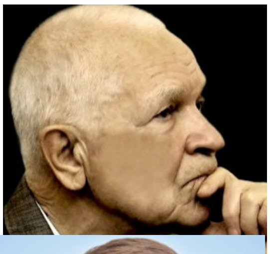
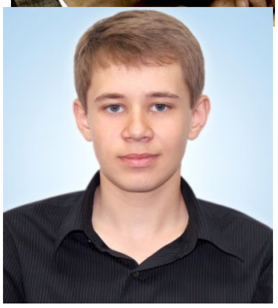
Раздел III

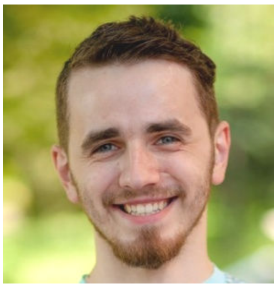
ИННОВАЦИИ В СФЕРЕ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ ФИЗИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

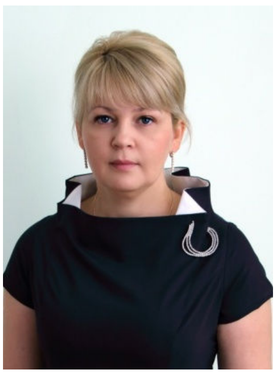
УДК 519.24(075.8)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИНОМА ЛАГРАНЖА









Еремеев Владимир Сергеевич,
профессор, доктор технических наук,

Карпов Владислав Эдуардович,
бакалавр,

Рыженко Антон Андреевич,
бакалавр,

Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого, г. Мелитополь

Жарков Антон Викторович,
инженер,

Таврический государственный агротехнологический университет, г. Мелитополь

Гулынина Елена Владимировна
кандидат физико-математических наук, доцент

Северо-кавказский филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования “Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова” г. Минеральные Воды

MATHEMATICAL PROCESSING OF EXPERIMENTAL DATA USING THE LAGRANGE POLYNOMIAL

Eremeev Vladimir Sergeevich,
Professor, doctor of technical Sciences,

Karpov Vladislav Eduardovich,
bachelor,

Ryzhenko Anton Andreevich
bachelor,

Melitopol state pedagogical University named after Bohdan Khmelnytsky, Melitopol

Zharkov Anton Vicktorovich,
engineer,

Tavria state agrotechnological University, Melitopol

Gulynina Elena Vladimirovna
candidate of physico-mathematical Sciences, associate Professor

The North Caucasus branch of Federal state budgetary educational institution of higher education “Belgorod state technological University named after. V. G. Shukhov” Mineralnye Vody

АННОТАЦИЯ

Предложен метод математической обработки многофакторного эксперимента с использованием одномерного полинома Лагранжа. На алгоритмическом языке С++ разработаны программы Lagrange1(x) и Lagrange2(x,y), позволяющие найти зависимость выходной величины, соответственно, от одного и двух факторов. Предложен алгоритм проведения вычислений в случае трёх и более факторов, который основан на применении программ Lagrange1(x) и Lagrange2(x,y). В качестве примера проведена математическая обработка экспериментальных данных по исследованию магнитного потока в зазоре магнитного преобразователя энергии ветра в тепло.

Ключевые слова: алгоритмический язык; обработка эксперимента; полином Лагранжа; программный продукт; функция регрессии; эксперимент.

ABSTRACT

The method of mathematical processing of multi-factorial experiment using one-dimensional Lagrange polynomial. In algorithmic language, designed with program Lagrange1(x) and Lagrange2(x,y) in order to find the dependence of the output value, respectively, from one and two factors. The algorithm of carrying out of calculations in the case of 3 and more factors that is based on the use of the software Lagrange1(x) and Lagrange2(x,y). As an example, mathematical processing of experimental data on research of the magnetic flux in the magnetic gap of the wind energy Converter into heat.

Keywords: algorithmic language; treatment of experimental; Lagrange polynomial; software product; function regression; experiment.

Актуальность. Математические методы применяются для обработки экспериментальных данных в различных областях науки, техники и экономики. На сегодня имеется большое количество учебников и монографий, в которых изложены методы и принципы использования математики при изучении различных процессов и объектов [1], [2], [3]. Во многих исследованиях изучают влияние одного или нескольких факторов на некоторую величину [4], [5]. Полученные данные заносят в таблицу, которая в простейшем случае при изучении влияния фактора “x” на выходную величину “y” имеет вид табл.1.

Таблица 1.

Форма представления экспериментальных данных для математической обработки

Фактор x	x_0	x_1	x_2	…..	x_n
Выходная величина y	y_0	y_1	y_2	……	y_n

Под математической обработкой понимают представление экспериментальных данных с использованием математико-статистических методов и проведение последующего анализа полученных результатов [5].

Данные табл. 1 используются при нахождении зависимости f(x) с помощью полиномов или сплайнов [4]. Этот метод часто применяется для обработки однофакторных экспериментов [5]. Аналитическое решение подобной задачи при достаточно большом объёме данных практически невозможно, что предопределяет необходимость создания программ с использованием алгоритмических языков или обращения к специальным программным оболочкам типа Matlab. В настоящем исследовании рассматривается возможность создания на алгоритмических языках программного продукта, обеспечивающего проведение численного анализа многофакторного эксперимента с использованием одномерного полинома Лагранжа.

Постановка задачи. Пусть результаты изучения влияния одного фактора на другой, скажем влияния температуры на скорость реакции, представлены в виде табл.1. В более сложной ситуации изучается влияние нескольких факторов, например температуры, давления и концентрации вещества, на выходную величину. В первом случае уравнение регрессии, определяющее зависимость скорости реакции от температуры, может быть найдено в виде одномерного многочлена или сплайнов. Во втором случае эти методы, насколько нам известно, отсутствуют. Разработка соответствующих методик имеет практический интерес. Цель настоящей статьи состоит в разработке способа применения одномерного полинома Лагранжа при создании программных средств с использованием алгоритмических языков для построения уравнения регрессии в случае многофакторного эксперимента.

Основная часть

1. ***Однофакторный эксперимент.*** Пусть результаты исследования влияния некоторого фактора x на выходную величину y представлены в виде табл.1. Уравнение регрессии, определяющее зависимость y от x, может быть получено в виде многочлена n–й степени, к которым предъявляются одно из двух требований:

- многочлен должен точно проходить через точки с координатами (x_0, y_0), (x_1, y_1),…(x_n, y_n),
- многочлен сглаживает выбросы отдельных точек и должен наиболее близко проходить в окрестности точек (x_0, y_0), (x_1, y_1),…(x_n, y_n),

Второй случай относится к задачам аппроксимации. Он применяется при относительно больших экспериментальных погрешностях. Уравнение регрессии f(x) ищут в виде комбинации элементарных функций с неизвестными параметрами a_0, a_1, a_2,…a_m или в виде многочлена m-й степени:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m \qquad (1)$$

В качестве критерия “близости” может служить сумма квадратов отклонений экспериментальных величин y_i от значений, рассчитанных с помощью уравнения регрессии:

$$S = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a_0, a_1, a_2, \ldots a_m)]^2, \qquad (2)$$

В первом случае, когда экспериментальные исследования проводятся с достаточно высокой точностью, уравнение регрессии ищут в виде многочлена (1), полиномов, сплайнов и т.д. Рассмотрим возможность представления уравнения регрессии с помощью полинома Лагранжа. Потребуем, чтобы координаты узлов полинома были заданы парами значений из табл. 1. Полином Лагранжа имеет вид [2]:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \qquad (3)$$

или

$$P_n(x) = f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_0-x_n)} + f(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_1-x_n)} + \ldots + f(x_n) \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_n-x_{n-1})}$$

Вычисления по формуле Лагранжа (3) при фиксированных узлах интерполяции легко программировать. Для исследования точности интерполяции полиномом Лагранжа нами создана программа Lagrange1(x) на алгоритмическом языке C++. Тестирование программы проводилось для экспоненциальной функции e^x. В табл. 2 приведены результаты тестирования на отрезке [0, 1.667] для полинома пятой степени.

Таблица 2.

Результаты тестирования программы Lagrange1(x) полиномом Лагранжа пятой степени для экспоненциальной функции e^x.

X	0.000	0.333	0.667	1.000	1.333	1.667
e^x	1.000000	1.395612	1.947734	2.718282	3.793668	5.294490
$P_5(x)$	1.000000	1.395679	1.947676	2.718338	3.793604	5.294571

Из табл. 2 видно, что неточность вычислений составляет 10^{-5}. С повышением степени полинома до 10-30 относительная ошибка снижается до 10^{-17}.

2. ***Многофакторный эксперимент.*** Полином Лагранжа в случае интерполирования функции двух переменных f(x,y) имеет вид [1]:

3.

$$L(x) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} f_{nm} l_{nm}(x,y)$$

$$l_{nm}(n,m) = 1 \qquad (4)$$

$$l_{nm}(x,y) = 0 \text{ при } x \neq n \ V \ y \neq m$$

Базисные полиномы определяются формулой:

$$l_{nm}(x,y) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{N} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{M} \frac{(x-x_i)(y-y_j)}{(x_n-x_j)(y_m-y_j)}$$

Максимальная степень полинома L(x,y) не больше n×m. По определению $L(x_n,y_m)=f(x_n,y_m)$. Предполагается, что значение функции $f(x_n,y_m)$ в узловых точках x_n, y_m известно. Индексирование координат x_n, y_m, где индексы изменяются в интервалах $0 \le m \le M, 0 \le n \le N$, представлено в табл. 2.

Таблица 2.

Индексирование координат узловых точек в полиноме Лагранжа (4) с двумя переменными.

Левый индекс относится к фактору x, правый - к фактору y				
0, 0	0, 1	0, 2	……..	0, N
1, 0	1, 1	1, 2	……..	1, N
2, 0	2, 1	2, 2	……..	2, N
……..	……..	……..	……..	……..
M, 0	M, 1	M, 2	……..	M, N

Создание программы для построения полинома (3) не представляет особого труда. Однако вопрос о построении полинома, относящегося к числу факторов, большему чем 2, остаётся открытым. Сформулируем решение этой задачи следующим образом: разработать программу, которая с использованием полинома Лагранжа с одной переменной (3) позволяет рассчитать значение функции нескольких переменных в произвольной точке факторного пространства. Предлагаемый метод реализован в виде программ Lagrange1(x), Lagrange2(x,y) на языке C++.

Программа Lagrange1(x) позволяет выполнять расчёты значений одномерной функции по формуле (3). Тестирование Lagrange1(x) обсуждалось в разделе “1.Однофакторный эксперимент” настоящей работы.

Программа Lagrange2(x,y) предназначена для вычисления значения двухмерной функции f(x,y) в произвольной точке факторного пространства (x_u,y_u). Алгоритм расчёта состоит в следующем. Пусть заданные точки лежат в интервалах $x_m \le x_u \le x_{m+1}, y_n \le y_u \le y_{n+1}$. Вызываем программу Lagrange1(x) для построения M одномерных полиномов Лагранжа $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$,… $L_M(x)$. Первый из них $L_0(x)$ найден при фиксированном значении y_0, второй $L_1(x)$ – при фиксированном значении y_1, и т.д., последний $L_M(x)$ – при фиксированном y_M. Рассчитываем значения полиномов $L_i(x)$, $0 \le i \le M$, в точке $x=x_u$. Строим одномерный полином $L(y)$ по узловым точкам y_0, y_1, y_2,… y_M, где функция $f(x_u,y)$ равна, соответственно, $L_0(x_u)$, $L_1(x_u)$, $L_2(x_u)$,… $L_M(x_u)$. При построении $L(y)$ используем программу Lagrange1(x). Далее рассчитываем значение $L(y)$ в точке y_u. Полученная величина является искомым значением функции $f(x_u,y_u)$.

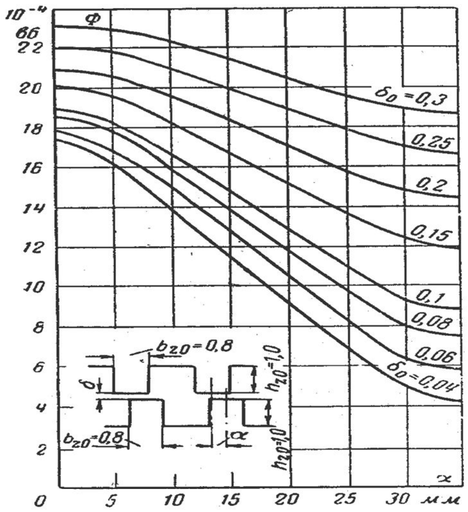


Рисунок 1. Поток Ф в зависимости от зазора x и перемещения зубцов y.

Алгоритм обработки эксперимента с большим числом факторов выглядит следующим образом. Пусть требуется вычислять значения $f(x,y,z)$ в произвольной точке факторного пространства, координаты которой (x_u,y_u,z_u) лежат в интервалах $x_m \le x_u \le x_{m+1}, y_n \le y_u \le y_{n+1}, z_k \le z_u \le y_{k+1}$. Считаем, что значение k находится в интервале $0 \le k \le K$, а функция $f(x,y,z)$ задана во всех узловых точках. Вызываем программу Lagrange2(x,y). Строим с её помощью K+1 поверхностей для фиксированных значений z_0, z_1, z_2,…z_K. Далее с использованием программы Lagrange1(z) создаём одномерный полином $L(z)$ и рассчитываем его значение в точке z_u. Полученная величина является искомым значением функции $f(x_u,y_u,z_u)$.

Аналогичным образом создаются программы с большим числом переменных.

4. ***Пример обработки результатов эксперимента.*** На рис.1 приведены экспериментально найденные зависимости магнитного потока Ф в зазоре магнитного преобразователя энергии ветра в тепло от перемещения зубцов x и величины зазора y [6]. Построим функцию зависимости $f(x,y)$ с использованием программы Lagrange2(x,y). В качестве узловых точек принимаем значения перемещений с шагом, равным 5 мм: $x_0=0$, $x_1=5$, $x_2=10$, ... $x_7=30$ и величины зазоров $y_0=0{,}04$, $y_1=0{,}06$, $y_2=0{,}08$, $y_3=0{,}1$, $y_4=0{,}15$, $y_5=0{,}2$, $y_6=0{,}25$, $y_7=0{,}3$. Значения функции в узловых точках (x_m,x_n) берём из рис.1. Результаты расчётов приведены в табл.3.

Таблица 3.

Вычисленные зависимости магнитного потока Ф от перемещения зубцов якоря и зазора с использованием функции Lagrange2(x,y).

	Перемещение, X							
Зазор, Z	0	5	10	15	20	25	30	35
0.3000	23.2000	23.0000	22.5000	21.5000	20.5000	19.6000	19.0000	18.8000
0.2500	22.0000	21.7000	21.0000	20.0000	19.0000	17.9000	17.1000	16.8000
0.2000	20.9000	20.6000	19.5000	18.5000	17.1000	15.8000	14.9000	14.5000
0.1500	20.1000	19.5000	18.2000	16.9000	15.3000	13.7000	12.5000	11.9000
0.1000	19.0000	18.3000	16.7000	14.9000	13.0000	11.0000	9.3000	9.0000
0.0800	18.6000	17.8000	15.8000	13.8000	11.8000	9.7000	8.0000	7.6000
0.0600	17.8000	16.9000	15.0000	12.9000	10.5000	8.3000	6.4000	5.8000
0.0400	17.4000	16.2000	13.8000	11.5000	9.1000	6.9000	5.1000	4.3000

Результаты анализа расчётных данных позволяют провести анализ влияние зазора и перемещения на магнитный поток и выбрать оптимальную конструкцию магнитопровода.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Предложен способ построения многомерной поверхности с применением полинома Лагранжа от одной переменной. На языке С разработаны программы Lagrange1(x) и Lagrange2(x,y), которые позволяют рассчитать значение функции одной и двух переменных в произвольной точке многофакторного пространства. Программа Lagrange1(x) реализует вычисления в случае одной переменной по формуле (3). Программа Lagrange2(x,y) предназначена для расчёта значения функции двух переменных $f(x,y)$. В качестве примера проведена математическая обработка экспериментов [6, 7], где исследовалась зависимость магнитного потока от перемещения зубцов якоря и величины зазора в магнитном преобразователе энергии ветра. Полученные данные могут использоваться при построении поверхностей отклика в многофакторных экспериментах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. -М.: Наука, 1989. - 432 с.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы/ Н. С. Бахвалов, Н. П.Жидков, Г. М. Кобельков. — М.: Бином, 2001. — С. 363—375.
3. Дьяконов В. П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство / В. П. Дьяконов.— Москва: «ДМК Пресс», 2009. — 624 с.
4. Еремеев В. С. Сравнительный анализ неточности в задачах прикладной геометрии при использовании полиномов Лагранжа и сплайнов/ В. С. Еремеев, И. М. Юрив// Материалы международной научно-практической конференции. (28.10.2013, г. Мин. воды). «Научные итоги: достижения, проекты, гипотезы». Изд. Северо-Кавказского филиала Белгородского гос. Технол. универс. им. В.Г.Шухова.-2014.- №18.- С.142-146.
5. Єремєєв В. С., Ракович Г. М. Теорія планування та обробки експерименту/ В. С. Єремєєв , Г. М. Ракович// Навчальний посібник.- Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2012.-92с.
6. Жарков В.Я. Аналіз динамічних навантажень індукційних вітротеплових установок/ В.Я Жарков., А.В. Жарков // Вісник ХНТУСГ.- Вип. 37 "Проблеми енергозабезпечення та енергозбереження в АПК України".-т.2. –Харків: ХНТУСГ.– 2005.-С.79-83.
7.Eremeev V.S., Kurbatov V.L., Gulynina E.V. Determination of unknown parameters of mathematical model using the experimental design. Journal of Theoretical and Applied Information Technology 31st August 2015. Vol.78. No.3 © 2005 - 2015 JATIT & LLS. All rights reserved.(JTAIT(JATIT)-LLS - Journal of Theoretical and Applied Information Technology (ISSN19928645-Pakistan-Scopus), 00, 357480). pp.464-472.