвариантный вид оператора реакции системы Ламэ в двухкомпонентной форме (3.4), удобной для приложения в методе граничного управления (BC-методе). Установлена также связь (3.5) между различными представлениями (3.2) и (3.4) оператора реакции в такой форме. Результат работы может быть использован при решении динамической обратной задачи для упругого тела методом граничного управления.

Автор выражает благодарость д. ф.-м. н. М. И. Белишеву (Петербургское отделение математического института им.Стеклова РАН) за помощь в руководстве работой.

Литература

1. Белишев М.И., Благовещенский А.С. Динамические обратные задачи теории волн. – СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1999. – 268с.

2. Belishev M.I., Lasiecka I. The dynamical Lame system: regularity of solutions, boundary controllability and boundary data continuation. //J.ESAIM: Control, Optimisation and Calculues of Variations. – June, 2002. –Vol. 8. – P.143 –167.

3. Belishev M.I. Dynamical inverse problem for a Lame type system. //PDMI preprint. – SPb.: Saint-Petersburg Department of the Steklov Mathematical Institute (POMI). – 03/2006.

4. Кучер В.И., Каштан Б.М. Лучевой метод для изотропной неоднородной упругой среды: Учебник – СПб. : Издательство С.-Петербургского университета, 1999. –167с.