УДК 539.371

РОЗРАХУНОК ДЕФОРМІВНОГО СТАНУ СКЛАДЕНОГО ТІЛА З ДВОХ ПЛАСТИН, З'ЄДНАНИХ ПІД ДОВІЛЬНИМ КУТОМ

Рак Л. О., аспірант

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

rak.luda@mail.ru

Робота присвячена дослідженню напружено-деформованого стану складеної конструкції з двох пластин, жорстко з'єднаних одна з одною під довільним кутом з умовою затиснення паралельних до ребра з'єднання країв. Задача розв'язується в переміщеннях шляхом представлення шуканого розв'язку у вигляді тригонометричних рядів з наступною побудовою матриць типу Гріна для цієї задачі за допомогою врахування як граничних умов жорсткого затиснення країв пластин, так і умов з'єднання пластин одна з одною.
Ключові слова: напружено-деформований стан, складена конструкція з двох пластин, розв'язок в переміщеннях, матриця типу Гріна.

РАСЧЕТ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛА, СОБРАННОГО ИЗ ДВУХ ПЛАСТИН, СОЕДИНЕННЫХ ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ

Рак Л. А., аспирант

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

rak.luda@mail.ru

Работа посвящена исследованию напряженно-деформированного состояния составной конструкции из двух пластин, жестко соединенных одна с другой под произвольным углом при условии зажатия параллельных ребру соединения краев. Задача решается в перемещениях путем представления искомого решения в виде тригонометрических рядов с последующим построением матриц типа Грина для данной задачи при помощи учета как краевых условий жесткого защемления краев пластин, так и условий соединения пластин одна с другой.
Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, составная конструкция из двух пластин, решение в перемещениях, матрица типа Грина.

MODELING OF STATIC DEFORMATION OF THE COMPLICATED CONSTRACTION WITH TWO PLATE WITH HELP THE GREEN'S MATRIX

Rak L. A., postgraduate

Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

rak.luda@mail.ru

Analysis of constructions which are made two plates, united under an arbitrary angle, is an important task of mechanics which has large practical application in the different spheres of human activity. Plates use in different constructions for building. Strainly-deformed state for plates is calculated as, a rule, by approximate theories. Therefore an actual and important problem is about development of methods of calculation of these elements. The decision of task is given by possibility to check up approximate theories. And the decision of task is given by possibility to define the limits of their application in practice. A concept about of Green's matrix allows to write down the decision of homogeneous task of border for the systems of differential equalizations. A method of construction of Green's matrix is the effective instrument of decision of tasks of theory of resiliency. This method is given by possibility to probe component bodies of arbitrary geometry. This method takes into account dependences on a border and dependences of contiguity of plates. The offered method can be applied for the calculations of tension and movements in the area of loading of construction. Results are confirmed in the article. Green's matrix assumes evident interpretation as a result of action of point load in many cases.

The article studies the task of theory of resiliency. A problem consists in research of construction. This construction is built from two plates. Plates united under an arbitrary angle. Plates are barely bound on other sides. A construction has the difficult loading. Problem is decides in moving. A decision is present in the form of trigonometry rows. Green's matrix is built for this problem. The terms of fastening of plates are taken into account in the construction of Green's matrix. The terms of connection of plates are taken into account in the record of Green's matrix.

It is possible to write down the model of resilient equilibrium by the system of differential equalizations in moving. Terms of purview and terms of setting of plates are in attention. The rows of trigonometry for the functions of bendings are put in the system of differential equalizations in moving. Terms on sides and terms of fastening of plates will change a kind. As a result we get the system of usual differential equalizations with permanent coefficients. The method of variation of arbitrary constants is used for the decision of the system of usual differential equalizations. We get the decision of the system of differential equalizations in moving. Find unknown permanent coefficients, using the terms of fixing of plates and terms of purview. Permanent coefficients are needed, to write down the decision of task of resilient equilibrium in an analytical kind. Approach of search of Green's matrix is given by possibility to get the values of unknown sizes with high exactness.
A static task is formulated in the article. A static task decides in the article. The method of decision of problem specifies that it is possible to probe any constructions which contain plates. Loading of constructions will be more difficult at further researches.
Key words: strainly-deformed state, complicated construction with two plate, solved in displaces, Green's matrix.

При вивченні систем еліптичного типу для дослідження статичного деформування складених тіл вводиться поняття матриці Гріна, яка дозволяє виразити розв'язок крайової задачі для вказаних систем у вигляді інтегралів від добутку матриці Гріна на вектори правих частин. У багатьох випадках побудована матриця Гріна допускає наглядне тлумачення як результат дії зосередженого навантаження.

Метод побудови матриць типу Гріна є ефективним інструментом розв'язку задач теорії пружності для складених тіл довільної геометрії з різними граничними умовами і умовами контактної взаємодії. У роботі цей метод застосовано для розрахунку напружень та переміщень у зоні навантаження для двох прямокутних пластин, з'єднаних під довільним кутом між собою та жорстко затиснених з інших боків.

Постановка задачі: дослідити напружено-деформований стан при навантаженні складеної конструкції з двох прямокутних пластин, жорстко затиснутих на краях. Пластини з'єднані між собою під довільним кутом α, який під час деформації конструкції вважається незмінним (рис. 1). Задача розв'язується в переміщеннях шляхом представлення шуканого розв'язку у вигляді тригонометричних рядів з наступною побудовою матриці типу Гріна за допомогою врахування як граничних умов жорсткого затиснення країв пластин, так і умов з'єднання пластин одна з одною.

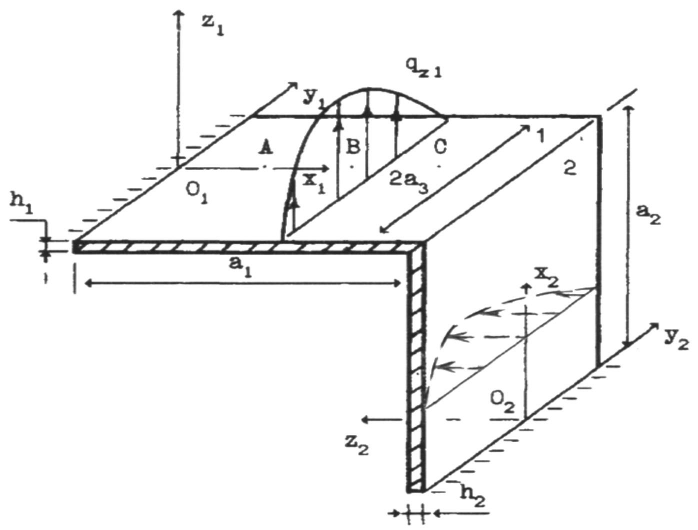

Рис. 1. Складена конструкція з двох пластин, з'єднаних під довільним кутом

Для кожної пластини вводиться своя прямокутна декартова система координат так, щоб вісь абсцис проходила посередині пластини і була направлена до лінії з'єднання пластин, вісь ординат – вздовж лінії жорсткого затиснення, а вісь аплікат – так, щоб орієнтація простору була правою.

Модель пружної рівноваги кожної із пари пластин, з яких складається конструкція, описується системою диференціальних рівнянь у переміщеннях [1]

$$\Delta U_n + \frac{\lambda_n + \mu_n}{\mu_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\frac{\partial U_n}{\partial x_n} + \frac{\partial V_n}{\partial y_n}\right] = X_n;$$

$$\Delta V_n + \frac{\lambda_n + \mu_n}{\mu_n}\frac{\partial}{\partial y_n}\left[\frac{\partial U_n}{\partial x_n} + \frac{\partial V_n}{\partial y_n}\right] = Y_n; \qquad (1)$$

$$\Delta\Delta W_n = Z_n.$$

Тут $U_n = U_n(x_n, y_n)$, $V_n = V_n(x_n, y_n)$, $W_n = W_n(x_n, y_n)$ – проекції вектора зміщень $\Psi_n(x_n, y_n)$ на відповідні осі декартової системи координат кожної пластини, а $X_n = \frac{12(\sigma_n^2 - 1)}{E_n h_n^3} q_{nx}$, $Y_n = \frac{12(\sigma_n^2 - 1)}{E_n h_n^3} q_{ny}$, $Z_n = \frac{12(1 - \sigma_n^2)}{E_n h_n^3} q_{nz}$ – праві частини системи рівнянь, що враховують інтенсивність зовнішнього поверхневого навантаження та фізичні характеристики пластини, E_n – модуль Юнга, h_n – товщина пластин, σ_n – коефіцієнт Пуассона, λ_n, μ_n – коефіцієнти Ламе, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_n^2}$ – диференціальний оператор Лапласа. Тут і далі $n = 1,2$ і позначає номер пластинки у складеній конструкції, яка досліджується.

Крайові умови жорстко затиснених країв, де відсутні прогини і неможливий поворот відносно осі ординат, мають вигляд

$$U_n\big|_{X_n=0} = 0, \quad W_n\big|_{X_n=0} = 0, \quad V_n\big|_{X_n=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial W_n}{\partial x_n}\right|_{X_n=0} = 0. \qquad (2)$$

Умови з'єднання пластин на межі спільного ребра подамо у вигляді

$$W_1\big|_{x_1=a_1} = (U_2 \cdot \sin\alpha + W_2 \cdot \cos\alpha)\big|_{x_2=a_2}, \quad V_1\big|_{x_1=a_1} = V_2\big|_{x_2=a_2}, \quad U_1\big|_{x_1=a_1} = (U_2 \cdot \cos\alpha - W_2 \cdot \sin\alpha)\big|_{x_2=a_2},$$

$$\left.\frac{\partial W_1}{\partial x_1}\right|_{x_1=a_1} = \left.\frac{\partial W_2}{\partial x_2}\right|_{x_2=a_2}, \quad Q_{1x}\big|_{x_1=a_1} = (T_{2x} \cdot \sin\alpha + Q_{2x} \cdot \cos\alpha)\big|_{x_2=a_2}, \qquad (3)$$

$$T_{1x}\big|_{x_1=a_1} = (T_{2x} \cdot \cos\alpha - Q_{2x} \cdot \sin\alpha)\big|_{x_2=a_2}, \quad S_{1xy}\big|_{x_1=a_1} = S_{2xy}\big|_{x_2=a_2}, \quad M_{2x}\big|_{x_2=a_2} = M_{1x}\big|_{x_1=a_1},$$

де Q_{nx} – поперечні сили відносно осі абсцис, T_{nx} – розтягувальні сили, які діють вздовж осі абсцис, S_{nxy} – зсувні зусилля у серединних площинах пластин, M_{nx} M_{nx} – згинальні моменти відносно осі абсцис.

Причому, їх вирази через похідні вектора зміщень мають вигляд [1]

$$\mathrm{T}_{nx} = \frac{E_n h_n}{1 - \sigma_n^2}\left(\frac{\partial U_n}{\partial x_n} + \sigma_n \frac{\partial V_n}{\partial y_n}\right), \quad Q_{nx} = -\frac{E_n h_n^3}{12(1 - \sigma_n^2)}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_n}\Delta \mathrm{W}_n,$$

$$S_{nxy} = \frac{E_n h_n}{2(1 + \sigma_n)}\left(\frac{\partial U_n}{\partial y_n} + \frac{\partial V_n}{\partial x_n}\right), \quad M_{nx} = -\frac{E_n h_n^3}{12(1 - \sigma_n^2)}\left(\frac{\partial^2 W_n}{\partial x_n^2} + \sigma_n \frac{\partial^2 W_n}{\partial y_n^2}\right). \qquad (4)$$

Розв'язок системи (1) доцільно шукати у вигляді тригонометричного ряду Фур'є для кожної функції U_n, V_n, W_n і правих частин X_n, Y_n, Z_n відповідно

$$U_n(x_n, y_n) = \sum_m U_{nm}(x_n)\cos(my_n);$$
$$V_n(x_n, y_n) = \sum_m V_{nm}(x_n)\sin(my_n); \qquad (5)$$
$$W_n(x_n, y_n) = \sum_m W_{nm}(x_n)\cos(my_n).$$

Внаслідок підстановки (5) і відповідних розкладів для складових векторів зовнішнього поверхневого навантаження в систему (1), одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^4W_{nm}}{dx_n^4} - 2m^2\frac{d^2W_{nm}}{dx_n^2} + m^4W_{nm} = Z_{nm};$$
$$(1+q_n)\frac{d^2U_{nm}}{dx_n^2} - m^2U_{nm} + q_n m\frac{dV_{nm}}{dx_n} = X_{nm}; \qquad (6)$$
$$\frac{d^2V_{nm}}{dx_n^2} - m^2(1+q_n)V_{nm} - q_n m\frac{dU_{nm}}{dx_n} = Y_{nm},$$

у якій $U_{nm}(x_n)$, $V_{nm}(x_n)$, $W_{nm}(x_n)$ і $X_{nm}(x_n)$, $Y_{nm}(x_n)$, $Z_{nm}(x_n)$ – відповідні коефіцієнти ряду Фур’є.

Крайові умови жорстко затиснених країв (2) після перетворень приймуть вигляд

$$U_{nm}\big|_{X_n=0} = 0, \quad W_{nm}\big|_{X_n=0} = 0, \quad V_{nm}\big|_{X_n=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial W_{nm}}{\partial x_n}\right|_{X_n=0} = 0, \qquad (7)$$

а умови з’єднання пластин (3):

$$W_{1m}\big|_{x_1=a_1} = \left(U_{2m}\cdot\sin\alpha + W_{2m}\cdot\cos\alpha\right)\big|_{x_2=a_2},$$
$$U_{1m}\big|_{x_1=a_1} = \left(U_{2m}\cdot\cos\alpha - W_{2m}\cdot\sin\alpha\right)\big|_{x_2=a_2},$$
$$V_{1m}\big|_{x_1=a_1} = V_{2m}\big|_{x_2=a_2}, \quad \left.\frac{\partial W_{1m}}{\partial x_1}\right|_{x_1=a_1} = \left.\frac{\partial W_{2m}}{\partial x_2}\right|_{x_2=a_2}, \qquad (8)$$
$$\left.\frac{h_1^2}{12}\left(\frac{d^3W_{1m}}{dx_1^3} - m^2\frac{dW_{1m}}{dx_1}\right)\right|_{x_1=a_1} = \left.\left(\frac{dU_{2m}}{dx_2} + \frac{q_2-1}{2q_2}mV_{2m}\right)\cdot\sin\alpha - \frac{h_2^2}{12}\left(\frac{d^3W_{2m}}{dx_2^3} - m^2\frac{dW_{2m}}{dx_2}\right)\cdot\cos\alpha\right|_{x_2=a_2},$$
$$\left.\left(\frac{dU_{1m}}{dx_1} + \frac{q_1-1}{2q_1}mV_{1m}\right)\right|_{x_1=a_1} = \left.\left(\frac{dU_{2m}}{dx_2} + \frac{q_2-1}{2q_2}mV_{2m}\right)\cdot\cos\alpha + \frac{h_2^2}{12}\left(\frac{d^3W_{2m}}{dx_2^3} - m^2\frac{dW_{2m}}{dx_2}\right)\cdot\sin\alpha\right|_{x_2=a_2},$$
$$\left.\left(\frac{dV_{1m}}{dx_1} - mU_{1m}\right)\right|_{x_1=a_1} = \left.\left(\frac{dV_{2m}}{dx_2} - mU_{2m}\right)\right|_{x_2=a_2},$$
$$\left.\left(\frac{d^2W_{1m}}{dx_1^2} - \frac{q_1-1}{2q_1}m^2W_{1m}\right)\right|_{x_1=a_1} - \left.\left(\frac{d^2W_{2m}}{dx_2^2} - \frac{q_2-1}{2q_2}m^2W_{2m}\right)\right|_{x_2=a_2} = 0.$$

Розв’язок системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (6) будемо здійснювати методом варіації довільних сталих:

$$W_{1m}(x_1) = C_{11}(x_1)W_{1m}^{(1)}(x_1) + C_{12}(x_1)W_{1m}^{(2)}(x_1) + C_{13}(x_1)W_{1m}^{(3)}(x_1) + C_{14}(x_1)W_{1m}^{(4)}(x_1),$$

$$U_{1m}(x_1) = C_{15}(x_1)U_{1m}^{(1)}(x_1) + C_{16}(x_1)U_{1m}^{(2)}(x_1) + C_{17}(x_1)U_{1m}^{(3)}(x_1) + C_{18}(x_1)U_{1m}^{(4)}(x_1),$$
$$V_{1m}(x_1) = C_{15}(x_1)V_{1m}^{(1)}(x_1) + C_{16}(x_1)V_{1m}^{(2)}(x_1) + C_{17}(x_1)V_{1m}^{(3)}(x_1) + C_{18}(x_1)V_{1m}^{(4)}(x_1), \qquad (9)$$

де

$$W_{1m}^{(1)}(x_1) = ch(mx_1)\ , \quad W_{1m}^{(2)}(x_1) = sh(mx_1), \quad W_{1m}^{(3)}(x_1) = x_1 ch(mx_1), \quad W_{1m}^{(4)}(x_1) = x_1 sh(mx_1);$$
$$U_{1m}^{(1)}(x_1) = ch(mx_1), \quad U_{1m}^{(2)}(x_1) = sh(mx_1), \quad U_{1m}^{(3)}(x_1) = x_1 ch(mx_1), \quad U_{1m}^{(4)}(x_1) = x_1 sh(mx_1), \qquad (10)$$
$$V_{1m}^{(1)}(x_1) = -sh(mx_1), \quad V_{1m}^{(2)}(x_1) = -ch(mx_1), \quad V_{1m}^{(3)}(x_1) = -\frac{2+q_1}{q_1 m} ch(mx_1) - x_1 sh(mx_1),$$
$$V_{1m}^{(4)}(x_1) = -\frac{2+q_1}{q_1 m} sh(mx_1) - x_1 ch(mx_1).$$

Остаточно розв’язок системи (1) отримаємо у вигляді

$$W_{nm}(x_n) = \gamma_{nm}^2 W_{nm}^{(2)}(x_n) + \gamma_{nm}^3 W_{nm}^{(3)}(x_n) + \gamma_{nm}^4 W_{nm}^{(4)}(x_n) +$$
$$+ \int_0^{x_n} Z_{nm}(\xi) \frac{sh(m(\xi - x_n)) - m(\xi - x_n)ch(m(\xi - x_n))}{2m^3} d\xi,$$

$$U_{nm}(x_n) = \gamma_{nm}^6 U_{nm}^{(2)}(x_n) + \gamma_{nm}^7 U_{nm}^{(3)}(x_n) + \gamma_{nm}^8 U_{nm}^{(4)}(x_n) +$$
$$+ \int_0^{x_n} X_{nm}(\xi) \frac{q_n m(\xi - x_n)ch(m(\xi - x_n)) - (2+q_n)sh(m(\xi - x_n))}{2m(1+q_n)} d\xi - \qquad (11)$$
$$- \int_0^{x_n} Y_{nm}(\xi) \frac{q_n}{2(1+q_n)} (\xi - x_n) \cdot sh(m(\xi - x_n))\,\mathrm{d}\xi,$$
$$V_{nm}(x_n) = \gamma_{nm}^6 V_{nm}^{(2)}(x_n) + \gamma_{nm}^7 V_{nm}^{(3)}(x_n) + \gamma_{nm}^8 V_{nm}^{(4)}(x_n) +$$
$$+ \int_0^{x_n} X_{nm}(\xi) \frac{q_n}{2(1+q_n)} (\xi - x_n) \cdot sh(m(\xi - x_n))\,\mathrm{d}\xi -$$
$$- \int_0^{x_n} Y_{nm}(\xi) \frac{q_n m(\xi - x_n)ch(m(\xi - x_n)) + (2+q_n)sh(m(\xi - x_n))}{2m(1+q_n)} d\xi.$$

Щоб побудувати аналітичний розв’язок задачі пружної рівноваги, використовуючи умови з’єднання пластин, потрібно відшукати невідомі сталі коефіцієнти $\gamma_{nm}^2 \cdot \gamma_{nm}^4$, γ_{nm}^7, γ_{nm}^8 $n = 1{,}2$ матричним методом з системи $(\gamma_{nm}) = A^{-1}(\bar{a}_{ij}) \cdot B$.

З умов жорсткого затиснення кожної пластини випливає, що деякі коефіцієнти системи (11) пов’язані залежністю $\gamma_{1m}^3 = -m\gamma_{1m}^2$, $\gamma_{2m}^3 = -m\gamma_{2m}^2$, $\gamma_{1m}^6 = -\frac{2+q_1}{q_1 m}\gamma_{1m}^7$ і $\gamma_{2m}^6 = -\frac{2+q_1}{q_1 m}\gamma_{2m}^7$. Виконавши потрібні перегрупування доданків відносно функцій $X_{nm}(\xi)$, $Y_{nm}(\xi)$, $Z_{nm}(\xi)$, можна отримати розв’язок системи диференціальних рівнянь (1) у вигляді

$$\Psi_{nm}(x_n) = \int_0^{a_1} \omega_{nm}(x_n, \xi) \Phi_{nm}(\xi) d\xi + \int_0^{a_2} \theta_{nm}(x_n, \xi) \Phi_{nm}(\xi) d\xi\ ,$$

де

$$\omega_{nm} = \left(\omega_{nm}^{ij}\right)_{i,\,j=1,2,3}; \quad \theta_{nm} = \left(\theta_{nm}^{ij}\right)_{i,\,j=1,2,3},$$

$$\Psi_{nm}\left(x_n\right) = \begin{bmatrix} U_{nm}\left(x_n\right) \\ V_{nm}\left(x_n\right) \\ W_{nm}\left(x_n\right) \end{bmatrix}, \quad \Phi_{nm}\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} X_{nm}\left(\xi\right) \\ Y_{nm}\left(\xi\right) \\ Z_{nm}\left(\xi\right) \end{bmatrix}.$$

Підставляючи отриманий запис у вирази (5) для першої і другої пластин відповідно, одержимо остаточний розв’язок задачі про статичне деформування складеної конструкції в умовах складного навантаження в аналітичному вигляді

$$\Psi_n\left(x_n, y_n\right) = \int_{-a_3}^{a_3}\int_{0}^{a_1} \Omega_n\left(x_n, y_n, \xi, \eta\right)\, \Phi_n\left(\xi, \eta\right)\, d\xi\, d\eta \; +$$

$$+ \int_{-a_3}^{a_3}\int_{0}^{a_2} \Theta_n\left(x_n, y_n, \xi, \eta\right)\, \Phi_n\left(\xi, \eta\right)\, d\xi\, d\eta,$$

де $\Omega_n\left(x_n, y_n, \xi, \eta\right)$, $\Theta_n\left(x_n, y_n, \xi, \eta\right)$ – шукані матриці типу Гріна.

Представлений підхід до побудови матриць типу Гріна дозволяє отримувати значення необхідних компонент з високою точністю.

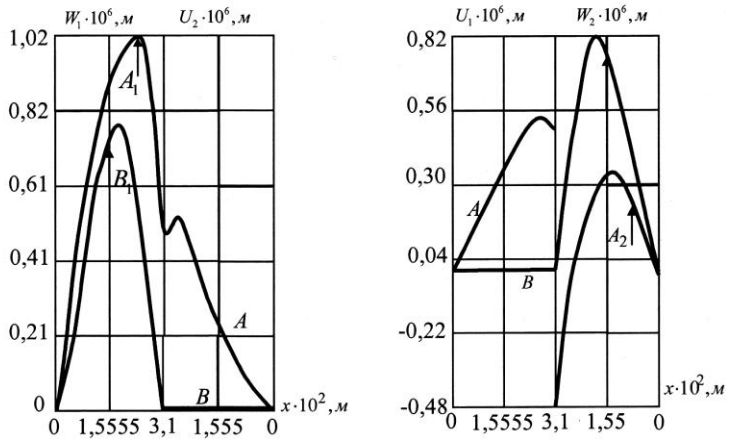

Рис. 2. Деформований стан складеної конструкції при локалізації навантаження в точках A і B (показано стрілками)

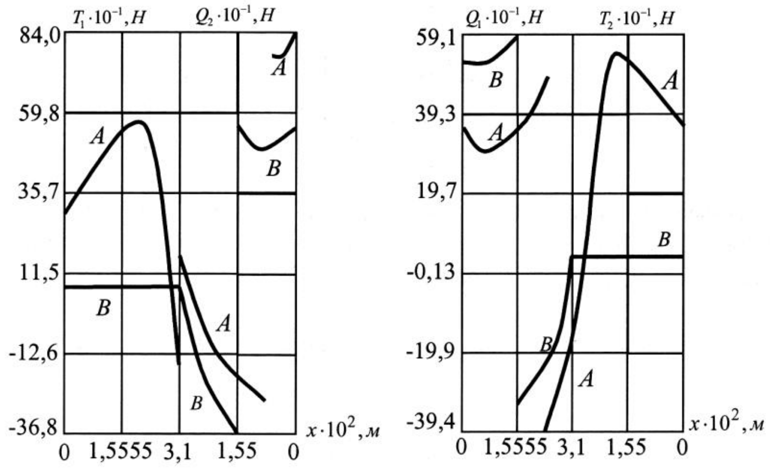

Рис. 3. Напружений стан складеної конструкції при локалізації навантаження в точках A і B

ЛІТЕРАТУРА

1. Биргер М. А. Прочность, устойчивость, колебания : В 3 т. / М. А. Биргер, Я. Г. Пановко. — М. : Машиностроение, 1968. — Т. 1. — 832 с.

2. Гавеля С. П. Матрица типа Грина задачи об упругом деформировании составной конструкции из двух пластин / С. П. Гавеля, С. А. Левчук, Н. В. Чирка. — Запорожье, 1992. — 15 с. — Деп. в УкрИНТЭИ 17.12.92, №2002 – Ук92.

3. Левчук С. А. Матриці Гріна рівнянь та систем еліптичного типу для дослідження статичного деформування складених тіл : дис. … кандидата фіз.-мат. наук : 01.02.04 / Левчук Сергій Анатолійович. — Запоріжжя : ЗДУ, 2002. — 150 с.

4. Левчук С. А. Моделювання симетричного напружено-деформованого стану складеного тіла з двох пластин, з’єднаних під прямим кутом за допомогою матриць типу Гріна / С. А. Левчук // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. — 2010. – – №2. — С. 116-120.

5. Левчук С. А. Моделювання статичного деформування складеної конструкції з двох пластин за допомогою матриць типу Гріна / С. А. Левчук, Л. О. Рак // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. — 2012. — Вип. 19. — С. 212-219.

6. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности / В. И. Самуль. — М. : Высшая школа, 1982. — 264 с.

REFERENCES

1. Birger M.A. Prochnost', ustojchivost', kolebanija : V 3 t. / M.A. Birger, Ja.G. Panovko. – M. : Mashinostroenie, 1968. – T. 1. – 832 p.

2. Gavelja S.P. Matrica tipa Grina zadachi ob uprugom deformirovanii sostavnoj konstrukcii iz dvuh plastin / S.P. Gavelja, S.A. Levchuk, N.V. Chirka. – Zaporozh'e, 1992. – 15 p. — Dep. v UkrINTJeI 17.12.92, №2002 – Uk92.

3. Levchuk S.A. Matrici Grina rivnjan' ta sistem eliptichnogo tipu dlja doslidzhennja statichnogo deformuvannja skladenih til : dis. … kandidata fiz.-mat. nauk : 01.02.04 / Levchuk Sergij Anatolijovich. – Zaporizhzhja : ZDU, 2002. – 150 p.

4. Levchuk S.A. Modeljuvannja simetrichnogo napruzheno-deformovanogo stanu skladenogo tila z dvoh plastin, z’єdnanih pid prjamim kutom za dopomogoju matric' tipu Grina / S.A. Levchuk // Novi materiali i tehnologiї v metalurgiї ta mashinobuduvanni. – 2010. – No. 2. – PP. 116-120.

5. Levchuk S.A. Modeljuvannja statichnogo deformuvannja skladenoї konstrukciї z dvoh plastin za dopomogoju matric' tipu Grina / S.A. Levchuk, L.O. Rak // Problemi obchisljuval'noї mehaniki i micnosti konstrukcij. – 2012. – Vol. 19. – PP. 212-219.

6. Samul' V.I. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti / V.I. Samul'. – M. : Vysshaja shkola, 1982. – 264 p.