УДК.514.18

СПОСІБ ВИЗНАЧЕННЯ ОПУКЛОСТІ ДПК

Верещага В.М., д.т.н.,
Лисенко К.Ю.
Мелітопольська школа прикладної геометрії,
Мелітопольський державний педагогічний університет
ім. Б. Хмельницького (Україна)

Запропоновано спосіб визначення опуклості ДПК, який базується на основних властивостях опуклих множин евклідового простору E^3.

Ключові слова: опуклість, опукла множина, опуклий многогранник, опукла ДПК.

Постановка проблеми. Будь-який аналіз вихідних точкових рядів, практично, завжди потребує визначити наявність або відсутність у них точок перегину. Така обізнаність дає можливість правильного застосування вихідних ДПК у подальших дослідженнях.

Практично в усіх дисертаційних дослідженнях з прикладної геометрії, що пов'язані з відтворення кривих ліній та поверхонь, виникають питання осциляції цих кривих та поверхонь. Для розв'язання проблеми відсутності точок перегину на ДПК розроблено різні способи, алгоритми їхнього аналізу. Тому, розробка найбільш універсального способу визначення опуклості ДПК, є проблемою актуальною.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Термін «Опуклість» є узагальнюючим поняттям щодо окремих властивостей опуклих множин у евклідовому просторі E^n , при цьому, і сам евклідів простір E^n вважається опуклим [1].

До основних властивостей, що визначають опуклість E^n , відносяться наступні дві, які мають місце одночасно.

Множина *M* є опуклою:

а) коли вона утворюється перетином відкритих півпросторів.

б) коли разом з будь-якими двома точками множина утримує і відтинок, що з'єднує їх (рис. 1).

Рис. 1. Приклади множин: M_1 – опукла; M_2 – не опукла

Зображення на рис. 1 означає, що $M_1 : M_2 \subset E^2$:

$A_1: B_1 \in M_1 \rightarrow (A_1B_1) \subset M_1$ – опукла множина;
$A_2: B_2 \in M_2 \rightarrow (A_2B_2) \not\subset M_2$ – не опукла множина.

Проблеми вивчення опуклості розглядаються у опуклому аналізі, який займає проміжне положення між аналізом і геометрією і вивчає опуклі функції, опуклі функціонали та опуклі множини. Засновником опуклого аналізу був Г. Мінковські, який створив опуклу геометрію [2].

Поняття і методи опуклого аналізу застосовуються у теорії екстремальних задач, опуклому програмування, у класичному варіаційному численні, математичній фізиці тощо [3].

Частинними випадками опуклих множин є опуклі многогранники та многокутники.

Опуклий многогранник – це опукла оболонка скінченого числа точок у евклідовому просторі E^n і є обмеженою непустою множиною перетинів скінченого числа замкнутих півпросторів [4].

У цьому випадку вони описуються системою лінійних нерівностей та досліджуються алгебраїчними засобами. Мінімізація лінійних форм, що утворюють многогранники, складає предмет лінійного програмування.

У теорії опуклих поверхонь також опуклим многогранником називають межу між множиною точок тіла і всією множиною точок, до якої належить це тіло. Якщо опуклий многогранник не є замкнутим, то такий многогранник називається многогранник з краєм [5].

У елементарній геометрії спочатку визначають многогранник як фігуру спеціальним способом складену із многокутників, а потім визначаються опуклий многогранним як множина точок, що знаходиться з одного боку відносно кожної з його граней [6].

Під опуклим многокутником будемо розуміти плоску опуклу множину, межа якої – ламана лінія, що складається із скінченого числа прямолінійних відтинків. Опуклий многокутник утворюється у результаті перетину скінченого числа півпросторів і описується системою лінійних нерівностей у опуклому евклідовому просторі E^2. Опуклі многокутники також використовуються у лінійному програмуванні та досліджуються алгебраїчними методами.

У теорії опуклих поверхонь опуклим многокутником називають лише його межу між опуклою областю M_1 якоїсь множини M і самою множиною. Межа випуклої множини M_1 може бути не замкнутою. У такому разі її називають опуклим многокутником з краєм [4].

У прикладній геометрії опуклі многокутники з краєм називають супровідною ламаною лінією ДПК, а її вершини – дискретно поданою кривою [7]. Уникненню неконтрольованої осциляції ДПК присвячено роботу [8] і низка інших робіт Мелітопольської школи прикладної геометрії, у яких було досліджено побудови опуклих ДПК, полосу диф-проекцій, способи супровідної ламаної та трикутників опуклості, інтерполяція на основі кутів згущення тощо, у результаті чого виник та розробляється напрям дослідження – варіативне дискретне геометричне моделювання. Також розглядаються питання наявності точок перегину у роботах [9]. Розробка будь-якого способу уникнення осциляції супроводжується перевіркою ДПК на опуклість. Таким чином, із усього сказаного випливає необхідність розробки простого, універсального способу аналізу ДПК на опуклість, цьому і присвячується ця стаття.

Формулювання цілей статті. На основі теорії випуклості та теорії опуклих множин, з використанням властивостей опуклості, розробити спосіб визначення опуклості ДПК.

Основна частина. Відомо [10], що рівняння прямої у декартових прямокутних координатах має вигляд:

$$A = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = x_i y_{i+1} + x_{i+1} y + x y_i - x_i y - x_{i+1} y_i - x y_{i+1}. \quad (1)$$

Згуртуємо (1), дістанемо:

$$A = x_i(y_{i+1} - y) + x_{i+1}(y - y_i) + x(y_i - y_{i+1}). \quad (2)$$

У (2) підставимо замість x, y координати x_{i+2}, y_{i+2}, отримаємо:

$$A_{i+1} = x_i(y_{i+1} - y_{i+2}) + x_{i+1}(y_{i+2} - y_i) + x_{i+2}(y_i - y_{i+1}). \quad (3)$$

Як бачимо, у кожному наступному доданку індекс i на одиницю більше, у першому - x_i, у другому - x_{i+1}, у третьому - x_{i+2}. Відносно індексу при y, кожен наступний індекс при y у співмножниках на одиницю більший від попереднього і, при цьому, у кожному з доданків немає однакових індексів, а наступним індексом після *i+2* є індекс *i*.

Перепишемо доданки з (3), позначивши їх через *S:*

$$S_i = x_i \Delta y_{i+1,i+2};\ S_{i+1} = x_{i+1} \Delta y_{i+2,i};\ S_{i+2} = x_{i+2} \Delta y_{i,i+1}, \quad (4)$$

де $\Delta y_{i+1,i+2} = y_{i+1} - y_{i+2}$; $\Delta y_{i+2,i} = y_{i+2} - y_i$; $\Delta y_{i,i+1} = y_i - y_{i+1}$,

S_i, S_{i+1}, S_{i+2} – відповідні площі.

Якщо площі S з (4) зобразити графічно, дістанемо (рис.2), на якому уздовж осі *Ox* поспіль відкладено довжини відрізків Ox_i, Ox_{i+1} та Ox_{i+2}.

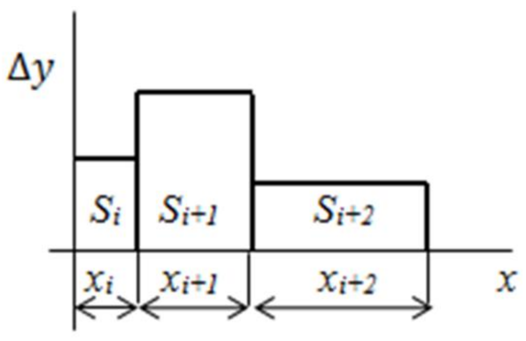

Рис. 2. Графічне зображення площ для доданків з (3)

Якщо розглянути загущений точковий ряд, що являє собою ДПК (рис.3), і обрати поспіль три точки A_i ; A_{i+1}; A_{i+2}, то відносно прямої $A_i A_{i+1}$ точка A_{i+2} може займати три різні положення (на рис. 3 усі три положення зображені разом): нижче – A'_{i+2}, вище – A''_{i+2}, або на прямій – A_{i+2}.

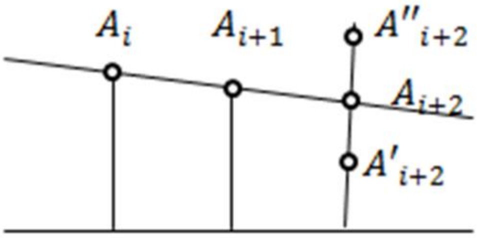

Рис. 3. Три варіанти розташування i+2 точки відносно прямої A_iA_{i+1}

Для точки A'_{i+2} сума площ $\sum_{i=i}^{i+2} S_i < 0$ є від'ємною; для точки A''_{i+2} сума площ $\sum_{i=i}^{i+2} S_i > 0$ є додатною, а для точки A_{i+2} сума площ $\sum_{i=i}^{i+2} S_i = 0$. Якщо попередня трійка A_i, A_{i+1}, A_{i+2} має $\sum_{i=i}^{i+2} S_i > 0$, а наступна трійка A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3} має $\sum_{i=i}^{i+3} S_i < 0$, то на ділянці між точками A_{i+1} та A_{i+2} має місце точка перегину. Проводячи згущення ДПК на ділянці [i+1, i+2], можемо з наперед заданою похибкою визначити положення точки перегину.

Приклад. Нехай $A_i(1,1)$, $A_{i+1}(3,3)$. Розглянемо декілька варіантів розташування точки A_{i+2}, таблиця 1.

Таблиця 1

Варіанти розташування точки A_{i+2}.

	A_i	A_{i+1}	A_{i+2}								
x	1	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5
y	1	3	4	3	2	1	5	6	7	8	9
$\sum_{i=i}^{i+2} S_i$			-2	-4	-6	-8	0	2	4	6	8

Якщо зобразити результати розрахунків (табл.1.) графічно, то для даного прикладу буде пряма (рис. 4).

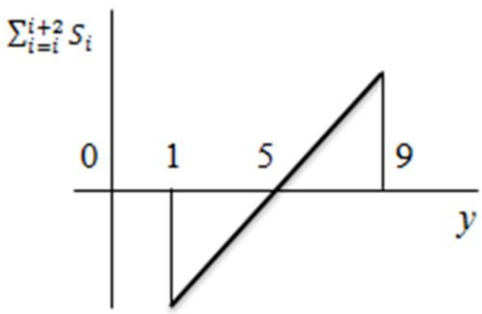

Рис.4. Залежність $\sum_{i=i}^{i+2} S_i$ від координати y

Треба зауважити, якщо $\sum_{i=i}^{i+2} S_i < 0$ для усіх точок ДПК, то на даній ділянці вона є опуклою. Якщо $\sum_{i=i}^{i+2} S_i > 0$ для усіх точок ДПК, то ДПК є увігнутою.

Висновок. Вперше запропоновано спосіб визначення опуклості ДПК, у якому застосовано основні властивості опуклих множин, який розширює можливості прикладної геометрії.

Література

1. Громол Д. Риманова геометрия в целом / Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер; [пер. с нем.]. – М., – 1971.
2. Minkowski H. Geometria der Zahlen. B. / H. Minkowski. – Lpz. – 1910.

3. Рокафаллер Р.Т. Выпуклый анализ / Р.Т. Рокафаллер; [пер. с англ.]. – М., – 1973.
4. Математическая энциклопедия/ ред. коллегия: И.М. Виноградов (гл. ред.). – Т.1. – М., 1977.
5. Александров А.Д. Выпуклые многогранники / А.Д. Александров. – М.-Л., 1950.
6. Энциклопедия элементарной математики, кн.4.Геометрия. – М., 1963.
7. Найдиш В.М. Дискретна інтерполяція/ В.М. Найдиш. – Мелітополь: Люкс, 2007. – 250 с.
8. Верещага В.М. Дискретно-параметрический метод геометрического моделирования кривых линий и поверхностей: дис… докт. техн. наук: 05.01.01/ Виктор Михайлович Верещага. – Мелитополь, 1996. – 320с.
9. Пугачов Є.В. Визначення типу апроксимувального об’єкту точкової множини/ Є.В. Пугачов, В.І. Черняк // К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. – С. 48-52.
10. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии, дополненные необходимыми сведениями из алгебры / П.С. Александров. – М.: «Наука», 1968.

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫПУКЛОСТИ ДПК

Верещага В.М., Лысенко К.Ю.

Предложен способ определения выпуклости ДПК, который базируется на основных свойствах выпуклых множеств эвклидового пространства E^3.

Ключевые слова: выпуклость, выпуклое множество, выпуклый многогранник, выпуклая ДПК.

METHOD FOR DETERMINING THE CONVEXITY OF A DGC

Vereshchaga V., Lysenko K.

A method is proposed for determining the convexity of a DGC, which is based on the basic properties of convex sets in the Euclidean space E^3.

Keywords: convexity, convex set, convex polyhedron, convex DGC.