УДК 514.747+510.64

С.О. БАРИШЕВСЬКИЙ[1], Л.Є. НИКИФОРОВА[1], О.Ґ. КАРАЄВ[2]
[1] Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького
[2] Таврійський державний агротехнологічний університет

АКСІОМАТИЧНІ ОСНОВИ ЕВКЛІДОВОЇ НЕЧІТКОЇ ПЛАНІМЕТРІЇ

У статті розглянуто застосування теорії нечітких множин і нечіткої логіки до аксіоматичної побудови евклідової нечіткої планіметрії.

Ключові слова: нечітка множина, нечітка точка, нечітка пряма, нечітка площина, нечітка група ізометрій.

S.O. BARYSHEVSKIJ[1], L.E. NIKIFOROVA[1], A.I. KARAEV[2]
[1] Melitopol State Pedagogical University named after Bogdan Khmelnitsky
[2] Tavria State Agrotechnological University

AXIOMATIC FOUNDATIONS OF EUCLIDEAN FUZZY PLANE GEOMETRY

Annotation

The axiomatic foundations of Euclidean fuzzy plane geometry: the axioms of fuzzy plane isometry groups are discussed in this article. The purpose of research is to examine the construction of the group axioms of Euclidean fuzzy plane geometry using apparatus theory of fuzzy sets and fuzzy logic.

Construction of a system of axioms of Euclidean fuzzy plane geometry performed in this work. First identified and listed the basic concepts, and then the axioms.

Fuzzy plane is considered a variety of fuzzy points. Among the subsets of this fuzzy set are highlighted subset, called fuzzy lines, fuzzy half-lines (rays) and fuzzy half-planes. Among the mappings of the fuzzy plane onto itself highlighted fuzzy display, called isometries. All further geometric concepts are defined through these basic.

In further studies, using examples in this work a system of axioms can select all Euclidean fuzzy plane geometry structures as algebraic and topological.

The application of axiomatic construction of Euclidean fuzzy plane geometry of fuzzy logic and theory of fuzzy set is discussed in this article.

Постановка проблеми. В нечіткій планіметрії є дві нечіткі множини:

1) нечіткий простір, який розглядається як нечітка множина нечітких точок, в якій визначені деякі нечіткі підмножини або нечіткі фігури (нечіткі прямі, нечіткі промені, нечіткі напівплощини…). Простір, за нашою думкою, може розглядатися як деяка точкова нечітка множина $\tilde{R}$ розмірністю два, а нечіткі геометричні фігури – як нечіткі підмножини множини $\tilde{R}$ [1-4]. Вибір нечітких підмножин утворюється невипадково, а відтворює наше уявлення про властивості оточуючого світу.

2) нечітка група перетворень, яка вводить в нечіткому просторі поняття нечіткої рівності і яка є джерелом геометричних властивостей нечітких фігур.

Ці дві основні нечіткі множини незалежні тільки до деякого степеня внутрішня властивість нечіткої групи визначає властивість нечіткого простору. В даній роботі ми будемо розглядати нечіткий простір розмірністю два, тобто нечітку площину. Проблема полягає в тому, що в наш час не існує загальновизнаної нечіткої геометрії, яка побудована на основі нечіткої логіки.

Аналіз останніх досліджень. В роботі [5] розглядаються основи нечіткої дискретної математики з залученням апарату нечіткої логіки [6]. В роботі [1] розглядаються нечіткі включення, нечітка рівність, нечітке відношення і його основні властивості в просторі нечітких множин. Результати, що були отримані в роботі [1], були використані для аксіоматичної побудови точкових нечітких множин дійсних чисел і їх відображень в алгебраїчних аспектах з залученням апарату нечіткої логіки [2]. Курс нечіткої планіметрії був би неповним, як би при цьому ми обмежились алгебраїчними аспектами, так як багато нечітких (чітких) геометричних структур відносяться до топології. От чому деякі факти у роботі [3] розглянуто з двох точок зору – з алгебраїчної і топологічної. Визначення точкових нечітких дійсних чисел розглянуто за допомогою нечітких b-раціональних наближень.

На основі результатів, які отримані у роботах [1-3], в роботі [4] розглянуто застосування до аксіоматичної побудови нечіткого простору евклідової нечіткої планіметрії нечіткої логіки і теорії нечітких множин.

Формулювання цілей статті. Пропонується розглядання побудову групи аксіом евклідової нечіткої планіметрії з залученням апарату теорії нечітких множин та нечіткої логіки.

Основна частина. Основні поняття теорії нечітких множин, елементів нечіткої логіки, нечітких співвідношень, нечітких відношень будемо розглядати як в [1-6].

Нечітку множину можна розглядати як об'єднання її складових – одноточкових нечітких множин (ОНМ), носії яких складаються з єдиної точки [1,2]. Нечіткі множини, елементами яких є нечіткі точки, представлені у виді ОНМ, носії яких складаються з єдиної точки чіткого евклідового простору R^+ розмірності 2, будемо називати *нечіткими точками*.

Потрібно відмітити, що нечітку точку можна представити у вигляді нечіткої висловлюваної змінної $\widetilde{X}$. Під *нечіткою висловлювальною змінною* $\widetilde{X}$, будемо розуміти розпливчасте висловлювання, степінь істинності якого може приймати довільне значення із інтервалу [0,1] [4-6].

Евклідова нечітка площина – така нечітка множина $\widetilde{P}$ елементів, які називаються *нечіткими точками* і в якому виділена система порожніх нечітких підмножин, які називаються *нечіткими прямими;* для будь-якої нечіткої прямої $\widetilde{D}$ і будь-якої нечіткої точки $\widetilde{o}$ цієї прямої задані дві нечіткі підмножини, які називаються *нечіткими протилежними променями* з початком $\widetilde{o}$; для нечітких підмножин $\widetilde{P}$, які називаються *нечіткими протилежними площинами* з границею $\widetilde{D}$.

Аксіоми, які ми будемо вводити поступово, не тільки постулюють властивості чіткої і нечіткої площини або деяких її фігур, але й "будують" таку площину [7]. Із самого початку ми допускаємо, що площина $\widetilde{P}$ має по меншій мірі дві нечіткі точки, не враховуючи, що насправді їх більше. Це мінімальне допущення завдяки аксіомі A_1 дозволяє стверджувати, що існує хоча б одна нечітка пряма. З аксіоми A_2 з необхідністю слідує існування хоча б трьох нечітких точок на будь-якій нечіткій прямій.

Із аксіоми порядку A_3 слідує, що на будь-якій нечіткій прямій є нескінченно багато нечітких точок. Однак, ці точки можуть виявитися "ізольованими", і на нечіткій прямій, таким чином, можуть виявитися прогалини, які можуть бути заповнені за допомогою нечітких *b*-раціональних наближень точкових множин дійсних чисел [3].

Нарешті, аксіома розбиття нечіткої площини A_4 вводить поняття нечіткої підмножини, яке дозволяє встановлювати, що поза будь-якою нечіткою прямою є нечіткі точки.

Окрім поняття простору, до основних понять геометрії відноситься "група перетворень" [7].

Підстановки довільної множини *E* утворюють групу [7]; отже, це ж справедливо і для довільної нечіткої множини $\widetilde{E}$, тобто і для евклідової нечіткої площини $\widetilde{P}$. Далі ми будемо розглядати лише одну нечітку підгрупу цієї нечіткої групи і в цьому окремому випадку нечіткі перетворення будемо називати нечіткими ізометріями.

Саме нечітка група ізометрій дозволяє нам ввести поняття "рівності нечітких фігур". Під словом "рівність" розуміється нечітке співпадання або нечітке відношення еквівалентності між різними нечіткими фігурами, яке чітко зв'язано з поняттям нечіткої групи ізометрій. Тому, ми говоримо "нечіткі фігури ізометричні" замість "нечіткі фігури рівні".

Аксіоми B_{1-5} характеризують властивості нечіткої групи ізометрій. Слідує відмітити аксіому B_3, яка вказує, що нечітка ізометрія повністю визначається вказівками "нечіткого флагу", на який нечітко відображається даний нечіткий флаг. При цьому нечіткий флаг – це нечітке об'єднання нечіткої точки $\widetilde{O}$, нечіткої півпрямої $o\widetilde{a}$ і нечіткої півплощини з нечіткою границею $o\widetilde{a}$.

Для вимірювання нечітких довжин вводиться аксіома Архімеда (аксіома *C*), яка дозволяє розв'язати проблему нечіткого вимірювання – побудова гомоморфізму нечіткої півгрупи довжини в нечітку півгрупу точкових нечітких дійсних чисел [1-3].

Із введенням аксіоми *D* про відсутність прогалин стає зрозуміло, що цей гомоморфізм є ізоморфізмом, і тепер нечітка площина стає точковою нечіткою множиною континуума.

Щоб отримати повну систему аксіом евклідової нечіткої планіметрії, залишається додати аксіому нечітких паралельних (аксіома *E*)

I. АКСІОМИ НЕЧІТКОГО ПРОСТОРУ

Аксіома нечіткої прямої A_1. Площина $\widetilde{P}$ містить, по меншій мірі, дві нечіткі точки. Для будь-яких двох різних нечітких точок існує єдина відносно носія нечітка пряма, яка їх містить.

Аксіома розбиття нечіткої прямої A_2. Протилежні нечіткі промені будь-якої прямої $\widetilde{D}$, які мають початком довільну точку $\widetilde{o}$ цієї прямої, непусті і утворюють розбиття множини $\widetilde{D}\setminus\{\widetilde{o}\}$.

Аксіома порядку A_3. Серед будь-яких трьох різних нечітких точок, які належать одній нечіткій прямій, існує одна і тільки одна відносно носія нечітка точка, яка лежить між двома іншими.

Аксіома розбиття нечіткої площини A_4. Для будь-якої прямої $\widetilde{D}$ протилежні нечіткі півплощини з границею $\widetilde{D}$ непусті й утворюють розбиття множини $\widetilde{P}\setminus\widetilde{D}$, при чому ці нечіткі напівплощини випуклі для будь-яких двох нечітких точок $\tilde{a}$ і $\tilde{b}$, які належать різним нечітким напівплощинам, існує нечітка точка прямої $\tilde{D}$, яка лежить між ними.

II. АКСІОМИ НЕЧІТКОЇ ГРУПИ

Аксіома існування групи B_1. Ізометрії нечіткої площини утворюють нечітку підгрупу нечіткої групи ізометрій нечітких підстановок нечіткої площини.

Аксіома збереження порядку B_2. Відношення "$\tilde{a}$ нечітко лежить між $\tilde{b}$ і $\tilde{c}$" зберігається при будь - якій ізометрії.

Аксіома про ізометрію, яка зв'язує два нечітких флаги B_3. Для будь - якої впорядкованої пари нечітких флагів існує єдина відносно носіїв нечітких флагів ізометрія, яка відображає перший нечіткий флаг на другий.

Аксіома про перестановку пари нечітких точок B_4. Для будь якої пари різних нечітких точок існує ізометрія, яка переставляє ці нечіткі точки.

Аксіома про перестановку пари нечітких променів зі спільним початком B_5. Для будь якої пари нечітких променів зі спільним початком існує ізометрія, яка їх переставляє.

Аксіома Архімеда С. Для будь яких ненульових нечітких довжин $\tilde{x}$ і $\tilde{y}$ ($\tilde{\exists}\ n \in N$) $n\tilde{x} > \tilde{y}$.

Аксіома про відсутність прогалин D. Всяка нескінченна послідовність вкладених нечітких інтервалів $\tilde{L}$, довжина яких прямує до нуля, має непустий нечіткий перетин.

Аксіома Евкліда Е. Через будь - яку точку нечіткої площини проходить єдина відносно носія нечітка пряма, нечітко паралельна даній нечіткій прямій.

Висновки та перспективи подальших досліджень. В статті розглянуто застосування до аксіоматичної побудови евклідової нечіткої планіметрії нечіткої логіки і теорії нечітких множин. В подальших дослідженнях за допомогою приведених в даній роботі дванадцяти аксіом можна виділити всі структури евклідової нечіткої планіметрії, як алгебраїчні так і топологічні: структуру впорядкованої нечіткої групи довжин і теорію вимірювання нечітких довжин; структуру нечіткого векторного простору; нечіткий скалярний добуток і метрику нечіткої площини; структуру нечіткого векторного нормованого простору (нечіткого простору Банаха); кутові структури нечіткої площини і теорію вимірювання нечітких кутів; нечіткі повороти і їх вимірювання.

Література

1. Баришевський С.О. Основи теорії точкових нечітких множин. / С.О.Баришевський // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип.4. – Т.52. – С.141-144.
2. Баришевський С.О. Точкові нечіткі множини та їх відображення. / С.О. Баришевський // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. –Вип.4. – Т.54. – С.3-8.
3. Баришевський С.О. Основи теорії точкових нечітких множин: алгебраїчні та топологічні аспекти**.** / *С.О.* Баришевський // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2013. –Вип.4. – Т.57. – С.22-27.
4. Берштейн Л.С. Нечеткие графы и гиперграфы. / Л.С. Берштейн, А.В. Боженюк. – М.: Научный мир, 2005. – 256 с.
5. Баришевський С.О. Аксіоматичні основи евклідової нечіткої планіметрії: аксіоми нечіткого простору/С.О. Баришевський// Сучасні проблеми моделювання: Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014.– Вип. 1. – С. 13-16
6. Новак В. Математические принципы нечеткой логики. Пер. с англ. / В. Новак, И.Перфильева, И. Мочкорж – Под ред. А.Н. Аверкина– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 352с.
7. Донеддю А. Эвклидова планиметрия. / А. Донеддю. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука", 1978. – 272с.