Раздел IV
АСПЕКТЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, МЕХАНИКИ.

УДК 523.44:004.41

К МЕТОДИКЕ РАСЧЁТА ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

Сергей Сергеевич Петришевский,
студент,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко.

Владимир Сергеевич Еремеев,
доктор технических наук, профессор,
Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого.

THE METHOD OF CALCULATING THE TRAJECTORIES OF CELESTIAL BODIES IN THE SOLAR SYSTEM

Sergey Sergeyevich Petrashevsky,
Student,
Kyiv national University of Taras Shevchenko.

Vladimir Sergeyevich Eremeev
Doctor of Science, Professor,
Melitopol State Pedagogical University named after B. Khmelnitskiy

АННОТАЦИЯ

Предложен метод определения траекторий планет и астероидов в Солнечной системе под действием сил гравитации. Математическая модель метода построена на основе законов Ньютона. Для выполнения вычислений разработана программа на алгоритмическом языке C#. Тестирование программы проводилось путём сравнения рассчитанных траекторий с известными литературными данными. Полученные результаты могут быть использованы при анализе движения малых небесных тел в Солнечной системе.

Ключевые слова: Гравитация, законы Ньютона, планеты, математическая модель, небесные тела, Солнечная система, траектория движения, численные методы, программирование.

SUMMARY

The method of determining the trajectories of planets and asteroids in the Solar scheme under the action of gravitational attraction. A mathematical model of the method based on the Newton's laws. To perform calculations, developed a program in the algorithmic language C#. The testing program was carried out by comparison of calculated trajectories with the known literary data. The obtained results can be used in the analysis of motion of small celestial bodies in the Solar system.

Keywords: Gravity, celestial bodies, mathematical model, Newton's Laws, numerical methods, planet, Solar system, trajectory, programming.

Планеты Солнечной системы в гелиоцентрической модели без учета взаимодействия тел друг с другом движутся в соответствие с известными законами Кеплера. Первый из них гласит, что каждая планета обращается вокруг Солнца по эллиптической орбите, в одном из фокусов которой находится Солнце. Согласно второму закону радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает одинаковые площади [5]. На наш взгляд нельзя абсолютизировать выполнение законов Кеплера. Об этом, в частности, свидетельствуют результаты анализа движения Солнечной системы относительно «реликтового» излучения со скоростью около 366 км/с [1]. Замечания в адрес гелиоцентрической модели высказывались неоднократно, причём одно из первых принадлежит её создателю Н. Копернику, который сказал: «То, что мы наблюдаем, не обязательно совпадает с тем, что происходит на самом деле!». Поэтому изучение вопроса о динамической структуре Солнечной системы остаётся актуальной задачей.

Аналитическое решение задачи о гравитационном взаимодействии небесных тел возможно только в случае двух тел [9], траектории движения которых рассчитаны Ньютоном. В своих исследованиях Ньютон развил законы Кеплера. Он показал, что при достижении критического значения, равного 7,9 км/с, называемого первой космической скоростью, вращение осуществляется по окружности. При повышении скорости до 11,2 км/сек. траектория движения становится параболической. Эта скорость всецело зависит от массы центрального тела и расстояния до него и называется второй космической скоростью. В работе [6] получены простые формулы для прогнозирования возможности столкновения планеты с малым небесным телом. Однако при переходе к системе из трёх и более объектов аналитическое решение невозможно [8]. Один из первых методов расчёта траекторий планет Солнечной системы принадлежит финскому астроному Сундману [7]. Вследствие крайне медленной сходимости рядов этот метод на практике оказался бесполезным. Настоящее исследование посвящено разработке численного метода, который оказался достаточно эффективным при моделировании динамических процессов в Солнечной системе [4].

Представим Солнечную систему в виде n небесных тел с известными начальными координатами $\vec{r}$ и скоростями $\vec{\vartheta}$ (здесь и далее силы, расстояния, скорости и ускорения задаются в векторном обозначении). Введём декартовую систему координат с началом в центре масс. Между двумя телами с индексами k и p существует гравитационное взаимодействие, сила которого в соответствие с законом Ньютона определяется формулой

$$\vec{F}_{kp} = G\frac{m_k m_p \vec{r}_{kp}}{R_{kp}^{3}}, \qquad (1)$$

где k и p – индексы тел, R_{kp} – расстояние между телами, $\vec{r}_{kp}$ - радиус-вектор, направленный от тела с индексом p к телу с индексом k.

По закону Ньютона сила, которая действует со стороны тела с индексом p на тело с индексом k, вызывает ускорение тела с индексом k в соответствие с формулой

$$\vec{F}_k = m_k \vec{a}_{kp}, \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) следует, что ускорение тела с индексом k под действием силы тяготения со стороны тела с индексом p равнов:

$$\vec{a}_{kp} = G\frac{m_p \vec{r}_{kp}}{R_{kp}^{3}} \qquad (3)$$

Сумма ускорений, которое приобретает тело k при взаимодействии со всеми остальными телами, равна:

$$\vec{a}_k = \sum_{p=0}^{n} \vec{a}_{kp} \qquad (4)$$

Координата тела с индексом k за время Δt изменяется от величины $\vec{r}_{k0}$ до значения:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_{k0} + \vec{\vartheta}_{k0}\Delta t + \frac{\vec{a}_k \Delta t^2}{2}, \qquad (5)$$

а скорость от величины $\vec{\vartheta}_{k0}$ до значения:

$$\vec{\vartheta}_k = \vec{\vartheta}_{k0} + \vec{a}_k \Delta t \qquad (6)$$

Проекции ускорений на оси координат равны:

$$a_{x_{kp}} = G\frac{m_p(x_p - x_k)}{R_{kp}^{3}}, \qquad (7)$$

$$a_{y_{kp}} = G\frac{m_p(y_p - y_k)}{R_{kp}^{3}}, \qquad (8)$$

$$a_{z_{kp}} = G\frac{m_p(z_p - z_k)}{R_{kp}^{3}}, \qquad (9)$$

где x_p, x_k, y_p, y_k, z_k, z_p – проекции координат тел по осям X, Y, Z.

Сумма ускорений a_{xk}, a_{yk}, a_{zk}, которые приобретает тело с индексом k, изменение его координат x_k, y_k, z_k, и скорости $\square_{xk}$, $\square_{yk}$, $\square_{zk}$ находятся для каждой оси отдельно:

$$a_{xk} = \sum_{p=1}^{n} a_{xkp}, a_{yk} = \sum_{p=1}^{n} a_{ykp}, a_{zk} = \sum_{p=1}^{n} a_{zkp}, \qquad (10)$$

$$r_{xk} = r_{xk_0} + \vartheta_{k_0}\Delta t + \frac{a_{xk}\Delta t^2}{2}, \qquad (11)$$

$$r_{yk} = r_{yk_0} + \vartheta_{k_0}\Delta t + \frac{a_{yk}\Delta t^2}{2}, \qquad (12)$$

$$r_{zk} = r_{zk_0} + \vartheta_{k_0}\Delta t + \frac{a_{zk}\Delta t^2}{2}, \qquad (13)$$

$$\vartheta_{xk} = \vartheta_{x0} + a_{xk}\Delta t \qquad (14)$$

$$\vartheta_{yk} = \vartheta_{y0} + a_{yk}\Delta t \qquad (15)$$

$$\vartheta_{zk} = \vartheta_{z0} + a_{zk}\Delta t \qquad (16)$$

Для проведения расчёта траекторий движения составлена программа на алгоритмическом языке C# [3]. Фрагмент кода программы представлен на рисунке 1.

```
private void count_Click(object sender, EventArgs e) //функція, в якій йдуть розрахунки за один шаг dt
{   line();
    //подвійний цикл, в якому йде розрахунок прискорень, з якими тіла взаємодіють одне з одним
    for (int i = 0; i < n; i++)     //цикл, змінна i якого задає номер тіла, на яке діють
    {   axm[i] = 0; aym[i] = 0;
        for (int j = 0; j < n; j++) //цикл, змінна j  якого задає номер тіла, яке діє на тело i
        {
            if (i == j) goto m1; //перехід, що не допускає розрахунок дії тіла на саме себе
            r = Math.Sqrt(Math.Pow(rx[j] - rx[i], 2) + Math.Pow(ry[j] - ry[i], 2));
            ax[i, j] = (g * m[j] * (rx[j] - rx[i])) / Math.Pow(r, 3);
            ay[i, j] = (g * m[j] * (ry[j] - ry[i])) / Math.Pow(r, 3);
            axm[i] += ax[i, j]; //знаходження сумм прискорень, що діють
            aym[i] += ay[i, j]; //на тіло i по двух осях координат
        m1: ;
        }
    }
```

Рисунок 1. Фрагмент кода программы.

Инициирование выполнения программы осуществляется нажатием кнопки «Отсчет». При запуске программы предусматривается возможность введения в текстовые формы исходных данных для значения массы, проекции координат тел, проекции скоростей движения каждого из n небесных тел в начальный момент времени, значения шага по времени Δt и числа шагов по времени t.

Процедура программы, которая запускается кнопкой «Отсчет», рассчитывает изменение координат тела за время Δt. На первом шаге по формулам (7)-(10) вычисляются проекции ускорения каждого из тел на промежутке времени Δt. Далее по формулам (14)-(16) определяются суммы проекции скоростей всех тел к концу промежутка времени Δt, после чего по формулам (11)-(13) вычисляются новые проекции координат тел. Полученные таким образом величины скорости и координат принимаются за исходные значения для расчета соответствующих координат тел на следующем шаге Δt.

При нажатии кнопки «Расчет» происходит выполнение процедуры расчеты изменения координат за время Δt столько раз, сколько определено введенным параметром количества шагов. Результаты вычислений могут быть представлены в виде чисел или графически.

Тестирование программы проводилось на двух примерах гравитационного взаимодействия четырех тел, для которых известно точное решение.

Пример 1. Пусть четыре небесных тела с массами m_1, m_2, m_3 расположены в одной плоскости. Одно из них (центральное) обладает массой на несколько порядков больше трех других $M \gg m_i$ ($i=1,2,3$) и имеет нулевую начальную скорость. Начальные скорости трех тел с малыми массами положим равными первой космической скорости относительно более массивного тела с направлениями перпендикулярно векторам, соединяющим центр массивного тела с центрами малых тел. Решение подобной задачи известно – все три тела с малыми массами обращаются по круговым орбитам относительно центрального тела. Результаты расчёта траектории с помощью программы представлены на рисунке 2. Сопоставление рассчитанных траекторий с известными данными указывает на достоверность результатов, полученных с помощью программы.

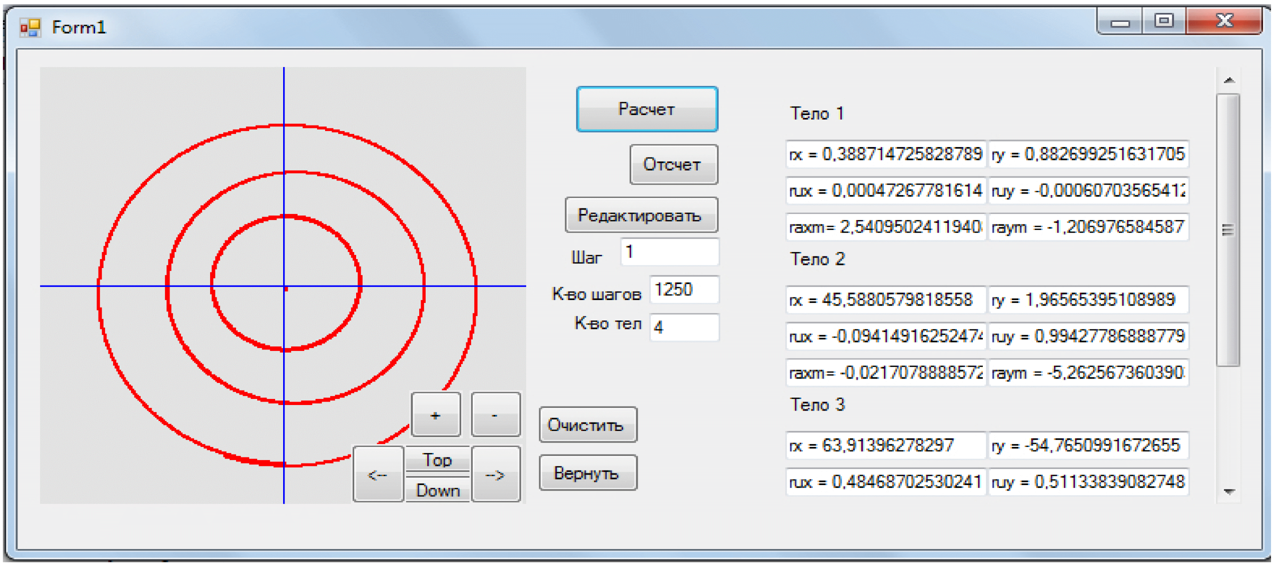

Рисунок. 2. Круговые траектории движения трех тел относительно более массивного тела.

Пример 2. Рассмотрим гравитационное взаимодействие четырёх тел с одинаковыми массами. Пусть начальные координаты тел расположены в углах квадрата. Положим, что начальные скорости этих тел относительно центра масс больше вторых космических скоростей, а направления движения перпендикулярны отрезкам, соединяющим тела с центром масс системы. В этом случае обеспечивается условие преодоления гравитационных сил притяжения к центру масс и тела разбегаются в разные стороны. Результаты расчёта с использованием программы, представленные на рисунке 3, хорошо согласуются с известными теоретическими данными.

Математическая модель, реализованная в нашей программе, не требует жёстких ограничений. Она достаточно прозрачна, поскольку основана на хорошо апробированных законах Ньютона, выполняющихся для случая гравитационного взаимодействия небесных тел Солнечной системы при скоростях движения, намного меньших скорости света. Программа позволяет исследовать различные динамические процессы в Солнечной системе. Пределы возможности её использования определяются компьютерными ресурсами. Проведённое тестирование показывает, что расчёты на ЭВМ, обеспечивающих скорость вычислений на уровне 10^7 операций в секунду, позволяют получать достаточно хорошие результаты при анализе гравитационного взаимодействия системы из 2-8 тел для относительно небольших времён. В заключение рассмотрим проблемный вопрос о столкновении астероида с Землёй.

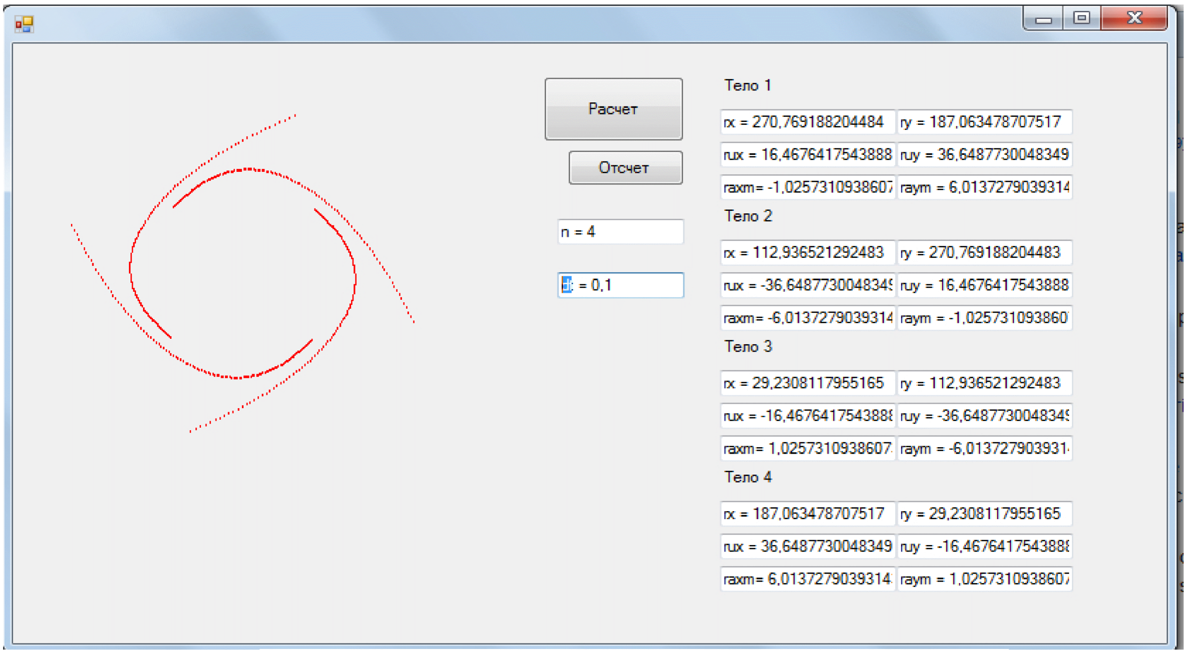

Рис. 3. Пример расчета траекторий четырех тел с одинаковыми массами.

Аналитическое решение задачи возможно только в том случае, когда траектория движения астероида определяется, главным образом, гравитационным воздействием со стороны Земли [2]. Этот случай рассмотрен в работе [6], где найдено, что при выполнении условия

$$\frac{GM}{r_0^2 v_0^2 \sin^2\beta} + \frac{ctg\beta}{r_0}\sqrt{1+\left(\left(1-\frac{GM}{r_0 v_0^2 \sin^2\beta}\right)tg\beta\right)^2} < \frac{1}{R} \quad (17)$$

астероид пролетит мимо Земли.

Формула (17) содержит следующие обозначения: M– масса Земли, R – радиус Земли, r_0 – расстояние между телом и Землей, v_0 – скорость астероида, β - начальный угол в радианах между вектором скорости и отрезком, соединяющим астероид с Землей.

При рассмотрении случая, когда траектория движения астериода в Солнечной системе зависит от n тел, условие его столкновения с Землёй определяется формулой:

$$\vec{r}_1 + R_1\vec{i} = \vec{r}_2 + R_2(-\vec{i}\,) \quad (18)$$

где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – координати тел, R_1 и R_2 – радиусы этих тел, $\vec{i}$ – одиничний вектор, направленный от первого тела ко второму.

Полуаналитическое решение задачи о столкновении небесных тел для n=3 (например, случай падения астероид на Землю с учётом влияния Луны или Солнца, может быть найдено с использованием теории, изложенной в работах [2], [7]. При переходе к системе из 4 и более тел необходимо обратиться к численным методам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Амплеев И.А. Современный взгляд на движение планет солнечной системы. Гелиодинамическая система. [Электронный ресурс]. http://meganauka.com/ analizgipotezy/716-sovremennyy-vzglyad-na-dvizhenie-planet-solnechnoy-sistemy-geliodinamicheskaya-sistema.html. (дата обращения: 05.09.2016).
2. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейшдадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механiки. М.: Изд «Едиториал УРСС». 2016. 416 с.
3. Бишоп Д., Хорспул Н. C# в кратком изложении. М.: Изд. "БИНОМ. Лаборатория знаний".2005. 472 с.
4. Бутиков Е.И. Новые программные и методические материалы для учебной лаборатории компьютерного моделирования по физике. [Электронный ресурс]. http://migha.ru/novie-programmnie-i-metodicheskie-materiali-dlya-uchebnoj.html. (дата обращения: 05.09.2016).
5. Воронцов – Вельяминов Б. А. Астрономия. Учебник для 11 класса. 18-е изд. – М.: Изд. «Просвещение». 1989. 159 с.
6. Петрищевськiй С. С. Гравiтацiйна взаємодiя Землi з космiчними об'єктами / Новi вимiри сучасного свiту // Мелiтопольський державний педагогiчний унiверситет iм. Б. Хмельницького.Мелiтополь: Видавництво МДПУ iм. Б.Хмельницького, 2013. с. 177-179с.
7. Пуанкаре А. Лекции по небесной механике. М.: Изд. «Наука».1965. 572 с.
8. Суханов А.А. Астродинамика. М: Изд. Института космических. исследований РАН. 2010. 203 с.
9. Титов В.Б., Холшевников К.В. Задача двух тел. Санкт – Петербург: Изд. Санкт-петербургского государственного университета. 2007. 180с.