МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МЕЛІТОПОЛЬСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ БОГДАНА ХМЕЛЬНИЦЬКОГО
МЕЛІТОПОЛЬСЬКА ШКОЛА ПРИКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

В.М. Верещага, О.М. Павленко, А.В. Найдиш

МОДЕЛЮВАННЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЗЕМЕЛЬНОГО МАЙДАНЧИКА У ТОЧКОВОМУ ЧИСЛЕННІ

Монографія

Мелітополь 2019

УДК 514.182 - 027.22:528.48
В 31

Рекомендовано до друку рішенням Вченої ради Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького Міністерства освіти і науки України (протокол № 11 від 26.02.2019 р.)

Рецензенти:

Єремєєв В. С. – доктор технічних наук, Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (м. Мелітополь);

Адоньєв Є. О. – доктор технічних наук, Запорізький національний університет (м. Запоріжжя);

Караєв О. Г. – доктор технічних наук, Таврійський державний агротехнологічний університет (м. Мелітополь).

Верещага, В. М.

Геометричне моделювання горизонтальних земельних ділянок з використанням методів точкового БН-числення: монографія / В.М. Верещага, О.М. Павленко, А.В. Найдиш. — Мелітополь: МДПУ імені Богдана Хмельницького, 2019. — 187 с.

ISBN 978-966-641-....

У монографії розглядаються розробки нових геометричних рішень, які здатні використовувати множини точок, отриманих після наземного лазерного сканування з метою розв'язання задачі щодо знаходження проектної відмітки та лінії нульових робіт в облаштуванні земельного майданчика. При цьому, розв'язок означеної задачі мусить бути зорієнтованим для реалізації з використанням інформаційних технологій.

Використання отриманих результатів у наукових дослідженнях доцільно у дослідженнях з використанням методів дискретної інтерполяції для моделювання дискретно представлених кривих та поверхонь. Отримані результати орієнтовані на застосування у відповідних інформаційних системах проектування.

Практична цінність монографії полягає у підвищенні ефективності проектування і виконання робіт з облаштування горизонтальних майданчиків, сприяє поліпшенню якісних показників та зменшенню видатків як у проектуванні, так і облаштуванні господарських майданчиків.

УДК 514.182 - 027.22:528.48
В 31

ISBN 978-966-641-....

© В. Верещага, О. Павленко, А. Найдиш, 2019

ЗМІСТ

		Стор.
Перелік умовних позначень		7
ВСТУП		8
РОЗДІЛ 1		
АНАЛІЗ НАУКОВИХ ДЖЕРЕЛ ЩОДО ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ РЕЛЬЄФУ		13
1.1	Сучасний стан геометричного моделювання процесів та форм у прикладній геометрії	13
1.2	Огляд існуючих методів геометричного моделювання рельєфу земельних ділянок	17
1.3	Аналіз джерел щодо електронних методів знімання топографічної поверхні	20
1.4	Методи вертикального планування поверхні горизонтальних земельних ділянок	23
1.5	Дослідження та аналіз методів інтерполяції та апроксимації плоских кривих	26
	1.5.1 Неперервні методи	27
	1.5.2 Дискретні методи	30
1.6	Визначення місця точкового БН-числення у моделюванні кривих	31
1.7	Проблеми геометричного моделювання горизонтальної земельної ділянки з оптимізацією земляних робіт. Визначення мети та обґрунтування задач дослідження	35
Висновки до розділу 1		36

РОЗДІЛ 2
МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ДИСКРЕТНИХ ТА НЕПЕРЕРВНИХ КРИВИХ, ОТРИМАНИХ З ВИКОРИСТАННЯМ СПОСОБІВ ТОЧКОВОГО БН-ЧИСЛЕННЯ 38

2.1 Точкове рівняння дуги параболічної кривої другого степеню 38

2.2 Визначення дуги кривої третього степеню 42

2.3 Згущення дискретно поданої кривої із застосуванням супровідних трикутників 50

2.4 Дослідження точності згущення плоскої кривої 57

2.5 Геометричне подання властивостей метричного оператора трьох точок прямої 61

2.6 Визначення точки дотику прямої та кривої із застосуванням метричних операторів 63

Висновки до розділу 2 67

РОЗДІЛ 3
СТВОРЕННЯ ФОРМАЛІЗОВАНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ ТОПОГРАФІЧНОЇ ПОВЕРХНІ 69

3.1 Створення цифрової моделі рельєфу за результатами наземного лазерного сканування 69

3.1.1 Підготовка вихідної хмари точок, видалення шумової складової 69

3.1.2 Підготовка вихідної хмари точок, видалення надлишкової інформації 70

3.2 Побудова сегменту параболічної поверхні Балюби 74

3.3 Спосіб розростання чарунок 79

3.4 Застосування способу розростання чарунок для реконструкції дискретно поданих поверхонь (ДПП) 87

3.5 Геометричне моделювання горизонталей для відтворення рельєфу земельної ділянки за результатами наземного лазерного сканування 101
3.5.1 Огляд деяких досліджень щодо моделювання горизонталей 101
3.6 Розрахунковий алгоритм згущення дискретно поданої горизонталі з використанням її супровідних трикутників та супровідної ламаної лінії 111
Висновки до розділу 3 115

РОЗДІЛ 4
МОДЕЛЮВАННЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОЇ ЗЕМЕЛЬНОЇ ДІЛЯНКИ 118
4.1 Про умови щодо меж земельної ділянки 118
4.2 Визначення площі сегменту, обмеженого дугою кривої, яка задана точковим рівнянням 125
4.3 Геометричний алгоритм визначення точки дотику прямої до плоскої кривої, які знаходяться в одній площині 130
4.4 Визначення площі, обмеженої дискретно поданою горизонталлю топографічної поверхні 136
4.4.1 Визначення площі, що обмежена замкненою дискретно поданою горизонталлю топографічної поверхні 137
4.4.2 Визначення площі геометричної фігури, яка обмежена незамкненою дискретно поданою горизонталлю топографічної поверхні 140
4.4.3 Алгоритм розрахунку площі трикутника у точковому БН-численні 143
4.5 Обчислення об’єму елементів рельєфу земельної ділянки промислового майданчика 145

4.6 Розрахунок положення проектної відмітки та лінії нульових робіт 148
Висновки до розділу 4 155

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ 158
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 161

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

БН-числення – Точкове числення Балюби-Найдиша (точкове БН-числення).

ВДГМ – Варіативне дискретне геометричне моделювання.

ГІС – Геоінформаційна система.

ГМ – Геометрична модель.

ДВК – Дискретно визначена крива.

ДВП – Дискретно визначена поверхня.

ДГІ – Дискретна геометрична інформація.

ДГМ – Дискретне геометричне моделювання.

ДПК – Дискретно подана крива.

ДПП – Дискретно подана поверхня.

ЗТС – Загальна теорія систем.

ЛНН – Лінія найбільшого нахилу.

МГМ – Метод геометричного моделювання.

ММР – Математична модель рельєфу.

НЛС – Наземне лазерне сканування.

ПЗ – Програмне забезпечення.

ПР – Програмна реалізація.

СТО – Супровідний трикутник опуклості.

СЛЛ – Супровідна ламана лінія.

ТП – Топографічна поверхня.

ЦМ – Цифрова модель.

ЦМР – Цифрова модель рельєфу.

ВСТУП

Розвиток електронних пристроїв для зйомки рельєфу, застосування геоінформаційних систем у моделюванні та облаштуванні земельних ділянок потребує розробки нових методів геометричного моделювання, які б відповідали вимогам технічного розвитку. У результаті електронної зйомки виникає множина точок, яку неможливо використати без застосування комп'ютерних технологій у моделюванні. Більшість існуючих методів прикладної геометрії не орієнтовані на обробку скінчених дискретних множин точок великої кількості. Виходячи зі сказаного, виникає актуальність розробки спеціальних способів формалізованого геометричного моделювання, здатних використовувати множини точок, що є результатом зйомки рельєфу електронними пристроями, яка призводить до утворення великих масивів даних. Геометрія точкового БН-числення у найбільшій мірі здатна використовувати дискретні точкові множини великої кількості. У цій монографії продемонстровані розв'язки таких задач, що виконувались з використанням геометричного апарату точкового БН-числення, яке, в свою чергу, призначене для роботи з великими масивами даних.

Актуальність дослідження геометричного моделювання горизонтальних земельних ділянок з використанням методів точкового БН-числення полягає у необхідності розробки нових геометричних рішень, які здатні використовувати множини точок, отриманих після наземного лазерного сканування з метою розв'язання задачі щодо знаходження проектної відмітки та лінії нульових робіт в облаштуванні земельної ділянки. При цьому, розв'язок означеної задачі мусить бути зорієнтованим для реалізації з використанням інформаційних технологій.

Як відомо з робіт професора Плоского В.О. та його учнів, від обрання методу розв'язання задачі, залежить якість отриманого розв'язку. Аналіз існуючих методів геометричного моделювання процесу вертикального планування горизонтальних земельних ділянок показав, що у його реалізації наразі застосовуються загально відомі традиційні математичні методи, які не є спеціальними, що призначені саме для цього процесу і тому розв'язки не є раціональними у їхній реалізації з використанням інформаційних технологій. В результаті,

процес геометричного моделювання горизонтальних ділянок є малоефективним за часом на його розробку та за витратами електронних ресурсів, результати розв'язку мають значні похибки, які у процесі облаштування земельної ділянки, що призводять до збільшення видатків через неоптимізоване переміщення ґрунту.

У зв'язку з цим, виникає необхідність розробки геометричних способів спеціально призначених для моделювання процесу вертикального планування ґрунту із застосування інформаційних технологій. Створені нові способи повинні забезпечувати оптимально-мінімальне переміщення ґрунту без вивезення надлишкового, та завезенням недостатнього.

Спосіб оптимального вертикального планування рельєфу для створення горизонтальної земельної ділянки, який представлено в даній роботі, є здатним до сприйняття вихідної інформації, за результатами зйомки поверхні рельєфу шляхом наземного лазерного сканування (НЛС), у результаті чого, утворюється великий масив даних. Наземне лазерне сканування, як відомо, значно прискорює процес зйомки. Наразі існуючі геометричні методи вертикального планування, здебільшого, не можуть ефективно використовувати отриману таким чином вихідну інформацію. Тому актуальною задачею є створення нових способів геометричного моделювання процесу вертикального планування земельних ділянок, розробку яких ми здійснювали з використанням геометричного апарату точкового числення Балюби-Найдиша (БН-числення).

Використання методів БН-числення для оптимізованого вертикального планування горизонтальних земельних ділянок, потребує додаткових досліджень і розробок з метою розв'язання задачі та розширення можливостей геометричного моделювання у середовищі БН-числення. У такому напрямі дослідження проводяться уперше.

Метою даного дослідження є розв'язання важливої науково-технічної задачі вертикального планування горизонтальної земельної ділянки засобами точкового числення Балюби-Найдиша.

Для досягнення поставленої мети необхідно було розв'язати такі **основні задачі**:

1. Зробити огляд методів прикладної геометрії вертикального планування земельних ділянок та методів зйомки рельєфу.

2. У термінах точкового числення Балюби-Найдиша:

2.1. На основі методів варіативного дискретного геометричного моделювання (ВДГМ), розробити спосіб згущення плоских дискретно представлених кривих з особливими точками, виконано алгоритмічну та програмну реалізацію.

2.2. Розробити спосіб та алгоритм геометричного представлення топографічної поверхні, заданої хмарою точок, отриманої у результаті НЛС.

2.3. Розробити алгоритми визначення меж земельної ділянки, рівня площини закладення та кінцевих точок на горизонталях.

2.4. Розробити алгоритм визначення площ геометричних фігур, які утворюються у результаті перерізу топографічної поверхні горизонтальною площиною.

2.5. Розробити методологію визначення проектної відмітки та лінії нульових робіт для оптимізації вертикального планування земельної ділянки.

3. Результати досліджень впровадити у роботу суб'єктів господарської діяльності.

Теоретична база проведених досліджень:

- з питань створення методів прикладної геометрії: Колотов С.М., Котов І.І., Найдиш В.М., Обухова В.С., Павлов А.В., Рижов М.М., Філіппов П.В., Четверухін М.Ф., Юдицький М.М.;
- з питань сучасних проблем моделювання: Аушева Н.М., Бадаєв Ю.І., Балюба І.Г., Ванін В.В., Верещага В.М., Гнатушенко В.В., Гумен О.М., Ковальов С.М., Ковальов Ю.М., Корчинський В.М., Куценко Л.М., Найдиш А.В., Несвідомін В.М., Михайленко В.Є., Підгорний О.Л., Пилипака С.Ф., Плоский В.О., Подкоритов А.М., Сергейчук О.В., Соболь О.М., Тулученко Г.Я., Шоман О.В., Юрчук В.П. та їхні учні.
- з питань дискретно геометричного моделювання: Верещага В.М., Грибов С.М., Ковальов С.М., Найдиш В.М., Найдиш А.В., Пугачов Є.В. та їхні учні;
- з питань точкового БН-числення: Балюба І.Г., Верещага В.М., Найдиш В.М., Найдиш А.В., Конопацький Є.В. та їхні учні;
- з питань побудови топографічних поверхонь та вивчення їх властивостей: Верещага В.М., Воронцов О.В., Кучкарова Д.Ф., Найдиш А.В., Найдиш В.М., Плоский В.О., Пилипака С.Ф. та їхні учні.

Наукову новизну складають такі результати досліджень:

уперше в термінах БН-числення:

- досліджено **геометричний сенс метричного оператора трьох точок прямої**, який дає можливість встановити, що кожному числу можна поставити у відповідність однопараметричну множину трійок точок, і навпаки;
- на основі властивостей метричного оператора трьох точок прямої, запропоновано **алгоритм знаходження точки дотику кривої**, визначеної точковим рівнянням, з прямою, що знаходиться у площині цієї кривої з опуклої її сторони. Алгоритм прискорює і підвищує якість розв'язання задач вертикального планування рельєфу, зменшує витрати на проектування;
- розроблено **алгоритм упорядкування вихідної скінченої дискретної множини точок** для утворення дискретно представленої поверхні (ДПП) у вигляді дискретно представлених горизонталей, який дозволяє, на основі варіативного дискретного геометричного моделювання, у точковому БН-численні, згущувати точкові ряди, що мають особливі точки;
- вводиться назва та розроблено: **«Спосіб розростання чарунок»**, зроблено класифікацію можливих варіантів геометричних схем даного способу та наведено порівняльні приклади, що показує підвищення точності розрахунків із його застосуванням;
- розроблено **методику обчислення об'ємів для елементів топографічної поверхні**, що зменшує похибку у розрахунках;
- розроблено узагальнений **спосіб розрахунку проектної відмітки** та знаходження, у дискретному представленні, **лінії нульових робіт**, який дозволяє знаходити проектну відмітку з наперед визначеною точністю.

Удосконалено, в термінах БН-числення:

- спосіб супровідних трикутників, що дозволяє згущувати точкові ряди з особливими точками;
- точкове рівняння параболічної поверхні Балюби шляхом введення змінюваної невласної точки параболи другого степеня, що дозволило встановити, що на межах ділянки та на смугах між горизонталями, завжди виникають трикутні чарунки;
- спосіб згущення дискретно представленої горизонталі шляхом застосування локальних симплексів, що утворені точками цієї

горизонталі, в ході якого встановлено, що зменшення кількості вихідних параметрів значно спрощує розв’язання задач;

- спосіб тріангуляції щодо визначення площі геометричної фігури, яка обмежена замкненою горизонталлю, що дозволило зменшити похибки у розрахунках об’єму ґрунту, підвищити швидкодію та ефективність алгоритмічного й програмного забезпечення.

Отримав подальший розвиток геометричний та обчислювальний апарат БН-числення, відповідне алгоритмічне та програмне забезпечення, що дає подальший розвиток розрахункових методів у програмному забезпеченні інформаційних систем.

Обґрунтованість і достовірність наукових положень та отриманих результатів забезпечується і підтверджується доведеними твердженнями, зіставленням тестових прикладів із вже відомими, комп’ютерною реалізацією моделі топографічної поверхні та практичним впровадженням результатів дослідження.

Практичне значення одержаних результатів дослідження полягає у розробці методології визначення проектної відмітки та лінії нульових робіт для оптимізації вертикального планування земельної ділянки, а також переходу від вихідної неупорядкованої хмарою точок до упорядкованої двовимірної дискретно представленої топографічної поверхні, що у повній мірі відтворює поверхню цієї множини точок, зменшує у ній кількість вихідних точок, у порівнянні з початковою хмарою, що дає можливість зменшити похибки та видатки на розрахунки у процесі вертикального планування та облаштування земельної ділянки.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ НАУКОВИХ ДЖЕРЕЛ ЩОДО ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ РЕЛЬЄФУ

Перш ніж розпочати наукове дослідження необхідно обґрунтувати його необхідність через аналіз стану у геометричному моделюванні за означеною темою дослідження, визначити коло питань, що передують цим дослідженням та сформулювати мету роботи.

Зважаючи на це, у першому розділі, на наш погляд, необхідно проаналізувати сучасний стан геометричного моделювання форм та процесів в цілому і окремо зосередитись на розробках щодо геометричного моделювання рельєфу земельних ділянок. Розглянути існуючі методи знімання вихідної інформації щодо рельєфу земельної ділянки та обрати оптимальний метод за часом знімання, витратами на процес, зручністю використання вихідних даних і таке інше.

В залежності від обраного методу знімання визначається характер підготовки вихідної інформації до використання її у геометричному моделюванні рельєфу земельної ділянки, що відповідає наперед заданим вимогам.

І зрештою, необхідно проаналізувати існуючі наразі методи вертикального планування рельєфу земельної ділянки з метою з'ясування їхніх недоліків та спрямувати дослідження, що усувають ці недоліки.

1.1 Сучасний стан геометричного моделювання процесів та форм у прикладній геометрії

Якщо виникає необхідність розв'язання задач із застосуванням геометричного моделювання, то виникає проблема обрання або розробки геометричного алгоритму її розв'язання. Здебільшого, потреба оптимального розв'язку задачі, в умовах постійного швидкого зростання вимог, викликає пошук нових методів геометричного моделювання. Пошуком «методу під задачу» з урахуванням загальної теорії систем, займається професор Плоский В.О. та його учні [81]. Зокрема, у роботі наголошується, що вибір «методу під задачу» є доволі складним процесом, до якого обов'язково треба підходити з

точки зору дбайливого ставлення до ресурсів, що надає нам природа, ефективне їх використання є запорукою довготривалих відносин між людиною і природою без екологічних негараздів.

Ефективне використання природних ресурсів тісно пов'язане з рельєфом земельної ділянки на якій господарює людина.

Зростання можливостей інформаційних систем разом з розширенням кола задач стосовно геометричного моделювання рельєфу земельної ділянки, потребує розвитку нових геометричних та математичних методів для розв'язання задач, які виникають у відповідності до вимог часу. Тому ключову роль у процесі оптимізації задач екологічного характеру, які виникають з метою налагодження ефективного господарювання людини у навколишньому середовищі, відіграє геометричне моделювання взагалі і формалізованого геометричного моделювання зокрема [185].

Застосування формалізованого геометричного моделювання у найбільшому ступені є виправданим, якщо окрім розробки теоретичних основ створюються геометричні алгоритми розв'язання задач та їх програмна реалізація.

Як наголошується у [81] прикладна геометрія та інженерна графіка охоплює широке коло практичних задач у царині машинобудування, будівництва, архітектури, сільського господарства, дизайну, економіки тощо і у зв'язку з цим, методи геометричного моделювання та генеровані ними геометричні моделі є різноманітними. Висновок, зроблений у [154] обґрунтовано вказує на те, що існує біля сотні методологічно відмінних методів геометричного моделювання.

Основи геометричного моделювання поверхонь у прикладній геометрії, яке на разі ще вдало застосовується для моделювання процесів, були закладені, на наш погляд, в роботах Іванова Г.С., Котова І.І., Михайленко В.Є., Осипова В.А., Підгорного О.Л., Рижова М.М., Четверухіна М.Ф., Обухової В.С., Павлова А.В. [95, 94, 156, 159, 172, 170, 197, 131, 150, 149, 116, 62, 133]. На базі цих досліджень було розвинуто теоретичні і практичні здобутки у розробці напрямів досліджень у прикладній геометрії, які сформульовані нижче:

- карскасно-параметричний метод конструювання поверхонь, який був запропонований Рижовим М.М. та розвинутий Найдишем В.М., Верещагою В.М., Найдишем А.В., Воронцовим О.В, Ковальовим С.М. [172, 119, 134, 45, 32, 71];

- методи нелінійного моделювання у нарисній геометрії у роботах Валькова К.І., Джапарідзе І.С. [24, 60];

- графічні та графо-аналітичні методи багатовимірної геометрії у роботах Гумен М.С., Гумен О.М., Філіппова П.В., Первікової В.М., Мартин Є.В. [55, 56, 150, 191, 113];

- формоутворення поверхонь з використанням кінематичних методів у роботах Скідана І.А., Павлова А.В., Подкоритова А.М. [147, 74, 177];

- методи варіативного дискретного геометричного моделювання у роботах Найдиша В.М., Верещаги В.М., Найдиша А.В. та їхніх учнів [134, 32, 35, 36, 120, 126, 115, 166, 46, 109, 179];

- методи, що використовують скінчені різниці стали базовими для статико-геометричного моделювання, яке розробляється школою професорова Ковальова С.М. [73, 72, 77, 76];

- під керівництвом Пустюльги С.І. розробляється метод геометричного моделювання на основі нескінченних числових послідовностей [164, 165, 173];

- для опису складних, у геометричному сенсі, форм, було сформовано кусково-неперервний метод під керівництвом Павлова А.В., який з успіхом розробляється його учнями і послідовниками професорами Ваніним В.В., Вірченком Г.А., Бадаєвим Ю.І., Аушевої Н.М. [147, 25, 43, 3, 4, 1];

- розробці методів розпізнавання геометричних об’єктів на основі використання інваріантних моделей ідентифікації та аналізу проекційних зображень присвячені роботи Дніпропетровської школи прикладної геометрії, яку очолює професор Корчинський В.М. у плідній співпраці зі своїм учнем професором Гнатушенком В.В. [91, 51, 52];

- моделюванню різноманітних процесів технічного спрямування та з’ясуванню поведінки окремих об’єктів у цих процесах, знаходженню оптимальних характеристик моделі присвячено дослідження Харківської школи під керівництвом професора Куценка Л.М. Розв’язання задач та проведення досліджень відбувається шляхом створення оригінальних програмних реалізацій та комп’ютерного моделювання. Разом з Куценком Л.М. працюють у Харківській школі професори Шатохін В.М., Комяк В.М., Шоман О.В., Соболь О.М., Ніцин О.Ю. та їхніми учнями [98];

- розробкою методів, пов’язаних з розрахунками надходження сонячної енергії в залежності від місця знаходження об’єкта, пори року, часу доби та розташування відносно сторін світу займаються Підгорний О.Л., Сергійчук О.В., Мартинов В.Л. та їхні учні. Не менш цікавим у цьому напрямі є дослідження професора Пугачова Є.В. та його учнів, які розробляють метод дискретної апроксимації неупорядкованих точковим множин [161, 162, 163, 194];

- розробкою теорії кривих, їх дослідження на різних поверхнях, у тому числі і на топографічних, знаходження траєкторії руху матеріальної точки по поверхні з урахуванням шорсткості і тертя займаються професори Пилипака С.Ф., Несвідомін В.М. та їхні учні [150, 151, 152, 149, 153, 128];

- моделювання поверхонь каналів з одночасною оптимізацією їх параметрів з метою оптимізації експлуатаційних витрат є одним із напрямів проектування поверхонь, яким займалися Бездітний А.О., Борисенко В.Д., Верещага В.М., Найдиш В.М., Обухова В.С., Філіппов П.В. [19, 30, 61, 65, 130, 17, 11, 12];

- оптимізацією полів через дослідження усереднених адаптивних шаблонів з використанням різного роду структурних кривих, що характеризують досліджуване поле є сферою інтересів Хомченка А.М., Тулученко Г.Я., Пугачова Є.В., Шоман О.В. та їхніх учнів [188, 195, 83, 161];

- розробці засобів візуалізації на основі використання сучасних комп’ютерів, програмного забезпечення та розробки програмних реалізацій результатів наукових досліджень, що розв’язують поставлену задачу, присвячені роботи Несвідоміна В.М., Сазонова К.О., Толока О.В., Кучеренка В.В., Бездітного А.О. [10, 100, 128, 172, 184];

- моделюванням рельєфу місцевості, земельних ділянок, проектуванням гідротехнічних споруд та водовідведенням на земельних ділянках і промислових майданчиках займались майже всі вчені з прикладної геометрії, серед яких Бурштинська Х.В., Верещага В.М., Воронцов О.В., Карпінський Ю.О., Котов І.І., Кучкарова Д.Ф., Михайленко В.Є., Найдиш А.В., Найдиш В.М., Плоский В.О., Пилипака С.Ф., Рудий Р.М., Сазонов К.О., Толок О.В. та їхні учні [80, 94, 119, 32, 35, 45, 47, 149, 152, 100, 172, 184, 23, 21, 22,

44, 69, 81, 103, 105, 104, 158, 117, 42, 120, 155, 156, 157, 169, 193, 28, 29];

- останнім часом Мелітопольською школою прикладної геометрії інтенсивно розробляється точкове БН-числення, яке використовує геометрію відношень однорідних геометричних образів або однорідних їхніх властивостей, що дозволяє отримати нові концепції геометричного моделювання для усіх вищерозглянутих напрямків у прикладній геометрії. Родоначальником точкового БН-числення є Балюба Іван Григорович, який під керівництвом Найдиша В.М. захистив докторську дисертацію [9].

Точкове числення на разі розвивається і активну участь в розробці його методів приймають Балюба І.Г., Верещага В.М., Найдиш А.В., Конопацький Є.В., Бездітний А.О., Кучеренко В.В., Давиденко І.П., Бумага А.І., Радєв С.Ю. [185, 10, 100, 86, 59, 102, 20, 101].

Точкове БН-числення є математичним апаратом для формалізованого геометричного моделювання.

Як бачимо з проведеного огляду, геометричне моделювання взагалі, а також його новий напрямок – формалізоване геометричне моделювання відносно геометричних форм, процесів і таке інше, є системоутворюючим. Тобто, один і той самий метод геометричного моделювання можна застосовувати для різних форм різних процесів. Але, не дивлячись на такі його можливості, сучасні проблеми і задачі потребують розробки нових методів формалізованого геометричного моделювання.

1.2 Огляд існуючих методів геометричного моделювання рельєфу земельних ділянок

Ефективне господарювання на визначеній земельній ділянці багато у чому залежить від вдало вибраної геометричної моделі рельєфу цієї земельної ділянки [129, 90, 192, 40].

Окрім цього, як вказувалося у [80], треба зважати, у виборі моделі, ще й на задачу, яку треба розв’язувати на обраній земельній ділянці.

У роботі професора Плоского В.О. та його учнів [80, 82] зроблено класифікацію числових моделей рельєфу та надані рекомендації для встановлення зв’язків «модель – задача».

У роботах професорів Верещаги В.М., Кучкарової Д.Ф., Найдиша В.М. та Михайленка В.Є. надано рекомендації та алгоритми переведення рельєфу, поданого у графічній формі, у числову форму [40, 103, 105, 117, 120]. Розглянуті тут наукові досягнення багато у чому допомагають у подальший наукових дослідженнях, зокрема і у цій роботі.

У роботі Хіменко І.Ю. [194], виконаній під керівництвом професора Пилипаки С.Ф., та дослідженнях Кучеренка В.В. [100], які виконувались під керівництвом професора Верещаги В.М. приділяється велика увага створенню числових моделей топографічних поверхонь та пропонується алгоритм побудови ліній водотоку та горизонталей. Розроблені алгоритми у цих роботах розраховані для комп'ютерної реалізації.

У зв'язку з тим, що рельєф земельної ділянки неможливо подати у вигляді одного аналітичного рівняння, то у більшості випадків, його поділяють на окремі сегменти, які описують поверхнями другого порядку [26, 27, 28, 29, 70, 107, 167, 190], сплайнами [3, 4] або дискретно поданими поверхнями (ДПП) та дискретно поданими кривими (ДПК) [126, 115, 166, 46, 109, 179, 198].

Застосування згаданих методів сегментації не забезпечує створення якісної числової моделі поверхні. З ускладненням рельєфу збільшується кількість сегментів та ліній їхнього з'єднання, рівняння яких треба розрахувати. Це приводить до значного збільшення обчислень, а звідси виникають похибки, порушується усталеність процесу розрахунків.

Цікавими, у сенсі створення геометричної моделі рельєфу земельної ділянки, є роботи Кучкарової Д.Ф. та її учнів [104, 105, 106, 107, 167, 190]. Побудова моделі у цих дослідженнях відбувається на основі структурних ліній рельєфу земельної ділянки. Дискретна геометрична модель, побудована з використанням структурних ліній рельєфу дозволяє розв'язувати задачі, пов'язані з поверхневим зрощенням, візуалізацією цього процесу, його аналізу з метою прийняття рішень гідротехнічного характеру. Класифікація поведінки структурних ліній, як регулярних так і нерегулярних, відбувається на основі теорії множин, на основі синтетичних та геометричних методів. Основним недоліком цієї класифікації є велика кількість умов та обмежень, що викликає певні труднощі у складанні програмних

продуктів, які реалізують аналіз рельєфу з використанням цієї класифікації.

Зробивши огляд існуючих методів геометричного моделювання рельєфу земельної ділянки, ми дійшли висновку, що для використання у наших наукових дослідженнях найбільш сприйнятними є наукові розробки, використані Кучеренком В.В. під керівництвом Верещаги В.М.

В означеній роботі вперше запропоновано формалізоване геометричне моделювання, в основі якого є точкове БН-числення [185], і яке має переваги над геометричним моделюванням, в основі якого є використання традиційних математичних методів та графічних побудов. У формалізованому геометричному моделюванні, за рахунок використання локальних симплексів, зменшується кількість вихідних параметрів і, внаслідок чого, набагато спрощується розв'язок задач. Розроблено метод побудови поверхонь Балюби, що мають великі можливості і здатні клаптями накривати топографічні поверхні у межах визначеної земельної ділянки. Недоліком запропонованого методу моделювання поверхонь Балюби є те, що він розроблений тільки для чотирикутних чарунок у той час як на межах ділянки, а також на смугах між горизонталями, завжди виникають трикутні чарунки. Ще у роботі [100] запропоновано, розроблено і отримано точкове рівняння горизонталі, яке ми також будемо використовувати у своїх подальших наукових дослідженнях.

Отримана у [100], з використанням сегментів, які є поверхнями Балюби, клаптяна топографічна поверхня земельної ділянки являє собою найбільш узагальнену формулу, тому має певні складнощі у її застосуванні.

Із сказаного випливає висновок про необхідність спрощення точкових рівнянь для сегментів, що накривають рельєф вихідної земельної ділянки, що безперечно, приведе до спрощення точкових рівнянь горизонталей на цій сегментованій топографічній поверхні.

У дисертаційній роботі Бездітного А.О. [10], яка виконана під керівництвом професора Верещаги В.М. розроблено способи побудови дискретної опуклої кривої та дискретної, з гарантованою точкою перегину, кривої. Однак, ці способи розроблені для монотонних дискретно поданих кривих.

Але на горизонталях топографічних поверхонь можуть траплятися точки повернення та точки зламу. Спосіб побудови горизонталей, що утримують означені точки повернення та точки зламу потребує розробки.

1.3. Аналіз джерел щодо електронних методів знімання топографічної поверхні

Метою знімання рельєфу земельної ділянки є отримання достатньої кількості точок, щоб була змога, з їх використанням, створити його модель, яка б з необхідною точністю відтворювала цей рельєф. Недостатня кількість знятих точок – підвищить похибку відтворення, надлишкова – збільшить час розрахунків у процесі створення числової моделі рельєфу.

При цьому, необхідно використовувати методи знімання, що дозволяють, для отримання оптимальної кількості точок, мінімізувати час на знімання та витрати. У найбільшій мірі, на наш погляд, таким вимогам відповідають сучасні електронні засоби – тахеометри, GPS-приймачі та сканери [16, 187, 191].

Тахеометри призначені для вимірювання відстаней та кутів, як горизонтальних кутів нахилу, так і вертикальних (кути відхилення). Використовуючи можливості тахеометра, можна визначити достатню кількість точок, серед яких локальні вершини, локальні западини, точки хребтів, лощин, сідловин, терас і таке інше, що дозволяють створити числову модель рельєфу.

У відповідності до [16] існують інтегровані та модульні тахеометри, що проводять вимірювання у відбитковому та безвідбитковому режимах. В залежності від режимів роботи, комплектації, конструктивних особливостей, рельєфу та метеорологічних умов дальність вимірів може становити від одного до п’яти кілометрів. При цьому похибка лінійних розмірів не перевищує 2 мм, а кутових 0,5 секунди.

Використання тахеометрів у наших дослідженнях є сприйнятним, незважаючи на великі витрати часу, які виникають через те, що кожна точка вимірюється окремо з обов’язковим наведенням на неї зорової труби та її фокусуванням на цю точку.

GPS-знімання [191], в залежності від конструктивних і технологічних особливостей обладнання, використовує декілька методів знімання. Але усі вони передбачають наявність базового приймача, координати розміщення якого відомі, і приймача з невідомими координатами, що одночасно фіксують спостереження, які можуть проводитись від 15 хвилин до 3 годин. Ця тривалість визначається зміною у часі конфігурації системи супутників, з якими одночасно працюють GPS-приймачі. До найпростіших методів використання GPS-технологій можна віднести швидко статичний метод, у якому використовується лише один прохід по пунктах виміру; - псевдо статичний метод, який перевищує попередній метод за швидкістю знімання через використання більш коротких ділянок спостережень замість одного довгого. Дозволяє виконати точний вимір координат багатьох точок; - кінематичний метод «стій – іди» відрізняється швидкодією, але потребує процедури ініціалізації і постійного перебування у зоні чотирьох супутників одночасно; - кінематичний метод із ініціалізацією «на ходу» забезпечує використання процедури ініціалізації безпосередньо під час руху за маршрутом у процесі знімання координат точок.

Безперечно, GPS-технології знімання рельєфу земельної ділянки забезпечують необхідну точність та швидкість, але основне їх використання є більш глобальним. Наприклад, контроль за геодезичними мережами Землі, тектонічними рухами земної поверхні, збільшенням гір, збільшенням (зменшенням) рівня світового океану (морів), рух фундаментів мегаспоруд і таке інше. Із сказаного випливає, що GPS-технології знімання рельєфу земельної ділянки можуть застосовуватися у наших дослідженнях для отримання вихідної інформації, але це робити недоцільно з витратної точки зору.

Наземне лазерне сканування (НЛС) рельєфу земельної ділянки являє собою високошвидкісний процес вимірювання відстаней від сканера, що являє собою знімальну систему до точок об’єкту, фіксує напрямки променів до кожної точки цього об’єкту з наступним формуванням тривимірного зображення у вигляді хмари точок. Під хмарою точок треба розуміти дискретну скінчену множину точок, кожна з яких визначена координатами у тривимірному просторі.

За швидкістю знімання інформації, її кількістю знятих точок, за одиницю часу , лазерне сканування значно перевищує розглянуті

раніше способи. За висновками авторів [110, 118] наземне лазерне сканування стане проривом у геодезичних інформаційних системах і, у разі здешевлення знімальних систем або збільшення фінансових можливостей замовників, стане, у майбутньому, основним методом знімання топографічних поверхонь. Знімання інформації щодо координат точок рельєфу відбувається з високою точністю (до 0,01 мм), швидкістю проведення робіт (сотні тисяч точок за секунду), детальністю отриманих даних, яка для способів, що запропоновані у цій роботі, є надлишковою [31, 100, 132, 174].

Після здійснення НЛС суттєвими є три етапи виконання робіт:

- безпосередньо процес знімання сканерною системою первинних вихідних даних щодо геометрії рельєфу земельної ділянки;
- попередня, поза межами знімальної системи (сканера), обробка первинно вихідних даних, отриманих за результатами знімання;
- визначення вихідних даних для побудови формалізованої геометричної моделі земельної ділянки.

Як було наголошено у роботі [100] про необхідність проведення попередньої обробки первинних вихідних даних, що це є найбільш трудомісткий етап і проведення цієї підготовки, для створення формалізованої геометричної моделі об'єкту, є обов'язковим, тому що дати раду сотням мільйонів точок хмари з використанням комп'ютерів, вживаних на сучасних виробництвах, є практично неможливим. Ця мільйонна кількість точок виникає у результаті того, що сканер не в змозі знімати інформацію вибірково, він знімає усе поспіль у відповідності до встановленої кількості елементів скануючої матриці. У роботі Кучеренка В.В. [100], на наш погляд, були вдало розроблені способи видалення надлишкової інформації, тому у подальших дослідженнях ми будемо її використовувати доповнюючи розробками, яких не вистачає.

Надзвичайно важливу роль у використанні технологій наземного лазерного сканування відіграє програмне забезпечення комп'ютера, який використовується у системі. Саме програмне забезпечення впливає на якість керування процесом знімання інформації та опрацювання отриманих результатів. Основною вимогою до програмного забезпечення сканерів є те, що воно повинно мати можливість обробляти мегакількісні об'єми отриманих даних, а також розвинуті функції тривимірного моделювання з числовою моделлю

рельєфу. Наявність таких можливостей дозволить користувачеві, без застосування додаткового обладнання, створювати 3D-моделі рельєфу земельної ділянки у цілому, або окремих її частин.

Такі вимоги приводять до здороження системи і неможливості використовувати комп'ютери розповсюджених потужностей.

Отже, зменшення потужності комп'ютерів і здешевлення програмного забезпечення через заміну числової моделі рельєфу його формалізованою геометричною моделлю, на наш погляд, є цікавим напрямом досліджень, який приведе до певного економічного ефекту.

Річ у тім, що числова модель рельєфу у вигляді хмари точок, яка отримана при мінімально можливій кількості членів скануючої матриці, втрачає наочність тривимірного зображення рельєфу і, при цьому, все рівно не може розв'язати задачі, що пов'язані з напрямом дослідження. Тому у роботі, на наш погляд, необхідно дослідити можливість переходу від числової моделі рельєфу до його формалізованої геометричної моделі.

Підсумовуючи сказане у цьому підрозділі, для даного дослідження є прийнятними усі три способи знімання топографічної інформації. За основний ми приймемо спосіб наземного лазерного сканування, а для електронних тахеометрів та систем GPS будемо вказувати тільки на особливості.

1.4. Методи вертикального планування поверхні горизонтальних земельних ділянок

Під вертикальним плануванням будемо розуміти зміну природних форм рельєфу з метою утворення необхідних умов для його використання.

В залежності від подальшого призначення у процесі експлуатації земельної ділянки, її вертикальне планування може бути різним. Але у будь-якому випадку, проект її вертикального планування завжди є складовою генерального плану розвитку підприємства. У монографії розглядаються земельні ділянки зі слабо виявленим рельєфом, порівняно невеликим схилом у межах до 0,01, та висотою перерізу рельєфу, що не перевищує 0,8 м. між найвищою та найнижчою точками. При цьому, розміри промислового майданчика повинні бути не більшими, ніж 2 га.

Розглянемо існуючі способи вертикального планування рельєфу земельної ділянки.

Вертикальне планування земельної ділянки промислового майданчика за квадратами [67, 108] передбачає поділення її на квадрати, сторони яких залежать від розмірів ділянки і точності розрахунків, з наступним визначенням сполучних точок та погодженням перевищень між ними.

За результатами знімання складається топографічний план земельної ділянки, який є графічною основою для складання проекту її вертикального планування.

У вертикальному плануванні земельної ділянки за квадратами найбільш складними є розрахунки, що пов'язані з визначенням проектної відмітки, тобто висоти розташування горизонтальної площини відносно якої об'єм ґрунту насипів та виїмок дорівнюють одне одному. До речі, цей принцип закладено не тільки у вертикальне планування за квадратами, а й в усі інші, тому що у цьому випадку досягається найбільший економічний ефект за рахунок того, що не потрібно вивозити надлишок ґрунту, або завозити його нестачу. Горизонтальна площина, що проходить через точку проектної відмітки, перетинаючи лінії на поверхні рельєфу, які утворені в результаті перетину рельєфу з вертикальними площинами, що проходять через сторони раніше визначених квадратів, утворюють точки нульових робіт. Точки нульових робіт знаходяться у горизонтальній площині і визначають дискретно лінію нульових робіт, що є межею між насипами та виїмками.

На наш погляд, основними недоліками вертикального планування земельної ділянки за квадратами є складність автоматизувати алгоритм розрахунків, об'єднавши його в єдиний програмний продукт певної інформаційної системи. Планування ділянки за квадратами потребує втручання у процес розрахунків проектувальника, що призводить до збільшення ресурсних витрат. Другою значною вадою є необхідність графічного утворення топографічної карти у горизонталях для досліджуваної ділянки. Це знижує точність у розрахунках та збільшує похибку вертикального планування ділянки і збільшує витрати на реалізацію проекту в цілому.

У разі, якщо площина земельної ділянки, на якій утворюється майданчик, має бути похилою, то шляхом зміни початкової проектної

відмітки необхідно виконати пошук положення цієї площини наближенням до нуля різниці об’ємів насипів та виїмок. При цьому, необхідно провести розрахунки декілька разів [97], тобто дотримуватися нульового балансу земляних робіт. Це, у свою чергу, збільшує фінансові та часові витрати на проектування.

Розглянутий метод вертикального планування за квадратами передбачав проведення ручного знімання поверхні рельєфу промислового майданчика та побудови топографічної поверхні для цього майданчика. У разі, якщо топографічна поверхня, на якій треба будувати промисловий майданчик, має мапу, що задана горизонталями, то метод його побудови дещо відрізняється від побудови майданчика за квадратами [15, 87, 96]. Послідовність проектування горизонтального будівельного майданчика на похилій топографічній поверхні, що визначена горизонталями, полягає у наступному. Наноситься контур горизонтального майданчика таким чином, щоб його центр збігався з центром ділянки. Найближчу до центру майданчика горизонталь обираємо як лінію нульових робіт. У цьому випадку, позначка горизонталі збігається з проектною позначкою. Далі визначаються і будуються лінії прямолінійних укосів, лінії перетину прямолінійного і криволінійного укосів земляної споруди. Після цього, визначають межі земляної споруди та об’єми земляних робіт. Оскільки цей метод вертикального планування є також графічним, то його вади співпадають з вадами методу вертикального планування за квадратами.

Окрім згаданого вище способу нівелювання рельєфу за квадратами існують і інші графічні способи нівелювання земельних ділянок. Розглянемо їх нижче у відповідності до [68].

1) Спосіб поперечників до магістрального ходу. У більшості випадків цього способу магістральні ходи прокладаються за структурними лініями місцевості. Такий спосіб застосовується при зніманні місцевості з добре виявленим рельєфом, при зніманні обабіч дороги, каналів та інших ліній об’єктів. Поперечники, при цьому, розташовуються перпендикулярно до магістрального ходу. Кількість знімань на поперечниках залежить від складності рельєфу.

2) Спосіб паралельних ліній. Нівелювання рельєфу земельної ділянки з використанням паралельних ліній може виконуватись як у закритих об’єктах, у більшості це спортивні споруди, так і на відкритій місцевості зі слабо виявленим рельєфом, при виконанні робіт зі

знімання дорожніх та штучних покриттів, злітно-посадкових смуг аеродромів, будівельних майданчиків і таке інше. У способі паралельних ліній застосовуються взаємно перпендикулярні прямолінійні ходи, по обидва боки яких, з використанням поперечників через рівні проміжки закріплюють в точки. Цей процес називається – розбитий пікетаж. Відстань між поперечниками та пікетажними точками залежить від характеру рельєфу ділянки та масштабу її зображення на мапі.

3) Спосіб полігонів. Застосовується на доволі великих земельних ділянках з добре виявленим рельєфом. Також, як і у попередніх способах, використовується система ходів, які прокладаються уздовж меж ділянки, що досліджується, та уздовж її структурних ліній. При необхідності, можуть прокладатися ще й додаткові ходи. Всі прокладені ходи утворюють полігони. Для знімання рельєфу усі прокладені ходи поділяються поперечниками, кількість яких залежить від характеру рельєфу та відстаней між ходами.

Загальними вадами для усіх розглянутих способів є те, що проекти виконуються у графічному вигляді на аркуші паперу, процес нівелювання виконується у ручному режимі, у більшості випадків, для отримання більшого ефекту від проекту, необхідно застосовувати обчислювальний процес наближення, у результаті проектні розрахунки мають доволі великі похибки, що на разі є неприпустимим. Наявність означених вад вказує на необхідність розробки нового способу вертикального планування промислового майданчика, який був би придатним для використання у геоінформаційних системах або на автоматизованих робочих місцях окремих проектувальників, що займаються розробками відповідних проектів.

1.5. Дослідження та аналіз методів інтерполяції та апроксимації плоских кривих

Ефективність наукових досліджень та результатів їх застосування на практиці, багато у чому, залежить від математичних методів, що використовуються у цих дослідженнях. Це твердження досить переконливе, відносно усіх методів у прикладній геометрії взагалі, показано у роботі [1]. У цьому підрозділі ми зробимо аналіз існуючих

методів інтерполяції та апроксимації з метою обрання найбільш ефективного для використання у подальших дослідженнях цієї роботи.

Треба зауважити, що в залежності від вихідної інформації та мети досліджень, можуть бути використані методи неперервної або дискретної інтерполяції та апроксимації, тому коротко розглянемо їх.

1.5.1. Неперервні методи.

У прикладній геометрії, частіше за все, використовуються криві другого порядку [50, 78] завдяки досконало розробленому геометричному апарату та високій технологічності їхнього застосування. Обмеженнями для їхнього використання, у процесі інтерполяції, є обов'язкове розташування вихідних даних у відповідності з формою певної кривої другого порядку. Хоча, у процесі апроксимації, це обмеження є менш суттєвим, але при цьому, відтворення кривої повинно виконуватися з певною, наперед заданою, похибкою.

У разі, коли дискретний плоский точковий ряд, координати точок якого визначені у декартовій системі координат і кількість цих точок теоретично не обмежується, практичніше за все використовують поліноми Лагранжа або Ньютона [53, 183]. Для одних і тих же вихідних даних поліноми Лагранжа і Ньютона відображають один і той же поліном з різною формою запису, яка відображає різницю у наступному. Якщо кількість точок вихідного точкового ряду збільшити ще на одну, то у полінома Лагранжа треба перераховувати усі, раніше обчислені коефіцієнти, а у полінома Ньютона цього робити не треба. Це є дуже зручним у тих обчисленнях, що потребують у дослідженнях часту зміну кількості вихідних точок. Основними перевагами поліномів Лагранжа і Ньютона є простота у використанні, наочність процесів інтерполяції та апроксимації, відносна нескладність розрахунків за алгоритмами, що побудовані на їхній основі. Основною вадою використання цих поліномів степеню більшого ніж третього є виникнення неконтрольованої осциляції, що призводить до збільшення похибки інтерполяції (апроксимації).

Серед неперервних параметричних кривих найбільш поширеними є криві Без'є, у яких параметр змінюється у межах від нуля до одиниці і визначає у векторній формі базисні функції, у якості яких, у більшості випадків, використовуються поліноми Бернштейна. Зміною положення

вершин характеристичної ламаної кривої Без'є досягається необхідна її форма. На практиці використовуються лінійні, квадратичні, кубічні криві Без'є. криві більш високого степеню потребують пропорційного зростання обчислень, з'являється вада, виникнення неконтрольованої осциляції, що нанівець зводить ефект від підвищення степеню цієї кривої. Тому найбільш широко застосовуються криві Без'є третього степеню. А для конструювання складних форм, криві, що є характерними для цієї форми, треба подавати у сегментованому вигляді, з подальшим з'єднуванням окремі сегменти у сплайн Без'є. сегментування вихідних даних кривої дозволяє зменшити степінь кривої Без'є і окрім цього, при необхідності зміни форми кривої на окремій ділянці, немає потреби робити обчислення по всій кривій, досить його зробити тільки на ділянці, що потребує змін. Окрім звичайних, використовуються ще раціональні криві Без'є, які є узагальнюючими по відношенню до звичайних та мають можливість описувати по вихідних точках криві другого порядку. Підсумовуючи сказане відносно кривих Без'є, можна сказати, що основними їхніми вадами є обмеження за степенем, в результаті чого зменшуються можливості. Другою вадою є те, що вершини характеристичної ламаної, що не належать кінцям сегменту кривої, не знаходяться на кривій Без'є. Це, у свою чергу, призводить до збільшення витрат ресурсів ЕОМ. Хоча інколи ця обставина може бути і перевагою.

Якщо розглянути сплайни, то параметри, що керують формою окремих його сегментів, визначаються точками, які є вихідними даними і визначають дискретно подану криву. Сплайн-методи досліджуються у роботах [62, 63, 75, 89, 168,], з яких відомо, що найважливішими характеристиками сплайну є його степінь та дефект. Степінь сплайну визначається найбільшим степенем сегменту з тих сегментів, що складають сплайн. Дефектом сплайну є найменша похідна, у якій відбувається розрив, з усіх похідних на краях сегментів, що є складовими сплайну.

В залежності від многочленів, застосованих до побудови сегментів сплайну, визначається види сплайнів, які можуть бути локальними (фінітними), тобто ті, що мають ненульові значення на обмеженій, відносно вихідних даних, області визначення; або глобальні (ненульові на всій області визначення). Для різних видів сплайнів крайові умови можуть бути різними. Надамо характеристику деяким видам сплайнів.

Сплайни Лагранжа будуються на множині опорних P_i точок, які належать множині R і подаються у вигляді поліноміальної параметричної кривої, сегментами якої є поліноми Лагранжа. Вади та переваги сплайну Лагранжа такі самі як і поліномів Лагранжа.

Сплайни Ньютона це інший запис сплайну Лагранжа, який є набагато зручнішим у разі необхідності додавання додаткової кількості опорних точок у порівнянні з вихідною їхньою кількістю. При цьому, у додаванні опорних точок немає потреби удруге обчислювати раніше визначені значення коефіцієнтів, що визначають умови проходження сплайну через точки первісного вихідного точкового ряду. Вади та переваги сплайну Ньютона залишаються такими ж як у сплайнів Лагранжа.

Сплайни Ерміта призначені для побудови сплайнів, які враховують у вихідних даних значення похідних у кінцевих точках та забезпечують у цих точках необхідний порядок гладкості з'єднання суміжних сегментів.

Кубічний сплайн задається у параметричній формі. Його друга похідна по параметру t буде лінійною функцією. Оскільки дефект кубічного сплайну дорівнює три, то другі похідні правого кінця попереднього сегменту та лівого кінця наступного, повинні бути рівними. З урахуванням цього, система рівнянь розв'язку буде мати стрічкову тридіагональну матрицю, що розв'язується за методом прогонки. Переваги та вади кубічного сплайну такі самі як у алгебраїчних поліномів Лагранжа.

B-сплайни відносяться до фінітних функцій, які у деякій визначеній області, що називається носієм, відрізняються від нуля, а поза її межами – дорівнюють нулю. Сплайн, що відповідає таким вимогам називається фундаментальним, або *B*-сплайном. Створюючи лінійні комбінації різних за степенем фундаментальних сплайнів, що визначені на одній і тій самій ділянці та на одних і тих самих вузлах, можна отримати будь-який сплайн з необхідним степенем. Такий підхід до утворення сплайну дає можливість локального керування його формою, а саме, виконуючи зміну коефіцієнтів сплайну на одній з ділянок, змінюється переобчислення тільки на цій ділянці, на інших ділянках нове обчислення не потрібне. При цьому гладкість з'єднання сплайну первісного та переобчисленого з суміжними сегментами, зберігається.

У прикладній геометрії подальший розвиток теорії сплайнів отримано у роботах професора Бадаєва Ю.І. та його учнів [79, 181]. У цих роботах пропонується використовувати для побудови сплайнів, сегментами яких є поліноми четвертого та п’ятого степенів, розробляється теорія їхнього застосування за умови відсутності осциляції, показано можливість та необхідність побудови сплайнів з метою управління кривиною кривої. Окрім цього, розроблено приклади та наведено схеми складання різних варіантів сплайнів на основі поліномів четвертого та п’ятого степенів, застосування яких дає змогу підвищити гладкість кривих і, побудованих з їхнім використанням, поверхонь.

Підсумовуючи наведений огляд неперервних методів інтерполяції та апроксимації, які призначені для дискретно поданих вихідних даних, можна зробити такий висновок, що загальною вадою є відсутність можливості локального корегування результату геометричного моделювання без повторного обчислення усього розв’язку задачі. Для виконання умов проходження інтерполяційної кривої через наперед задані точки, необхідне розв’язання системи лінійних рівнянь. Збільшення розміру відповідного визначника призводить до збільшення похибки розв’язку.

1.5.2. Дискретні методи

Ідея розробки дискретних методів інтерполяції та апроксимації у професора Найдиш В.М. виникла під впливом робіт провідних вчених Котова І.І. та Рижова М.М. [94, 95, 92, 93, 170, 172]. У дисертаційній роботі Верещаги В.М. сформований дискретно-параметричний метод геометричного моделювання кривих ліній та поверхонь, який згодом було покладено в основу варіативного дискретного геометричного моделювання [119, 115, 166, 46, 109, 179, 198, 178]. У роботі [33] відносно дискретних кривих надано визначення, яке полягає у тому, що метод їхньої побудови базується на геометричних алгоритмах, які виявляють область можливого вибору для точок загущення кривої або точок загущення для різниць першого, другого і більш високого порядків, забезпечують побудову точок згущення кривої без непередбачуваної осциляції, а також надають можливість варіативного вибору точок загущення при незмінних вихідних вузлових точках. Фундаментальними, з питань дискретного геометричного

моделювання плоских дискретно поданих кривих (ДПК), є роботи [120, 121, 122]. Згадаємо деякі з цих методів:

1. Геометричні співвідношення згущення на основі хорд супровідної ламаної лінії ДПК.
2. Геометричні співвідношення згущення ДПК при наявності дотичних.
3. Згущення на основі поділених різниць.
4. Дискретна інтерполяція на основі кутів згущення .
5. Згущення за допомогою рівноланкової ДПК.
6. Згущення у полярній системі координат.
7. Дискретна інтерполяція на основі тотожностей згущення.
8. Дискретна інтерполяція на основі базисних функцій.

Згадані способи дискретного моделювання ДПК забезпечують локальне керування формою кривої у окремих точках, заміну складних розрахунків на більшу кількість спрощених однотипних, відсутність накопичення похибки за рахунок усталеності алгоритмів, неможливість появи незапланованих точок перегину і виникнення осциляцій, можливість врахування нових додаткових вихідних умов, відсутність процесу згладжування за результатами згущення.

На наш погляд, основною вадою дискретного геометричного моделювання ДПК наразі є розробка його до рівня геометричних схем та розрахунків за ними, якщо створити формалізовані геометричні моделі [185] для розглянутих методів дискретного геометричного моделювання ДПК, то дістанемо потужний апарат дискретної інтерполяції та апроксимації.

1.6. Визначення місця точкового БН-числення у моделюванні кривих

Основи точкового числення були сформульовані професором Балюбою І.Г. у роботі [9]. Потім у роботах його учнів [59, 86] та у роботах учнів професора Верещаги В.М. [10, 100], а також у роботах [5, 6, 7, 57, 58, 85, 111, 112] було розглянуто окремі питання на базі використання формалізованого геометричного апарату точкового БН-числення. Однак, у найбільшій мірі систематизовано, основи точкового БН-числення було викладено у роботі [185]. Коротко надамо

характеристику точкового БН-числення з метою застосування його у геометричному моделюванні.

Річ у тім, що існуючі математичні методи, які на разі застосовуються у геометричному моделюванні, не завжди є оптимальними і не завжди задовольняють вимогам застосування їх у інформаційних системах з моделювання, тому що вони є узагальнюючими і не розроблені спеціально під необхідну геометричну схему. Для запровадження ефективних інформаційних технологій треба створювати геометро-математичний апарат для комп'ютерів, що пов'язує геометричні дії з числом.

Як відомо, комп'ютери оперують цифрами та числами. Результат будь-якого моделювання завжди можна завершити геометричною схемою. Якщо цей процес від числа до геометричної схеми прийняти за прямий, то може існувати і зворотній процес від вихідної геометричної схеми до чисел, які є результатом певних розрахунків, зроблених для заданої геометричної схеми.

Із сказаного випливає, що і прямий і зворотній процеси будуть ефективними коли для кожного числа буде встановлено безпосередньо геометричний об'єкт, для кожної операції над числами буде встановлено відповідні геометричні перетворення і навпаки, кожному геометричному об'єкту є можливість поставити у відповідність певне число, а геометричними перетворенням об'єктів буде відповідати число або набір чисел.

Встановленням таких прямих і зворотних відповідностей займається геометро-математичний апарат точкового БН-числення. Знаходження відповідностей між числом і геометричним об'єктом або геометричним перетворенням об'єкту потребує розробки нової геометрії для комп'ютерів. Такою новою геометрією і є геометрія точкового БН-числення.

У порівнянні з традиційними геометричними методами геометрія точкового БН-числення є геометрією відношень геометричних об'єктів або відношень окремих властивостей цих геометричних об'єктів.

На прикладі відтинка [AB] покажемо різницю між традиційного геометрією та геометрією точкового БН-числення. У традиційній геометрії відносно відтинка [AB] людина обирає потрібну інформацію і наголошує на ній. У геометрії точкового БН-числення для комп'ютера точки A і B повинні обов'язково бути визначенні координатами,

кількість яких відповідає мірності простору, у якому знаходиться цей відрізок. Визначається його довжина як різниця між точками (*A*-*B*) або (*B*-*A*), що означає різниця між ними відповідними координатами цих точок: (X_A-X_B), (Y_A-Y_B), (Z_A-Z_B) і так далі. Записується неперервна множина точок *M*, що належать цьому відрізку [*AB*] $M=At+(1-t)B$. І, нарешті, складається, з урахуванням знаку, просте відношення *ABM* трьох точок прямої, на якій розташований цей відрізок, $ABM = \frac{AM}{BM}$, що визначає якесь число. Таким чином, через відношення двох відтинків AM і BM, встановлено зв'язок між геометричними образами (AM і BM) і числом. Після усього цього, відрізок може бути використаний у програмних реалізаціях для комп'ютера.

У порівнянні з методами традиційної геометрії геометрія точкового БН-числення має ряд переваг для застосування у системах, що використовують інформаційні технології.

1. Встановлюється геометрія числа [34] через відношення довжин площ, об'ємів і таке інше, що дає можливість оцифровувати будь-яку геометричну схему. І навпаки, для комп'ютерного розв'язку, за результатами отриманого набору чисел, можна побудувати геометричне зображення цього розв'язку у разі, коли його було добуто за допомогою геометрії точкового БН-числення.

2. У геометрії точкового БН-числення розв'язок будь-якої задачі виконуються у позначеннях точок, а це означає, що він виконується у просторі [183]. Розглянемо наведений раніше приклад $M=At+(1-t)B$ – це розв'язок у просторі; $X_M=X_At+(1-t)X_B$ – це проекція розв'язку на вісь *Ox*; $Y_M=Y_At+(1-t)Y_B$ – це проекція на вісь *Oy*; $Z_M=Z_At+(1-t)Z_B$ – це проекція розв'язку на *Oz*. Попарна сукупність проекцій на осі, визначає проекції розв'язку на площині проекцій:

$$\text{горизонтальна: } \begin{bmatrix} X_M=X_At+(1-t)X_B; \\ Y_M=Y_At+(1-t)Y_B; \end{bmatrix}$$

$$\text{фронтальна: } \begin{bmatrix} X_M=X_At+(1-t)X_B; \\ Z_M=Z_At+(1-t)Z_B; \end{bmatrix}$$

Тобто, геометрія точкового БН-числення має хід розв'язку від загального до частинного, у той час як традиційна геометрія, у більшості своїх розв'язків, рухається навпаки – від частинного до загального. Розв'язок у просторі є формалізованою геометричною моделлю [185, 100], а розв'язок у проекціях на осі, площини і так далі є розрахунковим алгоритмом. Як бачимо, структури запису

формалізованого і розрахункового – однакові [185]. Наведений приклад було розглянуто для тривимірного простору, але треба розуміти, що для простору любої мірності структури запису у проекціях на відповідні осі будуть ідентичними.

3. Геометрія точкового БН-числення постійно використовує симплекси – локальні системи координат відносно яких здобувається розв'язок. Такий підхід має суттєві переваги перед методами традиційної геометрії, у яких кожний геометричний об'єкт позиціонується відносно первісної (глобальної) системи координат. Застосування симплексів дозволяє використовувати тільки параметри, що визначають форму об'єкту, а координати положення цієї формі відносно первісної системи координат не враховуються, у результаті чого зменшується кількість та спрощуються алгоритми обчислень. Однак, розв'язок, що виконується у локальній системі координат все рівно здобувається у глобальній системі.

Покажемо це на прикладі, наведеному раніше. Змінювана точка $M=At+(1-t)B$ визначена у одновимірному локальному симплексі, який утворюється двома точками A і B, що задані координатами у якійсь первісній системі координат. При цьому, розрахункові вирази для проекцій точки M осі $X_M=X_At+(1-t)X_B$, $Y_M=Y_At+(1-t)Y_B$, $Z_M=Z_At+(1-t)Z_B$, визначають координати точки $M(X_M,\ Y_M,\ Z_M)$ у глобальній системі координат.

Підсумовуючи сказане та враховуючи переваги геометрії точкового БН-числення, яка розрахована на використання у інформаційних системах проектування об'єктів та процесів, обираємо геометрію точкового БН-числення основним математичним апаратом для подальших досліджень.

На разі, на наш погляд, основною вадою точкового БН-числення є його неповна розробка, тому розробка геометрії точкового БН-числення для моделювання горизонтального промислового майданчика з оптимізацією земляних робіт – це є останньою проблемою нашого дослідження, яка буде розв'язуватись у цій роботі і являтиме собою ще один невеликий крок до розширення можливостей геометрії точкового БН-числення.

1.7. Проблеми геометричного моделювання горизонтальної земельної ділянки з оптимізацією земляних робіт. Визначення мети та обґрунтування задач дослідження

Як було з'ясовано у першому підрозділі, від обрання методу розв'язання задачі залежить якість її розв'язання. Аналіз існуючих методів геометричного моделювання процесу вертикального планування горизонтального промислового майданчика показав, що у геометричному моделюванні процесу вертикального планування використовуються математичні методи загального призначення які не є спеціальними, що призначені саме для цього процесу. В результаті, ці методи є малоефективними і не призначеними для впровадження у системі з використанням інформаційних технологій.

У зв'язку з цим, виникає проблема розробки спеціального методу геометричного моделювання для процесу вертикального планування рельєфу, який би оптимізував цей процес і був у найбільшій мірі ефективним та придатним для використання у інформаційних системах, які займаються плануванням рельєфу. Новий спосіб моделювання рельєфу має бути здатним до сприйняття вихідної інформації, щодо поверхні земельної ділянки, за результатами знімання її наземним лазерним скануванням. Така вимога висуває проблему розробки блоку підготовки інформації для подальшого її використання у моделюванні рельєфу. На разі проблемою застосування геометрії точкового БН-числення, для вертикального планування є недостатня її розробленість, тому розробка цієї геометрії під поставлену задачу вертикального планування горизонтального промислового майданчика з оптимізацією земляних робіт, є актуальною.

Якщо вище означені проблеми, які пов'язані з вертикальним плануванням рельєфу, поєднати, то дістанемо визначення мети нашого дослідження, яку сформулюємо наступним чином. Метою роботи є подальша розробка для автоматизованих інформаційних систем способів геометрії точкового БН-числення, що використовують за вихідну інформацію хмару точок, розробка геометричних алгоритмів вертикального планування земельних ділянок зі слабо виявленими нерівностями та невеликим перепадом, з оптимізацією земляних робіт при її облаштування.

За результатами аналізу наукових джерел, який було проведено у цьому розділі, випливає, що для досягнення поставленої мети, необхідно розв’язати наступні задачі:

1. Зробити огляд наукових джерел стосовно вертикального планування, методів прикладної геометрії, які для нього використовуються та методів знімання вихідної інформації.

2. На основі методів варіативного дискретного геометричного моделювання (ВДГМ) розробити способи згущення для плоских дискретно поданих кривих, що утримують точки звороту, зламу, розриву тощо.

3. Розробити спосіб геометричного подання топографічної поверхні, яка задана хмарою точок після наземного лазерного сканування.

4. Розробити на базі ВДГМ з використанням супровідних трикутників спосіб згущення дискретно поданих горизонталей.

5. Розробити геометричний алгоритм визначення меж майданчика, рівня площини закладення та кінцевих точок на горизонталях.

6. Розробити геометричні алгоритми визначення площ геометричних фігур, які утворюються у результаті перерізу топографічної поверхні горизонтальною площиною.

7. Розробити геометричну методику визначення проектної відмітки та лінії нульових робіт для оптимізації вертикального планування промислового майданчика.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

1. На підставі виконаного аналізу літературних джерел та інтернет-ресурсів, які присвячені розробці та дослідженню методів та моделей вертикального планування рельєфу під промислові майданчики, зроблено висновок, що існуючі методи вертикального планування не призначені для використання у системах із застосуванням інформаційних технологій. Найбільш ефективним методом знімання, який необхідно впроваджувати у проектах вертикального планування, на разі є наземне лазерне сканування топографічної поверхні.

2. У виконаному аналізі існуючих методів створення цифрових моделей рельєфу співставлено досвід створення геометричних моделей

топографічних поверхонь та пов’язаних з ними практичних задач. У результаті виявлених вад, що притаманні розглянутим моделям, зроблено висновок про необхідність створення геометричної моделі топографічної поверхні з використанням геометрії точкового БН-числення.

3. Аналіз, відносно методів побудови горизонталей на топографічних поверхнях, показав, що розробка геометричної моделі поверхні на базі геометрії точкового БН-числення потребує розробки нових, відповідних, способів геометричного моделювання плоских ліній, які можуть бути використані для побудови горизонталей топографічної поверхні.

4. Розроблена система нових алгоритмів обробки вихідної інформації знімання рельєфу та його вертикального планування повинна бути зорієнтована на використання у відповідних геоінформаційних системах, що займаються розробками проектів.

РОЗДІЛ 2

МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ДИСКРЕТНИХ Й НЕПЕРЕРВНИХ КРИВИХ, ОТРИМАНИХ З ВИКОРИСТАННЯМ СПОСОБІВ ТОЧКОВОГО БН-ЧИСЛЕННЯ

Зважаючи на те, що геометричний апарат точкового БН-числення знаходиться на початковій стадії свого розвитку, в результаті чого деякі питання досліджені частково, а інші взагалі ще не розроблялись, то ми не маємо змоги зробити у цьому розділі вичерпний системний аналіз способів моделювання дискретних та неперервних кривих з використанням точкового БН-числення. Тому дослідження дискретних та неперервних кривих проведено вибірково, тільки у тій частині, що стосується подальших досліджень у відповідності до визначеної мети та задач цієї роботи.

2.1. Точкове рівняння дуги параболічної кривої другого степеню

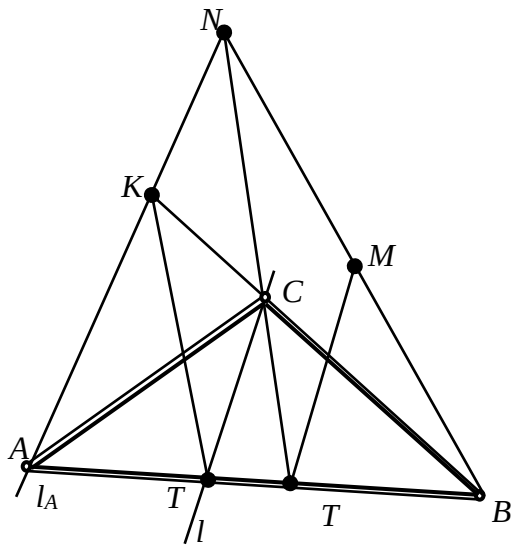


Рис. 2.1. Геометрична схема для параболи другого степеню

Як у способах, що побудовані на методах традиційної математики, так і у точковому БН-численні, найпростішими для розрахунків є застосування парабол другого степеню. Три точки *A, B, C* (рис. 2.1) однозначно визначають у просторі площину, на якій знаходиться парабола, та опуклість або увігнутість її дуги. Нехай ці три точки визначають симплекс *ABC*, у якому визначимо точкове рівняння параболи, що проходить через ці вершини *A, B, C* та невласну четверту точку C_∞, що визначається довільним напрямком прямої l_C, яку проводимо через точку *C*. У результаті перетину прямої l_C зі стороною симплексу *AB*, утворюється точка T_C. Зауважимо, що через точку C можна провести пучок прямих l_C. Напрямок прямої l_C визначає напрямок осі параболи, на якій знаходиться невласна точка C_∞ та вершина параболи. Зміною напрямку прямої l_C можливо оптимізувати інтерполяцію параболою за якимось обраним критерієм, наприклад,

мінімалізацією площі між відрізком AB та дугою параболи. Як відомо [108, 168, 169], точки параболи знаходяться на прямих, що паралельні осі параболи, маємо через точку A провести пряму $l_{\mathrm{A}} \parallel l_{\mathrm{C}}$. У результаті перетину $l_{\mathrm{A}} \cap \mathrm{BC} = \mathrm{K}$ (рис.2.1), отримаємо точку К, яка виконуватиме функцію проміжної точки у подальших доведеннях. Враховуючи [185] подамо точкове рівняння (2.1) для визначення точки $\mathrm{T_C}$, положення якої на відтинку AB однозначно подає невласну точку C_∞:

$$T_C = (B - A)t_c + A \tag{2.1}$$

Параметр t_c дорівнює простому відношенню трьох точок прямої $T_C BA$, тобто

$$t_c = -T_C BA = \frac{T_C A}{AB} = \frac{T_C A}{BA} = \frac{CK}{BK} \to \frac{C - K}{B - K} = t_c,$$

звідки

$$K = \frac{C - Bt_c}{1 - t_c} = \frac{C - Bt_c}{\bar{t_c}}, \qquad \text{де } \bar{t_c} = 1 - t_c \tag{2.2}$$

Виходячи із подібності трикутників $\Delta\mathrm{AK}T_C$ та ΔANT складемо відношення відрізків. Значення цих відношень будуть дорівнювати один одному

$$\frac{\mathrm{K}T_C}{NT} = \frac{T_C A}{TA}$$

У точковій формі ці відношення матимуть вигляд:

$$\frac{\mathrm{K} - T_C}{N - T} = \frac{T_C - \mathrm{A}}{T - \mathrm{A}}$$

звідки можемо визначити змінювану точку N:

$$N = \frac{(\mathrm{K} - T_C)(T - \mathrm{A})}{T_C - \mathrm{A}} + T \tag{2.3}$$

За аналогією з (2.1) визначаємо точку T

$$T = (\mathrm{B} - \mathrm{A})t + \mathrm{A} \tag{2.4}$$

Підставимо (2.1), (2.2),і (2.4) у (2.3), отримаємо:

$$N = \frac{1}{t_C \bar{t_C}} [A\bar{t_C}(t_C - t) - (Bt_C - \mathrm{C})t] \tag{2.5}$$

Для визначення змінюваної точки M дуги параболи необхідно розглянути два подібних трикутника ΔABN та TBM, для яких буде рівність простих відношень трьох точок прямої $TAB = MNB$, як у геометричній формі у вигляді відношення відтинків матиме вигляд:

$$\frac{TB}{AB} = \frac{MB}{NB}.$$

Подамо це відношення у точковій формі:

$$\frac{T-B}{A-B}=\frac{M-B}{N-B},\rightarrow M=\frac{(T-B)(N-B)}{A-B}+B \qquad (2.6)$$

Якщо у 2.6 підставити замість T і N їхні значення із відповідних точкових рівнянь (2.4) та (2.5), то дістанемо:

$$M=\frac{(B-A)t+A-B}{A-B}\times\frac{A\bar{t_C}(t_C-t)-Btt_C+Ct}{t_C\bar{t_C}}+B=$$

$$=(1-t)\frac{A\bar{t_C}(t_C-t)-Bt_C(t_C-t)+Ct}{t_C\bar{t_C}}$$

$$=\frac{A\bar{t}\bar{t_C}(t_C-t)-B\bar{t}t_C(t_C-t)+Ct\bar{t}}{t_C\bar{t_C}},$$

де $\bar{t}=1-t$.

Таким чином, дуга параболи другого степеню, що проходить через чотири наперед визначені точки $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{C}_\infty$ має таке точкове рівняння:

$$M=(1-t)\left(A\frac{t_C-t}{t_C}-\mathrm{B}\frac{t_C-t}{\bar{t_C}}+\mathrm{C}\frac{t\bar{t}}{t_C\bar{t_C}}\right), \qquad (2.7)$$

у якому *A, B, C* – дійсні точки, що належать параболі; C_∞ – невласна точка параболи, що визначена напрямом $\mathrm{C}T_C$; t - параметр, що визначає дугу параболи у межах $0\le t\le 1$; $\bar{t}=1-t$ – доповнення параметру t до одиниці;

t_C - значення параметру, яке фіксує точку T_C та однозначно визначає невласну точку C_∞ параболи; $\bar{t_C}=1-t_C$ - доповнення параметру t_C до одиниці.

Розглянута парабола другого степеню є найпростішою з означених кривих, що використовуються у процесі інтерполяції дискретно поданої кривої. Вона проходить через визначені точки і забезпечує нульовий порядок гладкості між двома суміжними сегментами. На наш погляд, для визначених задач цього дисертаційного дослідження у повній мірі достатньо нульового порядку гладкості. Реалізація параболи геометричними методами точкового БН-числення розширює його розвиток і, при цьому, надає усі переваги точкового БН-числення перед розв'язанням задач традиційними методами.

Невласну точку C_∞, яка визначається положенням точки T_C на відтинку *AB*, треба обирати таким чином, щоб напрям прямої CT_C був

би паралельним припустимому напряму осі параболи, що повинна проходити через припустиму вершину параболи, припустиме положення якої визначається за розташуванням вихідних точок *A, B, C*. Розглянутий спосіб обирання напрямку CT_C потрібно використовувати у випадках застосування оптимізації інтерполяції параболою другого степеню. У разі, коли не потрібно оптимізувати процес інтерполяції, то можна припустити, що $t_C = \frac{1}{2}$, тобто точка T_C розташована посередині відрізку *AB*. У цьому випадку точкове рівняння (2.7) прийме вигляд:

$$M = (1-t)\big((1-2t)(\mathrm{A}-\mathrm{B}) + 4\mathrm{C}t\bar{t}\big) \qquad (2.8)$$

Як бачимо, точкове рівняння (2.8) є доволі простим і його можна використовувати у визначенні координат для необхідної кількості змінюваних точок *M*. Розрахункові формули структурно схожі зі структурою точкового рівняння (2.8) і мають вигляд:

$$\begin{aligned} X_M &= (1-t)\big((1-2t)(X_\mathrm{A} - X_\mathrm{B}) + 4X_\mathrm{C}t\bar{t}\big) \\ Y_M &= (1-t)\big((1-2t)(Y_\mathrm{A} - Y_\mathrm{B}) + 4Y_\mathrm{C}t\bar{t}\big) \\ Z_M &= (1-t)\big((1-2t)(Z_\mathrm{A} - Z_\mathrm{B}) + 4Z_\mathrm{C}t\bar{t}\big) \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Структурна схожість (2.8) та наведених розрахункових формул (2.9) стає можливим лише тому, що проектування, у точковому численні, виконується на осі глобальної системи координат [185]. Проекції на площині проекцій із (2.9) визначається сукупністю двох відповідних розрахункових точкових рівнянь. Наприклад, перше рівняння для X_M та друге – для Y_M, визначають горизонтальну проекцію точки M; перше X_M та третє Z_M – фронтальну проекцію; друге рівняння Y_M та третє рівняння Z_M, визначають профільну проекцію.

Таким чином, підсумовуючи усе сказане відносно побудови параболи, що проходить через три дійсні точки *A, B, C* та невласну точку C_∞, можна зробити висновок, що її можна використовувати для моделювання топографічних поверхонь та кривих ліній на них. Єдине обмеження для використання параболи другого степеню, у способі який буде запропоновано у подальших дослідженнях, це нульовий порядок гладкості при з'єднанні суміжних сегментів. Але ми не будемо вважати це вадою тому що, у визначених задачах цього дисертаційного дослідження, нульового порядку гладкості буде цілком достатньо.

2.2. Визначення дуги кривої третього степеню

Багато задач з прикладної геометрії відносно моделювання кривих третього степеню, мають синтетичний розв'язок, відомі також окремі їхні аналітичні описи. Можливість комп'ютерного подання цих задач досить обмежена. Використання алгоритмів точкового БН-числення [185, 186], які будуються на параметричному аналізі відношення відрізків, площ та об'ємів, дозволяє знайти нові ефективні і прості методи розв'язання задач, відносно моделювання кривих третього степеню, які потім легко програмуються на ПЕОМ.

З проективної геометрії [49] відомо, що крива третього степеню однозначно визнається шістьма точками. В роботі Т. Рейє «Геометрія положення» синтетичними методами визначено геометричній алгоритм побудови кривої третього степеню, коли задані дві точки і дві прямі, які є мимобіжними [54], було подано розрахункові алгоритми побудови проективно-утворених кривих другого и третього степенів.

У роботі [143] було розроблено, а у роботі [84] розвинуто спосіб побудови просторової дуги кривої третього степеню. Показано можливості точкового числення Балюби-Найдиша, як формалізованого геометричного апарату, на прикладі аналітичного опису дуги кривої 3-го степеню, геометричний алгоритм утворення якої є відомим з синтетичної геометрії.

Визначимо вершини тривимірного симплексу $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$, як точки, що належать до кривої 3-го степеню (рис. 2.2). Тоді пари прямих $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ та $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ і $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4$ та $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ складають пари протиребер, тобто прямих, які є мимобіжними. Також крива третього степеню для однозначного її визначення повинна проходити ще через дві точки A_5 і A_6.

З використанням трьох параметрів h, k, f, визначимо точки H_{12}, K_{23} і F_{34}, які належать, відповідно, ребрам A_1A_2, A_2A_3 і A_3A_4:

$$\begin{aligned} H_{12} &= \mathrm{A}_1 h + \mathrm{A}_2 \bar{h} \\ K_{23} &= \mathrm{A}_2 k + \mathrm{A}_3 \bar{k} \\ F_{34} &= \mathrm{A}_3 f + \mathrm{A}_4 \bar{f} \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Точку L_{41} на ребрі $\mathrm{A_1A_4}$ визначимо, як перетин прямої $\mathrm{A_1A_4}$ з площиною $H_{12}K_{23}F_{34}$. Для цього на ребрі $\mathrm{A_1A_4}$ задамо змінювану точку P (на рис. 2.2 точка P не зображена):

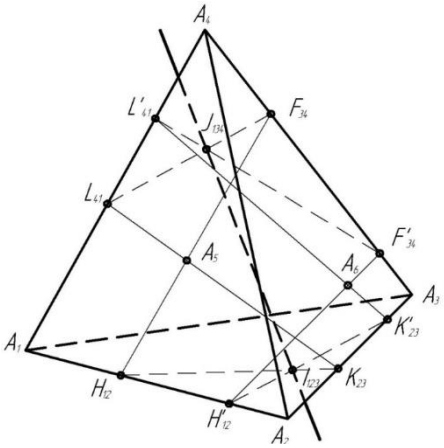


Рис. 2.2. Побудова перетину прямої з гранями тетраедра

$$P = \mathrm{A_4}l + \mathrm{A_1}\bar{l} \qquad (2.11)$$

Знаходимо об'єм піраміди $H_{12}K_{23}F_{34}L_{41}$, який повинен дорівнювати нулю, щоби точка L_{41} належала площині $H_{12}K_{23}F_{34}$. Відповідно до ν-теореми точкового числення Балюби-Найдиша [185, 186], отримаємо:

$$\begin{vmatrix} \bar{l} & 0 & 0 & l \\ 0 & k & \bar{k} & 0 \\ 0 & 0 & f & \bar{f} \\ h & \bar{h} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.12)$$

У першому рядку визначника (2.12) записано параметри змінюваної точки P з (2.11), оскільки точка A_2 та A_3 – відсутні, то у другому и третьому стовпчиках стоять нулі. Другий, третій та четвертий рядки записані з точкових рівнянь (2.10) за принципом, аналогічним для точки P.

Звідси знаходимо параметр l:

$$l = \frac{\overline{khf}}{\overline{khf} + khf};\ \bar{l} = 1 - l = \frac{khf}{\overline{khf} + khf} \qquad (2.13)$$

Підставляємо значення параметрів (2.13) у рівняння (2.11):

$$L_{41} = \mathrm{A_1}\frac{khf}{\overline{khf} + khf} + \mathrm{A_4}\frac{\overline{khf}}{\overline{khf} + khf} \qquad (2.14)$$

Аналогічним чином визначимо точки $H'_{12}, K'_{23},\ F'_{34}, L'_{41}$:

$$H'_{12} = A_1h' + A_2\bar{h'}: F'_{34} = A_2f' + A_2\bar{f};\ K'_{23} = A_2k' + A_2\bar{k'};$$

$$L'_{41} = A_1 = \frac{k'h'f'}{\bar{k'}\bar{h'}\bar{f'} + \bar{k'}\bar{h'}\bar{f'}} + A_4\frac{\bar{k'}\bar{h'}\bar{f'}}{\bar{k'}\bar{h'}\bar{f'} + \bar{k'}\bar{h'}\bar{f'}};$$

Точка I_{132} належить площині $A_1A_2A_3$. Визначимо точку I_{132}, як перетин прямих $H_{12}K_{23}$ і $H'_{12}K'_{23}$ у локальному симплексі $A_1A_2A_3$. Для цього на прямій $H_{12}K_{23}$ визначимо змінювану точку P, використовуючи параметр u:

$$P = H_{12}\mathrm{u} + K_{23}\,\bar{u} = \mathrm{A_1}hu + \mathrm{A_2}\left(\bar{h}u + k\bar{u}\right) + \mathrm{A_3}\bar{k}\bar{u}, \qquad (2.16)$$

де $\bar{u} = 1 - u$.

У цьому (2.16) точковому рівнянні замість точок H_{12} та K_{23} підставлені їхні значення з точкових рівнянь (2.10).

Тоді для визначення точки I_{132} площина трикутника $PH'_{12}K'_{23}$ повинна дорівнювати нулю. (На рис. 2.2 точка P, що належить прямій $H_{12}K_{23}$, не зображена). Відповідно до *S*-теореми точкового числення Балюби-Найдиша [185, 186], отримаємо:

$$\begin{vmatrix} hu & \bar{h}u + \bar{k}u & \bar{k}\bar{u} \\ h' & \bar{h}' & 0 \\ 0 & k' & \bar{k}' \end{vmatrix} = 0$$

У першому рядку цього (2.17) визначника записано параметри з точкових рівнянь (2.16), яке визначає змінювану точку P. У другому та третьому рядках записано параметри, що визначають точки H'_{12} та K'_{23} з точкових рівнянь (2.15) відповідно.

Визначимо значення параметра u із співвідношенням (2.17), маємо:

$$u = \frac{h'k - h'k'}{h\bar{k}' - h'\bar{k}}. \tag{2.18}$$

Далі визначимо $\bar{u}$:

$$\bar{u} = 1 - u = \frac{h'\bar{k}' - h'\bar{k}'}{h\bar{k}' - h'\bar{k}'} \tag{2.19}$$

Підставляємо вирази (2.18) та (2.19) у рівняння (2.16) і після деяких перетворень отримаємо:

$$\mathrm{I}_{123} = \mathrm{A}_1 h \frac{h'k - h'k'}{h\bar{k}' - h'\bar{k}} + \\ + \mathrm{A}_2 \frac{kh - h'k' + kk'(h' - h) + hh'(k' - k)}{h\bar{k}' - h'\bar{k}} + \mathrm{A}_3 \bar{k} \frac{h\bar{k}' - h'\bar{k}'}{h\bar{k}' - h'\bar{k}} \tag{2.20}$$

Аналогічним чином визначимо точку J_{134} як перетин прямих $L_{41}F_{34}$ і $L'_{41}F'_{34}$ у локальному симплексі $A_1A_3A_4$. Для цього на прямій $L_{41}F_{34}$ визначимо змінювану точку P, за допомогою параметра u (на рис. 2.2 ця змінювана точка P на прямій $L_{41}F_{34}$ не зображена):

$$P = L_{41}u + F_{34}\bar{u} = A_1 \frac{khf}{\overline{khf} + khf} u + A_3 \bar{u} f + A_4 \left(\frac{\overline{khf}}{\overline{khf} + khf} u + \bar{u}\bar{f} \right) \tag{2.21}$$

де $\bar{u} = 1 - u$.

Тоді для визначення точки J_{134} площина трикутника $P'L_{41}F'_{34}$ повинна дорівнювати нулю. Відповідно до s-теореми точкового числення Балюби-Найдиша [185, 186], отримаємо:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{khf}{\overline{khf}+khf}u & \bar{u}f & \dfrac{\overline{khf}}{\overline{khf}+khf}u+\bar{u}\bar{f} \\ \dfrac{k'h'f'}{\bar{k}'\overline{h'f'}+k'h'f'} & 0 & \dfrac{\bar{k}'\bar{h}'\bar{f}'}{\bar{k}'\bar{h}'\bar{f}'+k'h'f'} \\ 0 & f & \bar{f}' \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.22)$$

У цьому визначнику перший рядок для точки P з (2.21), другий – для L'_{41} з (2.15), третій – для F'_{34} з (2.15).

Звідси знаходимо параметр u:

$$u = \frac{k'h'\left(\overline{khf}+khf\right)(f-f')}{k'h'\bar{f}f(1-k-h)-kh\bar{f}'f(1-h'-k')}. \qquad (2.23)$$

Тепер знаходимо параметр $\bar{u}$:

$$u = 1-u = \frac{\overline{khf}k'\,h'f'-khf\bar{k}'\,\bar{h}'\,\bar{f}'}{k'h'\bar{f}f(1-k-h)-kh\bar{f}'f(1-h'-k')}. \qquad (2.24)$$

Підставляємо вирази (2.23) та (2.24) в рівняння (2.21) і після деяких перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned} J_{134} = A_1 & \frac{khk'h'(f-f')}{k'h'\bar{f}(1-k-h)-kh\bar{f}'(1-h'-k')}+ \\ +A_3 & \frac{\overline{khf}k'h'f'-khf\bar{k}'\bar{h}'\bar{f}'}{k'h'\bar{f}(1-k-h)-kh\bar{f}'(1-h'-k')}+ \\ +A_4 & \frac{\overline{khf}k'h'-kh\bar{k}'\bar{h}'f}{k'h'\bar{f}(1-k-h)-kh\bar{f}'(1-h'-k')}\bar{f}'. \end{aligned} \qquad (2.25)$$

Тепер розглянемо геометричний алгоритм побудови змінюваної точки дуги кривої 3-го степеню методом рухомого симплексу (рис. 2.3) [59]. Параметрична точка T, рухаючись прямою A_1A_3, утворює рухомий симплекс $TI_{123}J_{134}$, який обертається навколо вісі $I_{123}J_{134}$. Цей рухомий симплекс перетинаючи протилежні ребра тетраедра – A_1A_2 та A_3A_4 – утворює, відповідно, точки T_{12} та T_{34}, а також – протилежні ребра A_2A_3 та A_1A_4 – утворює, відповідно, точки T_{23} та T_{41}. Змінювану M

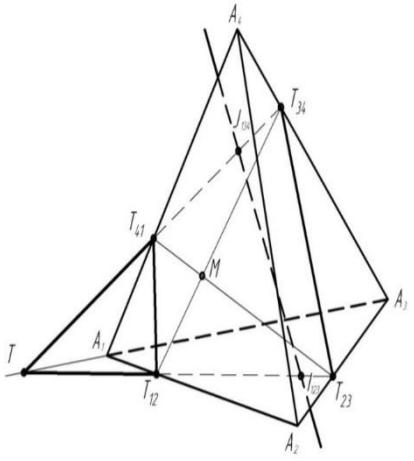


Рисунок 2.3. Геометричний алгоритм побудови змінюваної точки дуги кривої 3-го степеню

кривої третього порядку визначимо, як перетин двох прямих $T_{12}T_{34}$ і $T_{23}T_{41}$.

Визначимо точку T за допомогою наступного точкового рівняння:

$$T = A_1\bar{t} + A_3 t \tag{2.26}$$

Тепер визначимо точку T_{12}, як перетин прямих A_1A_2 і TI_{123}. Для цього на прямій TI_{123} визначимо змінювану точку P (не зображена), за допомогою параметра u:

$$\begin{aligned} P = Tu + I_{123}\bar{u} = A_1\left(\bar{t}u + \frac{h'k - h'k'}{h\bar{k}' - h'\bar{k}}h\bar{u}\right) + \\ + A_2\frac{kh - h'k' + kk'(h' - h) + hh'(k' - k)}{h\bar{k}' - h'\bar{k}}\bar{u} + A_3\left(\bar{k}\frac{h\bar{k}' - h'\bar{k}'}{h\bar{k}' - h'\bar{k}}\bar{u} + tu\right). \end{aligned} \tag{2.27}$$

У (2.27) замість T поставлено відповідне значення з (2.26), замість I_{123} – відповідне значення з (2.20).

Площина трикутника A_1A_2P повинна дорівнювати нулю. Відповідно до S-теореми точкового числення Балюби-Найдиша, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} \bar{t}u + \frac{h'k - h'k'}{h\bar{k}' - h'\bar{k}}h\bar{u} & \frac{kh - h'k' + kk'(h' - h) + hh'(k' - k)}{h\bar{k}' - h'\bar{k}}\bar{u} & \bar{k}\frac{h\bar{k}' - h'\bar{k}'}{h\bar{k}' - h'\bar{k}}\bar{u} + tu \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.28}$$

У визначнику (2.28) перший рядок складено з відповідних параметрів, які узято з точкового рівняння (2.27). Другий та третій рядки утримують одиниці тому, що точки A_1 та A_2 є вершинами тетраедра-симплекса.

Знайдемо параметр u з рівняння (2.28):

$$u = \frac{\bar{k}\left(h\bar{k}' - h'\bar{k}'\right)}{\bar{k}\left(h\bar{k}' - h'\bar{k}'\right) - t\left(h\bar{k}' - h'\bar{k}\right)}. \tag{2.29}$$

Тепер знаходимо $\bar{u}$:

$$\bar{u} = 1 - u = \frac{-t\left(h\bar{k}' - h'\bar{k}\right)}{\bar{k}\left(h\bar{k}' - h'\bar{k}'\right) - t\left(h\bar{k}' - h'\bar{k}\right)}. \tag{2.30}$$

Підставляємо вирази (2.29) і (2.30) у рівняння (2.27):

$$\begin{aligned} T_{12} = A_1\bar{t}_{12} + A_2 t_{12} = A_1\frac{\left(h\bar{k}' - h'\bar{k}'\right)\bar{k}\bar{t} - \left(h'k - h'k'\right)ht}{\bar{k}\left(h\bar{k}' - h'\bar{k}'\right) - t\left(h\bar{k}' - h'\bar{k}\right)} + \\ + A_2\frac{h'k' - kh - kk'(h' - h) - hh'(k' - k)}{\bar{k}\left(h\bar{k}' - h'\bar{k}'\right) - t\left(h\bar{k}' - h'\bar{k}\right)}t. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Аналогічним чином знаходимо T_{23} точку перетину прямих A_2A_3 і TI_{123}. Площина трикутника A_2A_3P повинна дорівнювати нулю. Відповідно до *S*-теореми точкового числення Балюби-Найдиша, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} \bar{t}u + \dfrac{h'k - h'k'}{h\bar{k}' - h'\bar{k}} h\bar{u} & \dfrac{kh - h'k' + kk'(h' - h) + hh'(k' - k)}{h\bar{k}' - h'\bar{k}}\bar{u} & \bar{k}\dfrac{h\bar{k}' - h'\bar{k}'}{h\bar{k}' - h'\bar{k}}\bar{u} + tu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.32)$$

Знайдемо параметр u :

$$u = \frac{(h'k - h'k')h}{(h'k - h'k')h - (h\bar{k}' - h'\bar{k})\bar{t}}. \qquad (2.33)$$

Тепер знаходимо $\bar{u}$:

$$\bar{u} = 1 - u = \frac{-(h\bar{k}' - h'\bar{k})\bar{t}}{(h'k - h'k')h - (h\bar{k}' - h'\bar{k})\bar{t}}. \qquad (2.34)$$

Підставляємо вирази (2.33) і (2.34) у рівняння (2.27):

$$\begin{aligned} T_{23} &= A_2\bar{t}_{23} + A_3t_{23} = A_2\frac{-kh + h'k' - kk'(h' - h) - hh'(k' - k)}{(h'k - h'k')h - (h\bar{k}' - h'\bar{k})\bar{t}}\bar{t} + \\ &+ A_3\frac{(h'k - h'k')ht - (h\bar{k}' - h'\bar{k}')\bar{k}\bar{t}}{(h'k - h'k')h - (h\bar{k}' - h'\bar{k})\bar{t}}. \end{aligned} \qquad (2.35)$$

Визначимо точку T_{34}, як перетин прямих TJ_{134} і A_3A_4 у симплексі $A_1A_3A_4$.

$$\begin{aligned} P &= Tu + J_{134}\bar{u} = A_1\left(\frac{khk'h'(f - f')}{k'h'\bar{f}(1 - k - h) - kh\bar{f}'(1 - h' - k')}\bar{u} + \bar{t}u\right) + \\ &+ A_3\left(\frac{\bar{k}\bar{h}\bar{f}k'h'f' - khfk'\bar{h}'\bar{f}'}{k'h'\bar{f}(1 - k - h) - kh\bar{f}'(1 - h' - k')}\bar{u} + tu\right) + \\ &+ A_4\frac{\bar{k}\bar{h}\bar{f}k'h' - kh\bar{k}'\bar{h}'\bar{f}}{k'h'\bar{f}(1 - k - h) - kh\bar{f}'(1 - h' - k')}\bar{f}'\bar{u}. \end{aligned} \qquad (2.36)$$

Площина трикутника A_3A_4P повинна дорівнювати нулю. Відповідно до *S*-теореми точкового числення Балюби-Найдиша, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{khk'h'(f - f')}{k'h'\bar{f}(1 - k - h) - kh\bar{f}'(1 - h' - k')}\bar{u} + \bar{t}u & \dfrac{\bar{k}\bar{h}\bar{f}k'h'f' - khfk'\bar{h}'\bar{f}'}{k'h'\bar{f}(1 - k - h) - kh\bar{f}'(1 - h' - k')}\bar{u} + tu & \dfrac{\bar{k}\bar{h}\bar{f}k'h' - kh\bar{k}'\bar{h}'\bar{f}}{k'h'\bar{f}(1 - k - h) - kh\bar{f}'(1 - h' - k')}\bar{f}'\bar{u} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.37)$$

Знайдемо параметр u :

$$u = \frac{khk'h'(f - f')}{khk'h'(f - f') - \bar{t}k'h'\bar{f}(1 - k - h) + \bar{t}kh\bar{f}'(1 - h' - k')}. \qquad (2.38)$$

Тепер знаходимо $\bar{u}$:

$$\bar{u} = 1 - u = \frac{\bar{t}kh\bar{f}'(1-h'-k') - \bar{t}k'h'\bar{f}(1-k-h)}{khk'h'(f-f') - \bar{t}k'h'\bar{f}(1-k-h) + \bar{t}kh\bar{f}'(1-h'-k')}. \quad (2.39)$$

Підставляємо вирази (2.38) і (2.39) у рівняння (2.36):

$$T_{34} = A_3\bar{t}_{34} + A_4 t_{34} = A_3 \frac{khk'h'(f-f')t - \bar{t}\left(\overline{khf}k'h'f' - khf\bar{k}'\bar{h}'\bar{f}'\right)}{khk'h'(f-f') - \bar{t}k'h'\bar{f}(1-k-h) + \bar{t}kh\bar{f}'(1-h'-k')} + \\ + A_4 \frac{\bar{f}'\left(kh\bar{k}'\bar{h}'\bar{f} - \overline{khf}k'h'\right)}{khk'h'(f-f') - \bar{t}k'h'\bar{f}(1-k-h) + \bar{t}kh\bar{f}'(1-h'-k')}\bar{t}. \quad (2.40)$$

Аналогічним чином визначимо точку T_{41}. При цьому площина трикутника A_1A_4P повинна дорівнювати нулю. Відповідно до *S*- теореми точкового числення Балюби-Найдиша, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} \frac{khk'h'(f-f')}{k'h'\bar{f}(1-k-h) - kh\bar{f}'(1-h'-k')}\bar{u} + \bar{t}u & \frac{\overline{khf}k'h'f' - khf\bar{k}'\bar{h}'\bar{f}'}{k'h'\bar{f}(1-k-h) - kh\bar{f}'(1-h'-k')}\bar{u} + tu & \frac{\overline{khf}k'h' - khk'\bar{h}'\bar{f}}{k'h'\bar{f}(1-k-h) - kh\bar{f}'(1-h'-k')}\bar{f}'\bar{u} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.41)$$

Знайдемо параметр u:

$$u = \frac{\overline{khf}k'h'f' - khf\bar{k}'\bar{h}'\bar{f}'}{\overline{khf}k'h'f' - khf\bar{k}'\bar{h}'\bar{f}' - tk'h'\bar{f}(1-k-h) + tkh\bar{f}'(1-h'-k')}. \quad (2.42)$$

Тепер знаходимо $\bar{u}$:

$$\bar{u} = 1 - u = \frac{kh\bar{f}'(1-h'-k') - k'h'\bar{f}(1-k-h)}{\overline{khf}k'h'f' - khf\bar{k}'\bar{h}'\bar{f}' - tk'h'\bar{f}(1-k-h) + tkh\bar{f}'(1-h'-k')}t. \quad (2.43)$$

Підставляємо вирази (2.42) і (2.43) у рівняння (2.36):

$$T_{41} = A_4\bar{t}_{41} + A_1 t_{41} = \\ = A_1 \frac{\bar{t}\left(\overline{khf}k'h'f' - khf\bar{k}'\bar{h}'\bar{f}'\right) - tkhk'h'(f-f')}{\overline{khf}k'h'f' - khf\bar{k}'\bar{h}'\bar{f}' - tk'h'\bar{f}(1-k-h) + tkh\bar{f}'(1-h'-k')} + \\ + A_4 \frac{t\bar{f}'\left(kh\bar{k}'\bar{h}'\bar{f} - \overline{khf}k'h'\right)}{\overline{khf}k'h'f' - khf\bar{k}'\bar{h}'\bar{f}' - tk'h'\bar{f}(1-k-h) + tkh\bar{f}'(1-h'-k')}. \quad (2.44)$$

Визначимо змінювану точку M кривої 3-го степеню, як перетин прямих $T_{12}T_{34}$ і $T_{23}T_{41}$. Для цього на прямій $T_{12}T_{34}$ визначимо поточну точку Q:

$$Q = T_{12}\bar{u} + T_{34}u = A_1\bar{t}_{12}\bar{u} + A_2 t_{12}\bar{u} + A_3\bar{t}_{34}u + A_4 t_{34}u. \quad (2.45)$$

Площина трикутника $QT_{23}T_{41}$ повинна дорівнювати нулю. Складемо матрицю параметрів:

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_{12}\bar{u} & t_{12}\bar{u} & \bar{t}_{34}u & t_{34}u \\ 0 & \bar{t}_{23} & t_{23} & 0 \\ t_{41} & 0 & 0 & \bar{t}_{41} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.46)$$

Викреслюємо перший стовбець матриці. Отриманий визначник повинен дорівнювати нулю.

$$\begin{vmatrix} t_{12}\bar{u} & \bar{t}_{34}u & t_{34}u \\ \bar{t}_{23} & t_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{t}_{41} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.47)$$

Звідси знаходимо параметр u :

$$u = \frac{t_{12}t_{23}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}}. \qquad (2.48)$$

Тоді точкове рівняння дуги кривої 3-го степеню матиме наступний вигляд:

$$M = A_1 \frac{\bar{t}_{12}\bar{t}_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}} + A_2 \frac{t_{12}\bar{t}_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}} + A_3 \frac{t_{12}t_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}} + A_4 \frac{t_{12}t_{23}t_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}}. \qquad (2.49)$$

Або у іншій, більш звичній, формі:

$$M = (A_1 - A_4)\frac{\bar{t}_{12}\bar{t}_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}} + (A_2 - A_4)\frac{t_{12}\bar{t}_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}} + (A_3 - A_4)\frac{t_{12}t_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}} + A_4 \qquad (2.50)$$

Результат доцільно представити у вигляді розрахункового алгоритму, наведемо розрахункові формули тільки для останнього точкового рівняння (2.50), у результаті отримаємо:

$$x_m = (x_1 - x_4)\frac{\bar{t}_{12}\bar{t}_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}t_{34}} + (x_2 - x_4)\frac{t_{12}\bar{t}_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}} + (x_3 - x_4)\frac{t_{12}t_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}} + x_4$$

$$y_m = (y_1 - y_4)\frac{\bar{t}_{12}\bar{t}_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}t_{34}} + (y_2 - y_4)\frac{t_{12}\bar{t}_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}} + (y_3 - y_4)\frac{t_{12}t_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}} + y_4$$

$$z_m = (z_1 - z_4)\frac{\bar{t}_{12}\bar{t}_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}t_{34}} + (z_2 - z_4)\frac{t_{12}\bar{t}_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}} + (z_3 - z_4)\frac{t_{12}t_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}} + z_4$$

Підсумовуючи сказане у цьому підрозділі, зробимо висновок, що у довільному просторовому симплексі $A_4A_1A_2A_3$ можна побудувати, за розглянутим алгоритмом у геометрії точкового БН-числення, нескінчену множину кривих третього степеню шляхом зміни шести параметрів, які визначають ще дві точки A_5 та A_6, що однозначно визначають криві, через які, разом із точками $A_1A_2A_3$ A_4, проходить ця крива. Однак, такі широкі можливості моделювання кривих третього степеню потребують окремих додаткових досліджень. Тим не менш, розглянутий спосіб побудови кривих третього степеню може бути вживаним для формалізованого геометричного моделювання топографічних поверхонь. Проте, він є набагато складнішим за своїм алгоритмом у порівнянні зі способом на основі кривої другого степеню – параболи, який було розглянуто у попередньому підрозділі.

2.3. Згущення дискретно поданої кривої із застосуванням супровідних трикутників

Основою досліджень цього підрозділу стали роботи Найдиша В.М., Балюби І.Г., Верещаги В.М., Найдиша А.В. [185, 120, 121, 122].

Для дискретно поданої кривої (ДПК) супровідний трикутник і полоса дифпроекцій [41] мають одну й ту саму природу походження, які з однаковим успіхом використовуються у варіативному дискретному геометричному моделюванні. У цьому підрозділі розглянемо застосування супровідних трикутників (СТ) з використанням способів точкового БН-числення для згущення ДПК. Це питання розроблялось у роботі [10], відмінність нашого дослідження полягає у іншому поданні параметрів, тобто використовується інша геометрія числа [48].

Для проведення досліджень спочатку розглянемо геометричну схему загального вигляду, яку зображено на рис. 2.4. Під загальним виглядом симплексу треба розуміти те, що ні одна з точок *A, B, C*, що

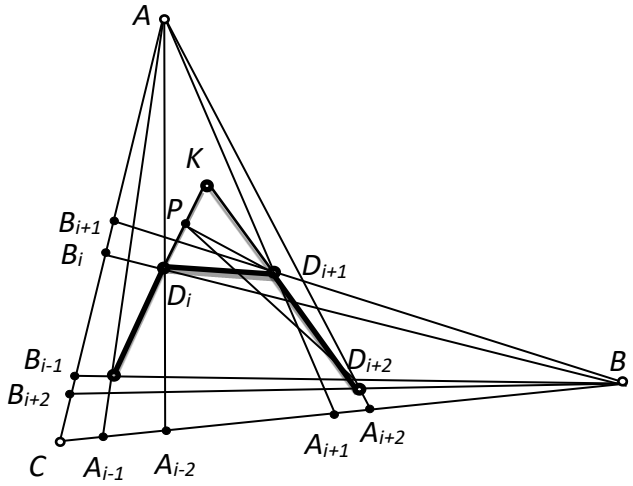


Рис. 2.4. Схема згущення за загальним виглядом

визначають симплекс *CAB*, не співпадає з точками D_i, які визначають дискретно подану криву: $D_{i-1}, D_i, D_{i+1}, D_{i+2}$.

Для розв'язку задачі необхідно з ДПК взяти перші чотири точки, а потім зрушитись на одну точку і розглянути наступну четвірку точок, $D_i, D_{i+1}, D_{i+2}, D_{i+3}$. Цей процес повторювати, доки не дійдемо до останньої точки, що визначають ДПК.

На запропонованій схемі (рис. 2.4) точки ДПК $D_{i-1}, D_i, D_{i+1}, D_{i+2}$з'єднані відтинками прямих для наочності, ніякого смислового навантаження ці відтинки не несуть. Координати усіх точок *A, B, C,* що подані на рисунку 2.4 – відомі і визначені у якійсь глобальній системі координат (не показана на рис.2.4, тому що систему координат можна узяти будь-яку). Оскільки точки *A, B, C* визначають локальний симплекс *CAB*, то інші чотири точки D_i необхідно виразити через точки симплексу. Точкові рівняння, що відповідають цій вимозі мають вигляд:

$$D = (A\text{-}C)p+(B\text{-}C)q+C \qquad (2.51)$$

У роботі [10] у якості параметрів $p\ i\ q$ розглядались відношення площ трикутників, у нашій роботі пропонується використовувати відношення довжин відтинків.

Для точки $D_{i\text{-}1}$: $p_{i\text{-}1}=\frac{D_{i\text{-}1}A_{i\text{-}1}}{AA_{i\text{-}1}}$; $q_{i\text{-}1}=\frac{D_{i\text{-}1}B_{i\text{-}1}}{BB_{i\text{-}1}}$;

для точки D_i: $p_i=\frac{D_iA_i}{AA_i}$; $q=\frac{D_iB_i}{BB_i}$;

для точки D_{i+1}: $p_{i+1}=\frac{D_{i+1}A_{i+1}}{AA_{i+1}}$; $q_{i+1}=\frac{D_{i+1}B_{i+1}}{BB_{i+1}}$;

для точки D_{i+2}: $p_{i+2}=\frac{D_{i+2}A_{i+2}}{AA_{i+2}}$; $q_{i+2}=\frac{D_{i+2}B_{i+2}}{BB_{i+2}}$.

Виходячи з (2.51), та враховуючи визначені параметри, запишемо точкові рівняння для означених точок:

$$D_{i\text{-}1} = (A - C)p_{i\text{-}1} + (B - C)q_{i\text{-}1} + C \qquad (2.52)$$

$$D_i = (A - C)p_i + (B - C)q_i + C \qquad (2.53)$$

$$D_{i+1} = (A - C)p_{i+1} + (B - C)q_{i+1} + C \qquad (2.54)$$

$$D_{i+2} = (A - C)p_{i+2} + (B - C)q_{i+2} + C \qquad (2.55)$$

Використовуючи чотири точки (2.52) – (2.55) можемо побудувати одну точку загущення $D_{i+0,5}$ у трикутникуΔD_iD_{i+1}К. Перші дві точки з цього трикутника D_i та D_{i+1} визначені у симплексі *CAB* (2.55) та (2.54). Необхідно визначити останню вершину трикутника – точку К. Знайдемо її як результат перетину прямих $D_{i-1}D_i$ та $D_{i+1}D_{i+2}$. Для цього на прямій $D_{i-1}D_i$ введемо змінювану точку *P*, точкове рівняння якої матиме вигляд (рис. 2.4):

$$P = (D_{i\text{-}1}\text{-}D_i)u+D_i \qquad (2.56)$$

Переміщуючи точку *P* по прямій $D_{i-1}D_i$ шляхом зміни параметру u, необхідно обрати таке його значення, щоб площа трикутника $S_{D_{i+1}D_{i+2}P}$ опинилась рівною нулю, або іншими словами, щоб три точки

P, D_{i+1}, D_{i+2} знаходились на одній прямій. Як відомо [18, 88, 127, 182], за умовою колінеарності, щоби точка P належала прямій $D_{i+1}D_{i+2}$ необхідно щоби визначник, який віддзеркалює точкове рівняння прямої, дорівнював нулю. Складемо цей визначник, але спочатку у точкове рівняння (2.56) підставимо точкові рівняння (2.52) та (2.53), що визначають точки D_i та D_{i-1}.

У кінцевому варіанті, зручним для подальших дій маємо:

$$P = (A - C)(u(P_{i-1} - P_i) + P_i) + (B - C)(u(q_{i-1} - q_i) + q_i) + C \quad (2.57)$$

Таким чином визначник, за допомогою якого буде утворюватися точкове рівняння прямої $D_{i+1}D_{i+2}$, на якій буде знаходитися точка P, складемо з параметрів точкових рівнянь (2.57), (2.54) та (2.55). У першому рядку визначника змінні параметри точки P, у другому – незмінні параметри точки D_{i+1}, у третьому - D_{i+2}, дістанемо:

$$\begin{vmatrix} u(p_{i-1} - p_i) + p_i & u(q_{i-1} - q_i) + q_i & 1 \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \\ p_{i+2} & q_{i+2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.58)$$

Розкриємо його:

$$u(p_{i-1} - p_i)q_{i+1} + p_i q_{i+1} + u(q_{i-1} - q_i)p_{i+2} + q_i p_{i+2} + p_{i+1}q_{i+2} - u(p_{i-1} - p_i)q_{i+2} - p_i q_{i+2} - u(q_{i-1} - q)p_{i+1} - q_i p_{i+1} - p_{i+2}q_{i+1} = 0$$

Звідки визначимо параметри:

$$u = \frac{p_{i+2}q_{i+1} + q_i p_{i+1} + p_i q_{i+2} - p_{i+1}q_{i+2} - p_{i+1}q_{i+2} - q_i p_{i+2} - p_i q_{i+1}}{(p_{i-1} - p_i)q_{i+1} + (q_{i-1} - q_i)p_{i+2} - (p_{i-1} - p_i)q_{i+2} - (q_{i-1} - q_i)p_{i+1}} \quad (2.59)$$

Якщо число із (2.59) прирівняти до d, дістанемо:

$$d = \frac{P_{i+2}(q_{i+1} - q_i) + P_{i+1}(q_i - q_{i+2}) + P_i(q_{i+2} - q_{i+1})}{(P_{i-1} - P_i)(q_{i+1} - q_{i+2}) + (q_{i-1} - q_i)(P_{i+2} - P_{i+1})} \quad (2.60)$$

Підставимо число d із (2.60) у (2.57), отримаємо шукану точку K:

$$K = P = (A-C)(d(p_{i-1} - p_i) + p_i) + (B-C)(d(q_{i-1} - q_i) + q_i) + C \quad (2.61)$$

У трикутнику $\Delta D_i D_{i+1} K$, винесемо його зображення з рис. 2.4 на окремий рисунок 2.5, розрахуємо точку загущення $D_{i+0,5}$. У роботі [10] обґрунтовано безліч можливих варіантів вибору точки загущення, на наш погляд, найпростішим є розрахунок точки загущення як центра ваги трикутника $\Delta D_i D_{i+1} K$.

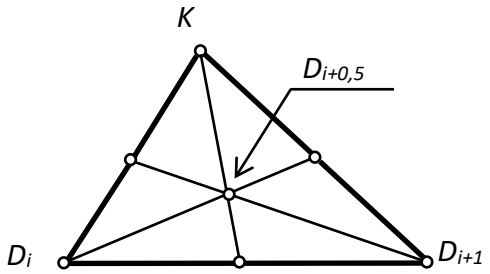


Рис. 2.5. Визначення точки загущення

$$D_{i+0,5}=\frac{D_i+D_{i+1}+K}{3} \tag{2.62}$$

Розрахункові формули координат точки загущення у глобальній системі координат матимуть наступний вигляд:

$$\begin{aligned} x_{i+0.5}&=\frac{x_i+x_{i+1}+x_k}{3}\\ y_{i+0.5}&=\frac{y_i+y_{i+1}+y_k}{3}\\ z_{i+0.5}&=\frac{z_i+z_{i+1}+z_k}{3} \end{aligned} \tag{2. 63}$$

Таким чином, вище було розглянуто спосіб побудови однієї точки загущення $D_{i+0,5}$ з використанням формалізованого геометричного апарату точкового БН-числення. Для побудови наступної точки загущення необхідно зрушитись на один крок і повторити увесь алгоритм для наступних чотирьох точок і так далі за усіма точками точкового ряду ДПК. При виконанні процесу згущення ДПК, на кожному кроці обирався симплекс загального вигляду, коли точки, що його визначали, не співпадали з точками ДПК. В результаті чого розрахункові формули виявились громіздкими, а обчислення за цими формулами збільшує витрати ресурсів. Симплекс загального вигляду можна назвати нуль частинним.

Одночастинним симплексом будемо називати симплекс, вершина або одна з точок, що його визначають, співпадають з будь-якою точкою ДПК (рис. 2.6). Треба зауважити, що у наведених прикладах а), б), в) точки симплексу A, B, C, як показано, співпадають з точкою D_{i-1}, але це не обов'язково, можливо їхнє співпадання із іншими точками ДПК - $D_i, D_{i+1},\ D_{i+2}$.

Рис. 2.6. Приклади одночастинних симплексів: а) – вершина $C=D_{i-1}$; б) точка симплексу $A=D_{i-1}$; в) точка симплексу $B=D_{i-1}$.

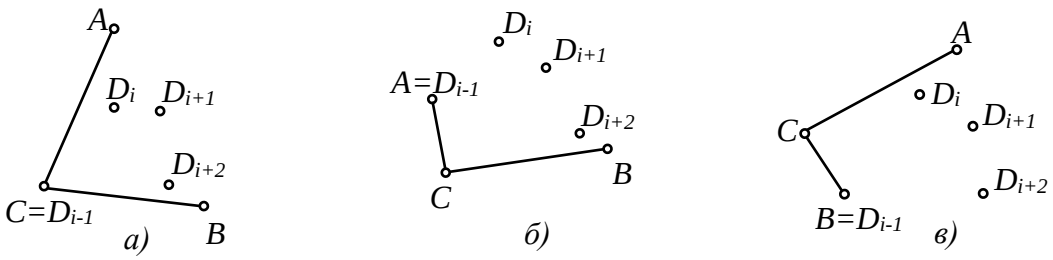


Рис. 2.6. Приклади одночастинних симплексів: а) – вершина $C=D_{i-1}$; б) точка симплексу $A=D_{i-1}$; в) точка симплексу $B=D_{i-1}$.

Двохчастинним симплексом будемо називати симплекс, коли дві точки, що його визначають співпадають, у різних варіаціях, з точками ДПК (рис. 2.7).

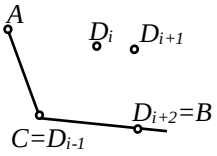


Рис. 2.7. Приклад двохчастинного симплексу

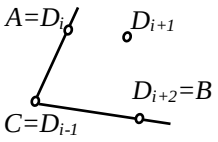


Рис. 2.8. Приклад трьохчастинного симплексу

Трьохчастинним симплексом будемо називати симплекс, коли усі три точки, що його визначають, співпадають, у різних варіаціях, з точками ДПК (рис. 2.8).

Покажемо, наскільки спрощується, у порівнянні з використанням симплексу загального вигляду, розрахунки для одно- , двох-, і трьохчастинного симплексів.

Для прикладу розглянемо одночастинний симплекс, що зображений на рис. 2.6 а), у якого вершина симплексу – точка C збігається з точкою D_{i-1} дискретно поданої кривої.

Завдяки цьому, точкове рівняння (2.52) матиме вигляд:

$$D_{i-1}=C \tag{2.64}$$

Тоді точкове рівняння (2.56) матиме вигляд:

$$P=Cu-(A-C)up_i-(B-C)uq_i-Cu+(A-C)p_i+$$
$$+(B-C)q_i+C=(A-C)p_i(1-u)+(B-C)q_i(1-u)+C \tag{2.65}$$

Визначник (2.58) прийме вигляд:

$$\begin{vmatrix} 1-u & 1-u & 1 \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \\ p_{i+2} & q_{i+2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.66}$$

Розкриємо цей визначник і дістанемо значення параметру u:

$$u=\frac{p_{i+1}q_{i+2}-p_{i+2}q_{i+1}+q_{i+1}+p_{i+2}-q_{i+2}-p_{i+1}}{q_{i+1}+p_{i+2}-q_{i+2}-p_{i-1}}=d \tag{2.67}$$

Як бачимо, для розрахунку d із (2.60) потрібно п'ятнадцять операцій, а із (2.67) – десять, що спрощує розрахунки у порівнянні із застосуванням симплексу загального вигляду.

Підставимо (2.67) у (2.65), дістанемо точку *K*:

$$K = P = (A\text{-}C)(1\text{-}d)p_i + (B - C)(1 - d)q_i + C \qquad (2.68)$$

Розглянемо двохчастинний симплекс, що зображений на рисунку 2.7, у якого його вершина точка $C = D_{i-1}$, а точка $B = D_{i+2}$. У цьому випадку точкові рівняння (2.52) та (2.55) будуть мати, відповідно, вигляд:

$$D_{i\text{-}1}=C; \quad D_{i+2}=B \qquad (2.69)$$

При цьому точкове рівняння (2.65) залишиться без змін, а визначник (2.66) прийме вигляд:

$$\begin{vmatrix} 1-u & 1-u & 1 \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.70)$$

звідки маємо:

$$p_{i+1} - 1 + u = 0;\ u = 1 - p_{i+1}, \rightarrow d = 1 - p_{i+1} \qquad (2.71)$$

Якщо для розрахунку d з використанням одночастинного симплексу необхідно було 10 операцій, то з використанням двохчастинного симплексу – одна, що значно зменшує витрати комп'ютерних та інших ресурсів. У цьому випадку точкове рівняння (2.68) для розрахунку точки *K* по формі залишається без змін, але значення *d* з (2.71) є значно простішим.

І на сам кінець, розглянемо трьохчастинний симплекс, що зображений на рисунку 2.8, у якого усі точки симплексу співпадають з точками вихідної ДПК, тобто, у цьому випадку, для побудови кожної точки загущення зі зрушенням на один крок - обирається новий симплекс на точках ДПК. Маємо:

$$C=D_{i\text{-}1},\ A=D_i,\ B = D_{i+2} \qquad (2.72)$$

Враховуючи (2.72) запишемо (2.56):

$$P = (C - A)u + A = Cu - Au + A = A(1 - u) + Cu \qquad (2.73)$$

Для точок P, D_{i+1}, D_{i+2}, враховуючи (2.54), (2.72) та (2.73), складемо визначник, за допомогою якого здобудемо відповідне значення параметру u.

$$\begin{vmatrix} 1-u & 0 & u \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ , звідкіля}$$

$$up_{i+1} - 1 + u=0;\ u(p_{i+1} + 1)=1;\ u=\frac{1}{p_{i+1}+1} \rightarrow d = \frac{1}{p_{i+1}+1} \quad (2.74)$$

Обчислення точки K (2.75) з використанням трьохчастинного симплексу, у порівнянні з (2.68) та (2.61), є найменш витратним. Тому, у разі наявної можливості, з метою економії ресурсів, треба застосовувати, для згущення ДПК, трьохчастинні симплекси.

В усіх, розглянутих вище, випадках вершиною симплексів обиралася точка *C*, а дві інші – *A* і *B* утворювали симплекси. У разі, коли вершиною симплексу буде обрано точку *A* або точку *B*, необхідно буде в усі отримані раніше точкові рівняння та розрахункові формули внести, у відповідності до [185], необхідні зміни.

Підсумовуючи, треба зауважити, що спосіб супровідних трикутників можна застосовувати для ДПК, що мають точки зламу, точки звороту, точки перегину, для ДПК, які є замкненими або незамкненими. Наявність таких можливостей способу є важливим для побудови горизонталей топографічної поверхні, які подані формалізованою геометричною моделлю або у оцифрованому вигляді.

Для прикладу, розглянемо згущення ДПК, яка здобута у результаті сканування половини кленового листа і утримує усі згадані точки (рис. 2.9) [136]. На основі, розглянутого у цьому підрозділі, способу супровідних трикутників для ДПК, була розроблена програма (Додаток А), яка спроможна проводити згущення ДПК довільної форми. За допомогою цієї програми було проведено згущення дискретно поданого плоского профілю кленового листка. Профіль листка спочатку було скановано, потім обрано 100 точок, що характеризують його профіль і проведено згущення. Результат роботи показано на рисунку 2.9.

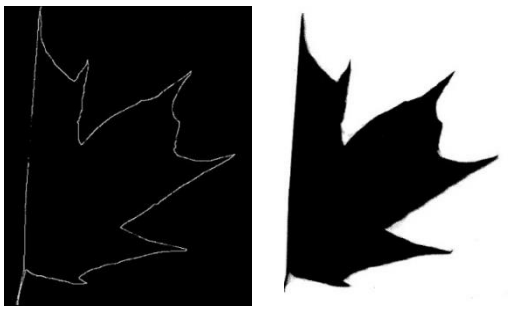


Рис. 2.9. Згущений точковий ряд (ліворуч) та скан листка (праворуч)

У роботі [146] також показано можливість застосування способу супровідних трикутників для моделювання консольної поверхні типу крила зі змінним профілем перетину.

Як бачимо, застосування супровідних трикутників для дискретно поданої кривої або неперервних кривих на яких було обрано вузлові точки, можна виконати згущення з будь-якою наперед заданою щільністю. Для підвищення точності дискретного згущення потрібно збільшувати кількість вузлових точок. У подальших дослідженнях спосіб супровідних трикутників буде використовуватись для відтворення горизонталей топографічних поверхонь, що описують рельєф земельних ділянок.

2.4 Дослідження точності згущення плоскої кривої

У роботі [10] було вперше запропоновано спосіб побудови дискретно поданої кривої (ДПК) із застосуванням функціоналу Балюби [9], який дозволяє використовувати при згущенні різноманітні криві-параметри. У роботі [10] були наведені приклади використання способу, але не було досліджено закономірність застосування тих чи інших кривих-параметрів для різних типів ДПК. Враховуючи дану обставину, виникає необхідність дослідити та знайти певну залежність вибору кривої-параметру від типу ДПК.

У роботі [10] наголошується, що отриманий спосіб інтерполяції з використанням функціоналу Балюби є гнучким та універсальним і може бути застосований як для побудови нових сегментів кривих, так і для згущення вже існуючих дискретно поданих кривих ліній. Також слід звернути увагу, що функціонал Балюби можна використовувати для забезпечення варіативності моделювання сегментів кривих ліній шляхом зміни елементарних неперервних функцій, що дозволяє змінювати та обирати форму сегменту ДПК.

У цьому підрозділі проводиться аналіз зазначеного способу побудови ДПК, з метою виявлення його можливостей, встановлення вад та переваг і окреслення меж застосування. Результати цих досліджень викладено у статті [136].

Варіативне дискретне геометричне моделювання (ВДГМ) передбачає, у процесі згущення ДПК, знаходити за кожним кроком згущення по одній точці всередині ділянки, положення якої визначається з урахуванням форми ДПК на базі геометричних співвідношень вузлових точок. Для досягнення певної щільності точок загущення, треба виконати значну кількість послідовних згущень, яка потребує відносно великої кількості витрат часу. З метою зменшення

цих витрат, у цьому підрозділі пропонується моделювання неперервної дуги обводу, що прискорить процес згущення . Цей спосіб пропонується застосовувати, коли форма ДПК на якійсь ділянці, у процесі її моделювання, не потребує варіативних досліджень.

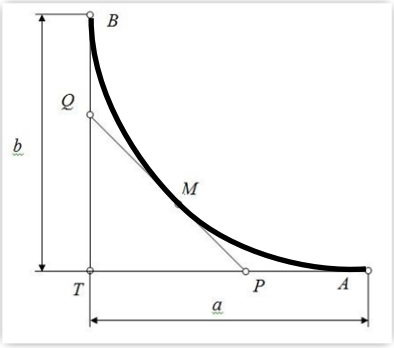


Рис. 2.10. Прямокутний симплекс загального вигляду

Нехай задано трьома точками *A, B, T* прямокутній симплекс *TAB* (рис. 2.10) у глобальній системі координат *Oxy* (яка не показана на рис. 2.10).

Необхідно визначити множину дуг кривих, які проходять через точки *A* і *B* таким чином, що пряма *AT* є дотичною до дуги *M* у точці *A*, *BT* – у точці *B*. Вживаючи тут вираз дуга кривої, мається на увазі, що точкове рівняння, яке буде побудовано для умов даної задачі, буде визначати криву тільки у межах від точки *A*. до точки *B*. Якщо потрібно побудувати дугу за межами точок *A* і *B*, то необхідно використовувати інші співвідношення та інші симплекси.

Позначимо $AT = a$ і $BT = b$. Для визначення дуги *AMB* у її змінюваній точці *M* задамо дотичну, яка утворюється двома доповняльними променями *MP* і *MQ*, і при цьому точки *P* і *Q* є тангенціальними проекціями змінюваної точки *M*, відповідно на сторони симплексу *AT* і *BT*.

Тангенціальні проекції P і Q знаходимо за допомогою функцій $u = u(t)$ і $v = v(t)$ відповідно, для яких параметр $0 \le t \le 1$. Геометрично пояснити ці фунції можна як відношення відрізків:

$$u = \frac{AP}{AT};\ v = \frac{TQ}{TB}.$$

Тангенціальні проекції P і Q, відповідно на сторонах AT і BT ортогонального симплексу ТАВ, визначається таким чином:

$$P = A\bar{u} + Tu,\ Q = T\bar{v} + Bv,\ \text{де}\ \bar{u} = 1 - u,\ \bar{v} = 1 - v \qquad (2.76)$$

Якщо параметр t змінювати від 0 до 1, то точка *P* буде переміщуватись по відрізку *AT* від точки *A* при $t = 0$, до точки *T* при $t = 1$, а точка Q - по відрізку *TB* від точки *T* при $t = 0$, до точки *B* при $t = 1$. Таким чином, при $t = 0$ дотична PQ співпадає зі стороною симплексу *AT*. Тобто, *AT* стає дотичною до кривої *M* у точці *A*, і аналогічно при $t = 1$, ТВ стає дотичною до кривої *M* у точці *B*. Сторони

симплексу AT і TB є кінцевими дотичними відрізками в одно параметричній множини дотичних відрізків PQ при $0 \le t \le 1$. Огинаюча лінія цих дотичних відрізків буде визначати шукану дугу *AMB*. Змінювана точка *M*, огинаючої дуги кривої *AMB*, визначається на дотичній PQ за допомогою наступного відношення відрізків на цій дотичній $w=\frac{PM}{PQ}$ і виражається через функції $\bar{u}=1-u, \bar{v}=1-v$ та їх похідні $\dot{u}=\frac{du}{dt}, \dot{v}=\frac{dv}{dt}$,наступним чином:

$$M = P\bar{w} + Qw, \text{ де } w = \frac{\dot{u}v}{\dot{u}v + \bar{u}\dot{v}}, \tag{2.77}$$

$$\bar{w} = 1 - w = 1 - \frac{\dot{u}v}{\dot{u}v + \bar{u}\dot{v}} = \frac{\bar{u}\dot{v}}{\dot{u}v + \bar{u}\dot{v}} \rightarrow \bar{w} = \frac{\bar{u}\dot{v}}{\dot{u}v + \bar{u}\dot{v}}$$

Після підстановки в (2.77), замість P та Q точкових співвідношень з (2.76) і виконання перетворень, отримаємо:

$$M = (A\bar{u}^2 - Tu^2)\frac{\dot{v}}{\dot{u}v + \bar{u}\dot{v}} + (B - T)\frac{\dot{u}v^2}{\dot{u}v + \bar{u}\dot{v}} + T\frac{u\dot{v} + \dot{u}v}{\dot{u}v + \bar{u}\dot{v}} \tag{2.78}$$

Для проведення дослідження було взято дискретний ряд точок на схематичному зображенні об’єкта живої природи (кленового листка) (рис.2.11).

Для згущення даного ряду вищеназваним способом використовувались наступні пари функцій:

Парабола $(u = t^2 + t + k)$ та пряма $(v = pt + n)$; парабола $(u = t^2 + t + k)$ та парабола $(v = t^2 + t + k)$; парабола $(u = t^2 + t + k)$ та гіпербола $(v = p/t)$; гіпербола $(u = p/t)$ та пряма $(v = pt + n)$; гіпербола $(u = p/t)$ та гіпербола $(v = p/t)$; синусоїда $(u = \sin t)$ та косинусоїда $(v = \cos t)$; синусоїда $(u = \sin t)$ та синусоїда $(v = \sin t)$.

Порівняння проводилося наступним чином: після вибору ділянки кривої (довжина ділянки дорівнює 20 мм.), бралася вибірка з 30 точок цієї кривої для проведення дослідження; проводився процес згущення цих точок (окремо для 10, 20 та 30 точок); після проведення згущення, бралася вибірка з 20 точок отриманого загущеного точкового ряду та проводилося порівняння отриманих загущених точок та точок на досліджуваному об’єкті (відхилення отриманих та існуючих точок фіксувалося та заносилося у таблицю 2.1).

Як можна побачити з таблиці 2.1, найбільш точно повторює форму досліджуваного об’єкту саме дуга кривої, у основу якої було покладено синусоїдальну функцію.

У результаті проведеного дослідження можна зробити висновок, що точність побудови ДПК цілком залежить від вибору елементарних функцій, які можна використовувати під час застосування цього способу. Досвід, отриманий у результаті досліджень способу інтерполяції з використанням функціоналу Балюби, буде використано у процесі побудови горизонталей топографічної поверхні у подальших дослідженнях.

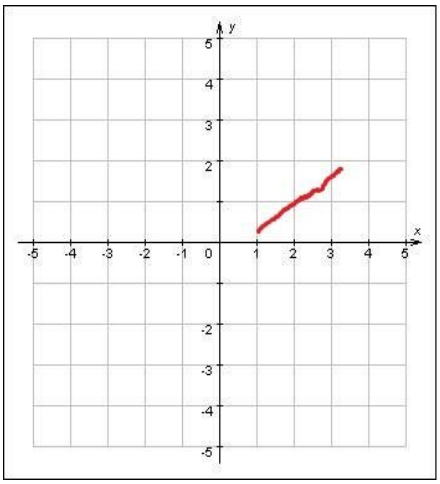


Рис. 2.11. Ділянка кривої, що обрана для проведення дослідження

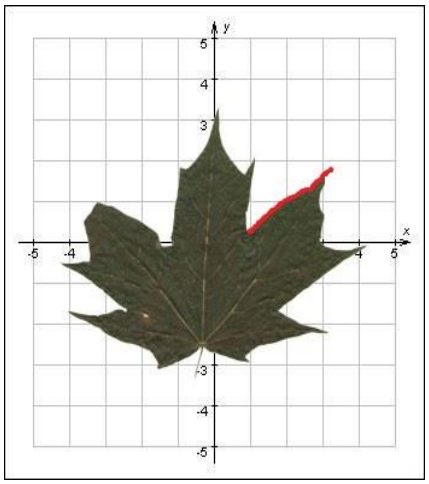


Рис. 2.12.Зображення досліджуваного об’єкту живої природи

Таблиця 2.1

Результати порівняння залежності вибору кривої від типу ДПТР

Функція	Парабола, пряма	Парабола	Парабола, гіпербола	Гіпербола, пряма	Гіпербола	Синусоїда, косинусоїд	Синусоїда
для 30 точок	0,4	0,5	0,3	0,7	0,4	0,2	0,1
для 20 точок	0,5	0,5	0,4	1	0,5	0,2	0,2
для 10 точок	0,5	0,6	0,5	1	0,6	0,3	0,2

2.5 Геометричне подання властивостей метричного оператора трьох точок прямої

Необхідність розгляду у цьому підрозділі метричного оператора трьох точок прямої продиктована його широким використанням у доведеннях при розв'язанні задач у подальших дослідженнях. І щоб у кожній задачі не пояснювати правила його утворення, розглянемо їх.

Особливістю точкового БН-числення є те, що кожній геометричній операції завжди поставлено у відповідність число, яке визначається як відношення однорідних геометричних об'єктів, одним з яких є відомий об'єкт або його властивість, що знаходиться у певному симплексі, відносно цього геометричного об'єкта, з використанням відомого числа, визначається розмір іншого геометричного об'єкту, що знаходиться у цьому симплексі. Якщо за симплекс узяти відтинок *AB*, то відношення усіх інших відтинків до *AB* буде породжувати числа, що носять загальну назву – просте відношення трьох точок прямої. Пряма являє собою одновимірну множину точок. Двовимірна множина точок визначається симплексом з трьох точок, у якому будь-які інші три точки, які розташовані довільним чином, визначають число, що відповідає їхньому взаємному розташуванню. Це число називають метричним оператором трьох точок прямої, яке являє собою добуток двох направлених відтинків прямої [185].

Нехай на рисунку 2.13 задані три точки *A, B, C,* точка H_C - основа перпендикуляру CH_C, який опущений з точки *C* на пряму *AB*. Добутком довжини відтинку AH_C на довжину відтинку *AB* є число, що визначає метричний оператор трьох точок прямої, який позначається: $\sum_{BC}^{A}$ (читається – «сигма *BC* при вершині *A*») і дорівнює:

$$\sum\nolimits_{BC}^{A} = AH_C * AB = \sum (B\text{-}A)(C\text{-}A) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_{B_i}\text{-}x_{A_i}\right)\left(x_{C_i}\text{-}x_{A_i}\right), \quad (2.79)$$

де n - натуральне число, що дорівнює вимірності простору, у якому знаходяться вихідні точки *A, B, C*.

Для більшого розуміння сенсу метричного оператора трьох точок прямої, який введено та широко застосовується у точковому БН-численні, є необхідними надати геометричне подання його властивостей. Наявність зображень геометричних схем, що відповідають символьному запису геометричних операторів трьох

точок прямої, усунуть проблему їхнього застосування у формалізованому геометричному моделюванні [185].

У роботі [145] було розглянуто задачу геометричної інтерпретації деяких властивостей метричного оператора трьох точок прямої, але без пояснення її застосування у формалізованому геометричному моделюванні.

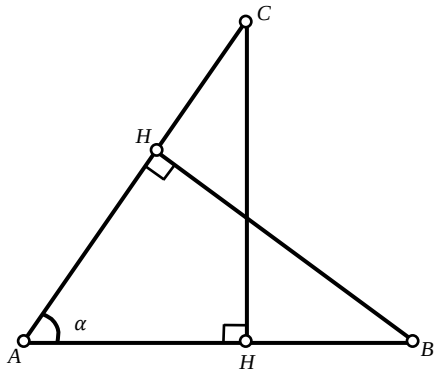


Рис. 2.13. Схема метричного оператора трьох точок прямої

У цьому дослідженні поставлено ціль – розробити геометричні схеми для деяких символьних записів метричного оператора трьох точок прямої, що наділені певними особливостями, використання яких у подальших дослідженнях буде доцільним і спростить розрахункові рівняння.

Нехай у якомусь симплексі визначено три точки *A, B, C*. Призначимо вершину метричного оператора трьох точок прямої (далі будемо писати «метричного оператора»), наприклад, *A*. Тоді можемо символьно записати два метричних оператора при вершині *A*:

$$\sum_{BC}^{A} \text{ та } \sum_{CB}^{A} \quad (2.80)$$

Як бачимо, у цих метричних операторах переставлені місцями букви нижніх індексів. За визначенням метричний оператор має наступний геометричний сенс (рис. 2.13) для випадків (2.80):

$$\sum_{BC}^{A} = AB \cdot AH_C = AB \cdot AC \cdot \cos a = \sum(B-A)(C-A) \quad (2.81)$$

$$\sum_{CB}^{A} = AB \cdot A\,H_C = AB \cdot AC \cdot \cos a = \sum(C-A)(B-C) \quad (2.82)$$

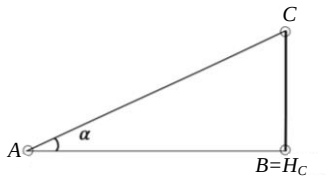


Рис. 2.14. Особливий випадок метричного оператора $H_C = \text{B}$

Це означає, що перестановка місцями букв у нижньому індексі не змінює значення для метричного оператора для визначених трьох точок прямих *AB* та *AC*.

Розглянемо випадок, коли $H_C = B$ (рис. 2.14), тоді у виразі (2.81) маємо право, у прийнятих позначеннях точок, зробити наступний запис:

$$\sum_{BB}^{A} = \sum(B-A)(C-A) - \sum(B-A)(B-A) - \sum(B-A)^2 \quad (2.83)$$

звідки довжина відрізка $|AB|$ дорівнює:

$$|AB| = \sqrt{\sum_{BB}^{A}} = |A-B| \quad (2.84)$$

Розглянемо випадок, коли $H_\text{B} = C$ (рис. 2.15), тоді у виразі (2.82) робимо відповідну заміну букв:

$$\sum_{CC}^{A} = (C-A)(B-A) = \sum(C-A)(C-A) = \sum(C-A)^2$$

Звідки довжина відрізку $|AC|$ дорівнює:

$$|AC| = \sqrt{\sum_{CC}^{A}} = |A-C| \quad (2.85)$$

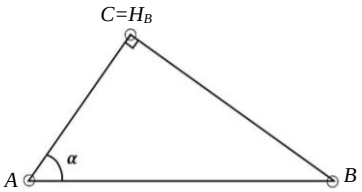


Рис.2.15. Особливий випадок метричного оператора $H_B = \text{C}$

Робимо висновок, якщо метричний оператор, у символьному його записі, має у нижньому індексі дві однакові букви, то він представляє квадрат довжини відрізків $(AB)^2$ або $(AC)^2$.

Розглянемо випадки, коли метричний оператор має однакові букви у верхньому та нижньому індексах:

$$\sum_{AB}^{A},\ \sum_{AC}^{A}, \sum_{AB}^{B}, \sum_{BC}^{B}, \sum_{AC}^{C}, \sum_{BC}^{C}.$$

Для $\sum_{AB}^{A}$ геометрична схема має вигляд (рис. 2.16). Як бачимо, $H_C = A$, тобто відрізок AH_C дорівнює нулю ($cos\,90° = 0$). В результаті вираз (2.81) прийме вигляд:

$$\sum_{AB}^{A} = AB \cdot 0 = AB \cdot AC \cdot \cos 90° = 0.$$

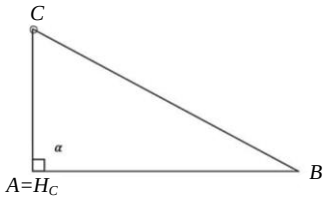


Рис.2.16. Для метричного оператора $\sum_{AB}^{A}$

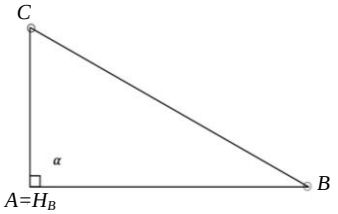


Рис.2.17. Для метричного оператора $\sum_{AC}^{A}$

Для $\sum_{AC}^{A}$ (рис. 2.17) аналогічно можемо записати (2.82) в такому вигляді:

$$\sum_{AC}^{A} = AC \cdot 0 = AC \cdot AB \cdot \cos 90° = 0$$

Для метричних операторів $\sum_{AB}^{B}$ та $\sum_{BC}^{B}$ наведемо тільки геометричні схеми, (рис. 2.18) та (рис.2.19) відповідно.

Для $\sum_{AB}^{B} = 0$, відрізок $BH_C = 0$ та $\cos\beta = \cos 90° = 0$.

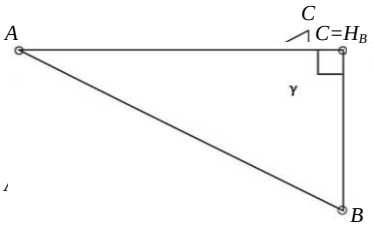


Рис. 2.20. Для метричного оператора $\sum_{AC}^{C}$

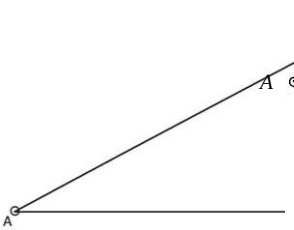


Рис. 2.19. Для метричнс оператора $\sum_{BC}^{B}$

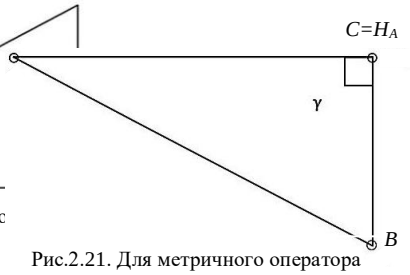


Рис.2.21. Для метричного оператора $\sum_{BC}^{C}$

Для $\sum_{BC}^{B} = 0$, відрізок $BH_A = 0$ та $\cos 90° = 0$.

Для $\sum_{AC}^{C} = 0$, відрізок $CH_B = 0$ та $\cos\gamma = \cos 90° = 0$ (рис. 2.20).

Для $\sum_{BC}^{C} = 0$, відрізок $CH_A = 0$ та $\cos\gamma = 0$, (рис. 2.21).

Підсумовуючи сказане, робимо висновок, що метричні оператори визначають прямокутний трикутник:

$\sum_{BB}^{A}$ у точці $C, \gamma = 90°$; $\sum_{CC}^{B}$ у точці $A, \alpha = 90°$; $\sum_{CC}^{C}$ у точці $B, \beta = 90°$;

$\sum_{AB}^{A}\sum_{AC}^{A}$ у точці $A, \alpha = 90°$; $\sum_{AB}^{B}\sum_{BC}^{B}$ у точці $B, \beta = 90°$; $\sum_{AC}^{C}\sum_{BC}^{C}$ у точці $C, \gamma = 90°$

Як бачимо, перші три варіанти визначають прямий кут не у вершині метричного оператора, а останні три варіанти навпаки, визначають прямий кут у вершині метричного оператора.

Враховуючи сказане, якщо у процесі розв'язку задачі, що дорівнюють нулю $\sum_{BC}^{A} : \sum_{AC}^{B} : \sum_{AB}^{C} = 0$, то їх слід прийняти, як оператори, відповідно:

$$\sum_{AC}^{A} : \sum_{BC}^{A} : \sum_{AB}^{B} : \sum_{BC}^{B} : \sum_{BC}^{C} : \sum_{AC}^{C} = 0.$$

Наостанок, розглянемо геометричний сенс метричних операторів, у яких і верхній і нижній індекси позначені однаковою буквою:

$$\sum_{AA}^{A} : \sum_{BB}^{B} : \sum_{CC}^{C} = 0.$$

За допомогою таких операторів визначаються точки, відповідно, *A, B, C*.

Використовуючи розглянуті особливі метричні оператори трьох точок прямої, можна обирати відповідним чином числа (координати), що будуть гарантувати, у формалізованому геометричному моделюванні, визначення трикутника з необхідними властивостями.

Друга перевага метричних операторів полягає у спрощенні запису точкових формул, виразів рівнянь. Завдяки цьому, розв'язання задач з їхнім застосуванням набуває компактності. Матеріал цього підрозділу опубліковано у роботі [145].

2.6. Визначення точки дотику прямої та кривої із застосуванням метричних операторів.

Для методів традиційної математики задача визначення точки дотику прямої та кривої не має новизни і доволі давно уже є розв'язаною. Але для плоских кривих, що знаходяться на топографічній поверхні, використання традиційних методів побудови дотичної до кривої, яка проведена з довільної точки, що не належить цій кривій, але знаходиться у її площині, є доволі проблемним. У процесі вертикального планування, задача знаходження точки дотику між прямою та топографічною плоскою кривою буде зустрічатися доволі часто. Способи точкового БН-числення дозволяють дістати точкове рівняння плоскої топографічної кривої (далі буде це показано). І тому, для точкового рівняння кривої, у роботах Найдиша В.М., Балюби І.Г., Верещаги В.М., Найдиша А.В., Конопацького Є.В., Давиденка І.П., Бездітного А.О. [9, 14, 32, 85, 86, 123, 185], розглядалися та розв'язувалися задачі побудови дотичної, при цьому у всіх розв'язках на кривих, що були задані точковими рівняннями, точка дотику була відомою, треба було побудувати дотичну до заданої кривої. У роботі [39] і у цьому підрозділі вперше ставиться та розв'язується зворотна задача, а саме, з відомої точки, що не належить плоскій кривій *M* і знаходиться у її площині, до кривої *M*, яка задана точковим рівнянням, необхідно провести дотичну пряму, тобто, визначити точку дотику на кривій *M*.

Для розв'язання цієї задачі, спочатку розглянемо властивість метричного оператора трьох точок прямої (далі – метричного оператора), яка у символьному запису, для вершини *A*, має вигляд:

$$\sum_{BC}^{A} = \sqrt{\sum_{BB}^{A} \cdot \sum_{CC}^{A}}; \tag{2.86}$$

для вершини *B* метричного оператора:

$$\sum_{AC}^{B} = \sqrt{\sum_{AA}^{B} \cdot \sum_{CC}^{B}}; \tag{2.87}$$

для вершини *C* метричного оператора:

$$\sum_{AB}^{C} = \sqrt{\sum_{AA}^{C} \cdot \sum_{BB}^{C}}; \tag{2.88}$$

у цьому випадку, для (2.86) $\angle\alpha = 0°; 180°$; для (2.87) $\angle\beta = 0°; 180°$; для (2.88) $\angle\gamma = 0°; 180°$, а площа S_{ABC} трикутника ΔABC, при цьому, дорівнює нулю:

$$S_{ABC} = 0.$$

Розглянемо із (2.86)

$$\sum_{BB}^{A} = \sum (B-A)(B-A) \Rightarrow \sqrt{\sum_{BB}^{A}} = \sum (B-A) \tag{2.89}$$

$$\sum_{CC}^{A} = \sum (C-A)(C-A) \Rightarrow \sqrt{\sum_{CC}^{A}} = \sum (C-A) \tag{2.90}$$

Якщо перемножити (2.89) та (2.90), отримаємо:

$$\sqrt{\sum_{BB}^{A} \cdot \sum_{CC}^{A}} = \sum (B-A) \cdot \sum (C-A) = \sum (B-A)(C-A) \tag{2.91}$$

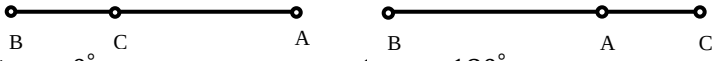
Якщо ліву частину (2.86) розподілити на складові, то за визначенням метричного оператора, отримаємо:

$$\sum_{BC}^{A} = \sum (B-A)(C-A) \tag{2.92}$$

Як бачимо, праві частини у (2.91) та (2.92) однакові, що означає, що властивість метричного оператора, яка символьно, у трьох можливих варіантах, показана у (2.86), (2.87), (2.88) є справедливою.

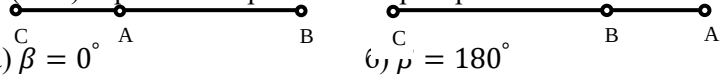
Геометричне зображення цієї властивості подано на рис. 2.22:

- варіант (2.86), вершина метричного оператора – точка *A*



а) $\alpha = 0^{\circ}$ б) $\alpha = 180^{\circ}$

- варіант (2.87) вершина метричного оператора – точка *B*



а) $\beta = 0^{\circ}$ б) $\beta = 180^{\circ}$

- варіант (2.88) вершина метричного оператора – точка *C*

а) $\gamma = 0^{\circ}$ б) $\gamma = 180^{\circ}$

Далі викладення доведень будемо записувати точки для варіанту (2.86), коли вершина метричного оператора є точка *A*. Нехай у симплексі $A_1A_2A_3$ точковим рівнянням (2.92) задана плоска крива *M* (рис. 2.23):

$$M = (A_2 - A_1)p(t) + (A_3 - A_1)q(t) + A_1 \qquad (2.92)$$

У площині цієї кривої (2.92.) довільно обираємо (рис. 2.23) точку *A* у тому ж таки симплексі $A_1A_2A_3$. Точкове рівняння точки *A* матиме вигляд:

$$A = (A_2 - A_1)p_A + (A_3 - A_1)q_A + A_1 \qquad (2.93)$$

На рис. 2.23 буквою *T* позначено шукану точку дотику прямої *AT* до кривої *M*. Змінювані точки позначені буквами M_B і M_C. Для визначення точки дотику *T*, скористаємося властивістю метричного оператора трьох точок прямої [185], яку викладемо у відповідності до геометричної схеми (рис. 2.23). У цій властивості відзначається, що дотримання рівності метричного оператора $\sum^{A}_{M_BM_C}$ кореня квадратного з добутку метричних операторів $\sum^{A}_{M_BM_C} \cdot \sum^{A}_{M_CM_C}$ визначає площу ΔAM_BM_C, яка дорівнює нулю (2.99). Враховуючи це, змінюємо положення точок M_B та M_C, залишаючи повсякчас їх на кривій *M*, то у момент їхнього співпадання $M_B = M_C = T$, утворюється точка дотику *T*. З геометричної точки зору це відповідає рівності відрізків $AM_B = AM_C = AT$. Використовуючи (2.92) визначимо точки M_B, рівняння (2.94) та M_C, рівняння(2.95):

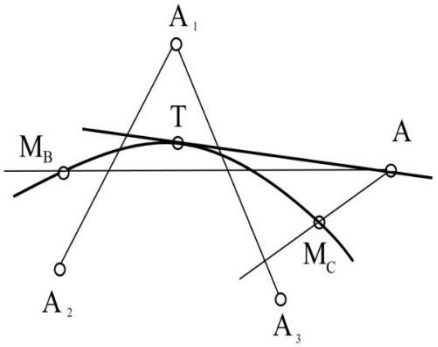


Рис. 2.23. Геометрична схема побудови дотичної *AT*

$$M_B = (A_2 - A_1)p(t_B) + (A_3 - A_1)q(t_B) + A_1 \qquad (2.94)$$

$$M_C = (A_2 - A_1)p(t_C) + (A_3 - A_1)q(t_C) + A_1 \qquad (2.95)$$

Або у іншому вигляді:

$$M_B = A_1\big(1 - p(t_B) - q(t_B)\big) + A_2p(t_B) + A_3q(t_B) \qquad (2.96)$$

$$M_C = A_1\big(1 - p(t_C) - q(t_C)\big) + A_2p(t_C) + A_3q(t_C) \qquad (2.97)$$

Аналогічним чином визначимо точку дотику

$$T = A_1\big(1 - p(t_T) - q(t_T)\big) + A_2p(t_T) + A_2p(t_T) + A_3q(t_T) \qquad (2.98)$$

Враховуючи згадану вище властивість метричного оператора трьох точок прямої:

$$\sum^{A}_{M_BM_C} = \sqrt{\sum^{A}_{M_BM_B} \cdot \sum^{A}_{M_CM_C}} \qquad (2.99)$$

та застосовуючи *S*-теорему [44] для вимірювання площею $\Delta A_1A_2A_3$ площ двох трикутників ΔAM_BT і ΔAM_CT, та поставивши вимогу, щоб площі $S_{\mathrm{AM_BT}}$ і $S_{\mathrm{AM_cT}}$ дорівнювали нулю, дістанемо два визначника (2.100) та (2.101), що дорівнюють нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 - p_A - q_A & p_A & q_A \\ 1 - p(t_B) - q(t_B) & p(t_B) & q(t_B) \\ 1 - p(t_T) - q(t_T) & p(t_T) & q(t_T) \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.100)$$

$$\begin{vmatrix} 1 - p_A - q_A & p_A & q_A \\ 1 - p(t_C) - q(t_C) & p(t_C) & q(t_C) \\ 1 - p(t_T) - q(t_T) & p(t_T) & q(t_T) \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.101)$$

Розв'язавши систему точкових рівнянь відносно $p(t_T)$ та $q(t_T)$, отримаємо значення параметрів, що визначають точку дотику *T*, у якій пряма *AT* дотикається до кривої *M*.

Для цього розкриємо визначник (2.100)

$$(1 - p_A - q_A)\,p(t_B)\,q(t_T) + \,p_A\,q(t_B) - p_A\,q(t_B)p(t_T) -$$
$$- p_A\,q(t_B)q(t_T) + (1 - p(t_B) - q(t_B))\,q_A\,p(t_T) - \,p(t_B)q_A + + p(t_B)q_A\,p(t_T) +$$
$$p(t_B)q_A\,q(t_T) - (1 - p_A - q_A)q(t_B)p(t_T) - -\big(1 - p(t_B) - q(t_B)\big)p_A\,q(t_T) = 0.$$

Після перетворень отримаємо:

$$\left[p(t_B)q_A - p_A q(t_B) + \left(1 - p(t_B) - q(t_B)\right)q_A - (1 - p_A - q_A)q(t_B)\right] \cdot p(t_T) +$$
$$\left[p(t_B)q_A - p_A q(t_B) + (1 - p_A - q_A)p(t_B) - \left(1 - p(t_B) - -q(t_B)\right)p_A\right] \cdot q(t_T) = p(t_B)q_A - p_A q(t_B) \quad (2.102)$$

Якщо у (2.102) коефіцієнт при $p(t_T)$ позначити k_1, а коефіцієнт при $q(t_T)$ позначити через l_1 і праву частину рівняння позначити m_1, то можемо записати:

$$k_1 p(t_T) + l_q(t_T) = m_1 \quad (2.103)$$

Аналогічним чином розкриємо визначник (2.103) у результаті отримаємо:

$$\left[p(t_C)q_A - p_A q(t_C) + \left(1 - p(t_C) - q(t_C)\right)q_A - (1 - p_A - -q_A)q(t_C)\right]p(t_T) +$$
$$[p(t_C)q_A - p_A q(t_C) + (1 - p_A - q_A)p(t_C) - (1 - -p(t_C) - q(t_C))p_A] \cdot q(t_T) = p(t_C)q_A - p_A q(t_C) \quad (2.104)$$

Виконавши аналогічні, як у (2.103) позначення, можемо записати:

$$k_2 p(t_T) + l_2 q(t_T) = m_2 \quad (2.105)$$

Таким чином, отримали систему двох рівнянь з двома невідомими $p(t_T),\ q(t_T)$:

$$k_1 p(t_T) + l_1 q(t_T) = m_1 \quad (2.106)$$
$$k_2 p(t_T) + l_2 q(t_T) = m_2$$

Використаємо правило Крамера [18] для її розв'язання відносно невідомих, у результаті, будемо мати:

$$D = \begin{vmatrix} k_1 & l_1 \\ k_2 & l_2 \end{vmatrix};\ D = \begin{vmatrix} m_1 & l_1 \\ m_2 & l_2 \end{vmatrix};\ D = \begin{vmatrix} k_1 & m_1 \\ k_2 & m_2 \end{vmatrix};$$

Звідки визначимо:

$$p(t_T) = \frac{D_1}{D};\quad q(t_T) = \frac{D_2}{D} \quad (2.107)$$

Підставивши значення $p(t_T)$ та $q(t_T)$ з (2.107) у (2.98), отримаємо координати точки дотику *T*:

$$\begin{aligned} x_T &= x_1(1 - p(t_T) - q(t_T)) + x_2 p(t_T) + x_3 q(t_T) \\ y_T &= y_1(1 - p(t_T) - q(t_T)) + y_2 p(t_T) + y_3 q(t_T) \\ z_T &= z_1(1 - p(t_T) - q(t_T)) + z_2 p(t_T) + z_3 q(t_T) \end{aligned} \quad (2.108)$$

Знаходження точки дотику *T* кривої *M* з прямою, що задані точковими рівняннями, відповідно, (2.92) та

$$AT = [(A_2 - A_1)p_A + (A_3 - A_1)q_A + A_1]u + [A_1\left(1 - p(t_T) - -q(t_T)\right) +$$
$$A_2 p(t_T) + A_3 q(t_T) + A_3 q(t_T)](1 - u), \quad (2.109)$$

з використанням, при цьому, властивості метричного оператора трьох точок прямої має вигляд наступного точкового рівняння: $\sum_{M_B M_C}^{A} = \sqrt{\sum_{M_B M_B}^{A} \cdot \sum_{M_C M_C}^{A}}$ надає перевагу у тому, що не потрібно використовувати диференціювання по параметру точкового рівняння кривої *M* чим значно спрощується кінцеві розрахункові формули і зменшується витрати обчислювальних ресурсів.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

У розділі 2 проведено, з використанням геометричного апарату точкового БН-числення, дослідження способів побудови дискретних та неперервних кривих, які будуть використанні у алгоритмах вертикального планування промислових майданчиків обмежених розмірів.

У результаті, було отримано наступні результати.

1. Розглянувши спосіб побудови параболи другого степеня з використанням геометричного апарату точкового БН-числення, дійшли висновку про можливість його застосування для моделювання топографічних поверхонь та кривих ліній на них; зі стиковкою суміжних сегментів на лініях за нульовим порядком гладкості. Застосування парабол другого степеню у порівнянні із використанням інших кривих, спрощує побудову моделі топографічної поверхні, у результаті, спрощується її програмна реалізація, що призводить до зменшення витрат на ресурси у процесі моделювання.
2. Для моделювання просторових кривих запропоновано, у довільному просторовому симплексі з використанням геометрії БН-числення, алгоритм побудови кривих третього степеня, які проходять через шість наперед визначених точок. Використання цього алгоритму дозволить відтворювати на топографічній поверхні, у процесі вертикального планування промислового майданчика , безліч просторових складених ліній за наперед заданими умовами. Наявність таких можливостей дозволить, при необхідності, будувати структурні лінії у процесі вертикального планування.
3. Розширено можливості способу супровідних трикутників шляхом розробки алгоритму, який дозволяє згущувати точкові ряди, що мають точки зламу, звороту, розриву і таке інше. Використовуючи властивості супровідних трикутників, які виявлено завдяки застосуванню геометричного апарату точкового БН-числення, було оптимізовано розроблені алгоритми згущення дискретно поданих плоских кривих, що мають особливі точки. Наявність таких можливостей способу супровідних трикутників ДПК, що були сформовані у цьому дисертаційному дослідженні, є важливими для побудови горизонталей топографічної поверхні, які подані формалізованою геометричною моделлю або у цифровому вигляді.
4. Досліджено геометричний сенс метричного оператора трьох точок прямої і встановлено, що кожному числу можна поставити у відповідність одно параметричну множину трійок точок, а трійці точок – відповідне одне число. Враховуючи властивості метричного оператора трьох точок прямої і дослідження, проведені у цьому підрозділі, стає можливим обирати точки (тобто визначати їхні координати) таким чином, щоби дістати трикутник з необхідними властивостями – загального вигляду, прямокутний, рівносторонній, рівнобедрений і таке інше. Також встановлено, що застосування метричних операторів трьох точок прямої спрощує записи точкових рівнянь, формул, виразів. Завдяки цьому, розв'язання задач, з їхнім застосуванням, набуває компактності, а це спрощує програмні продукти, що, у свою чергу, призводить до зменшення витрат комп'ютерних ресурсів.
5. Розроблено, з використанням досліджених властивостей метричного оператора трьох точок прямої, новий спосіб знаходження точки дотику плоскої кривої з прямою, яка проходить через точку, що належить площині кривої і не знаходиться на цій кривій. Цей спосіб не використовує диференціювання по параметрам точкового рівняння кривої. Завдяки цьому значно спрощується кінцеві розрахункові точкові формули, вирази, рівняння, внаслідок чого, спрощуються програмні продукти, що використовують запропонований спосіб знаходження точки дотику, реалізація яких зменшує витрати комп'ютерних ресурсів.

Матеріали щодо теми цього підрозділу опубліковано у статтях:

37. *Верещага В.М., Павленко О.М.* Геометричній алгоритм визначення точки дотику. / *В.М. Верещага, О.М. Павленко*// Вісник Херсонського національного технічного

університету. /XVI Міжнародна конференція по математичному моделюванні, Херсон: ХНТУ, 2015. – с. 539-541.

136. *Павленко О.М.* Дослідження точності процесу згущення кривої складеної форми при реконструкції засобами точкового численні Балюби-Найдиша / О.М.Павленко // Міжвідомчій науково-технічний збірник. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Випуск 91 – К.: КНУБА, 2013. – с. 206-210.

143. *Павленко А.М.* Моделирование консольной поверхности типа крыла с переменными профили сечения / А.М. Павленко, А.В. Найдыш, В.М. Верещага, И.Г. Балюба, Е.В. Конопацкий // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет.– Вип. 4, т. 53.– Мелітополь: ТДАТУ, 2012.– с. 115-122.

145. *Павленко О.М.* Геометричне представлення властивостей метричного оператора трьох точок прямої / О.М. Павленко // Сучасні проблеми геометричного моделювання: збірник праць XVII Міжнародної науково-практичної конференції. - Мелітополь: вид-во МДПУ ім. Б.Хмельницького, 2015, с.77-81.

146. *Павленко О.М. Верещага В.М.* Згущення дискретно поданої кривої із застосуванням супровідних трикутників. Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ МДПУ ім. Б.Хмельницького; гол. ред. кол. А.В. Найдиш. - Мелітополь: вид-во МДПУ ім. Б.Хмельницького, 2016. – с. 30-37.

РОЗДІЛ 3

СТВОРЕННЯ ФОРМАЛІЗОВАНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ ТОПОГРАФІЧНОЇ ПОВЕРХНІ

У цьому розділі будуть розроблені формалізовані дискретні цифрові та континуальні моделі поверхонь, вихідною інформацією для яких буде хмара точок, що отримана за результатами наземного лазерного сканування (НЛС). За визначенням [185] формалізованими геометричними моделями є такі, до яких у процесі їхньої побудови, застосовується геометричний апарат точкового БН-числення. За дослідженнями [100, 194] під цифровою моделлю поверхні треба розуміти дискретну множину базових (вузлових) точок, координати яких визначені, що дискретно подає поверхню (ДПП) та наявність алгоритмів згущення ДПП, які забезпечують побудову інших точок у проміжку між базовими (вузловими). Будуть запропоновані способи підготовки вихідної інформації, алгоритми згущення та побудови структурних ліній на цифровій поверхні та поверхні Балюби (типу лупа), що відтворюють рельєф земельної ділянки.

Буде наведене точкове рівняння сегменту поверхні типу лупа, точкове рівняння горизонталі на ньому та на смузі сегментів. Розроблено та досліджено спосіб розростання чарунок для підвищення точності континуальної реконструкції рельєфу.

Всі розробки та дослідження цього розділу мають на меті зменшення витрат комп'ютерних ресурсів у програмному забезпеченні (ПЗ), створеному на їхній основі, та зменшення потужності самих комп'ютерів, що застосовують це ПЗ.

3.1 Створення цифрової моделі рельєфу за результатами наземного лазерного сканування.

Створенню формалізованої геометричної моделі топографічної поверхні за результатами наземного лазерного сканування (НЛС) передує створення цифрової моделі рельєфу (ЦМР), для якої вихідна інформація, за результатами НЛС, потребує певної підготовки [100].

3.1.1 Підготовка вихідної хмари точок, видалення шумової складової.

У цьому підрозділі розглядаються питання підготовки вихідної інформації для її застосування у процесі геометричного моделювання рельєфу за допомогою геометричного апарату точкового БН-числення.

У додатку А, на основі досліджень [100], запропоновано спосіб підготовки вихідної інформації, отриманої за результатами НЛС. Але розробка у додатку А носить загальний вигляд і є доволі складною для програмної реалізації. Розробка, що пропонується у цьому підрозділі, носить частинний випадок і тому є більш спрощеною і простішою у реалізації.

У процесі підготовки вихідної, після НЛС, інформації необхідно виконати наступне:

— видалити шумову складову скану;

— геометрично встановити межі господарського майданчика, при цьому, видалити точкам скану, що знаходяться за межами майданчика;

— упорядкувати точки скану, видаливши надлишкову інформацію.

Згідно з дослідженнями [100] шумовою складовою вважаються елементи (предмети), що випадково опинилися у полі «зору» сканера у момент зйомки, що постійно знаходяться над поверхнею рельєфу земельної ділянки, при цьому, не цікавлять дослідника (дерева, кущі, будівлі, споруди тощо), а також множина точок, що знята сканером, але знаходиться за межами промислового майданчика.

Перш ніж скористатися результатами сканування, всі ці елементи, що подані відповідними точковими множинами, треба видаляти із вихідної хмари точок. Від якісного видалення шумової складової залежить робота усіх алгоритмів, що будуть розроблятися далі.

У роботі [100] розроблено алгоритми для видалення зайвих елементів з вихідної хмари точок та виконана його програмна реалізація, тому у своїх дослідженнях ми не будемо розглядати питання видалення шумів, а скористаємося цією розробкою.

Розглянемо частинний випадок підготовки вихідної хмари точок для створення множини вузлових точок, що будуть застосовуватись у побудові формалізованої континуальної геометричної моделі рельєфу промислового майданчика.

Що треба розуміти під підготовкою вихідної хмари точок? Річ у тім, що навіть на мінімальному налаштуванні матриці сканера, кількість точок після сканування буде надлишковою для створення неперервної формалізованої геометричної моделі сегменту топографічної поверхні.

У зв'язку з цим, підготовка вихідної хмари точок означає видалення надлишкової кількості точок вихідної хмари, щоби залишені точки віддзеркалювали геометрію рельєфу і дозволили, з наперед заданою точністю, континуально реконструювати сканований рельєф промислового майданчика. У нашій розробці пропонується визначати та залишати точки вихідної хмари, що знаходяться на структурних лініях, зокрема на горизонталях.

3.1.2 Підготовка вихідної хмари точок, видалення надлишкової інформації.

Нехай до вихідної хмари точок застосовано алгоритми видалення шумової складової та встановлено межі [100] промислового майданчика.

Відстань між найвищою та найнижчою точками не перевищує одного метра, наприклад, дорівнює 0,5 метра. Призначимо крок між горизонталями 0,05 метра, отримаємо одинадцять рівнів, на яких необхідно виділити, з вихідної хмари точок, точки, що утворять дискретно подану горизонталь.

На рисунку 3.1 графічно відображено ситуацію, яку було обумовлено вище.

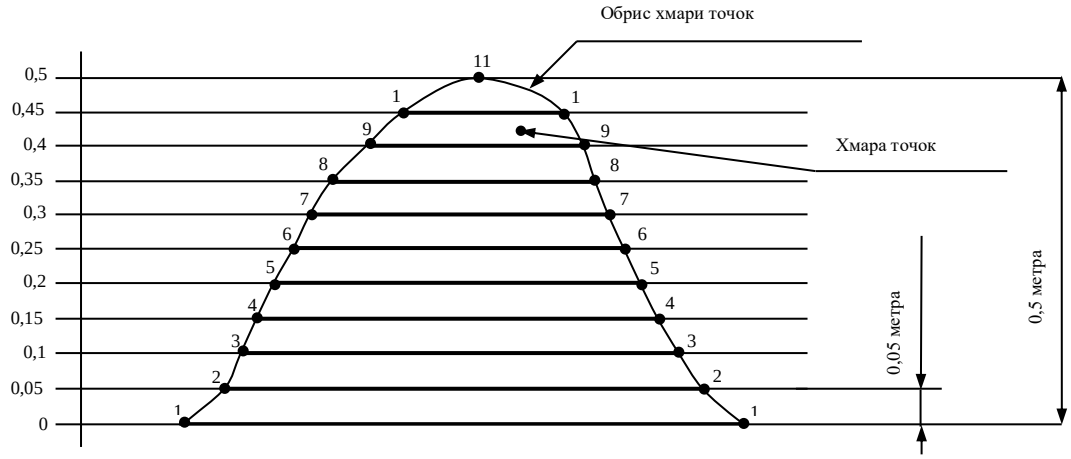


Рис. 3.1. Ілюстрація до прикладу підготовки вихідної хмари точок

У наведеному прикладі (рис. 3.1) маємо десять горизонталей та одинадцяту точку, у яку виродилась горизонталь. Для того, щоб сформувати, на поверхні хмари точок, дискретно подані горизонталі, для рівнів 2, …, 10, діємо наступним чином (рис. 3.2).

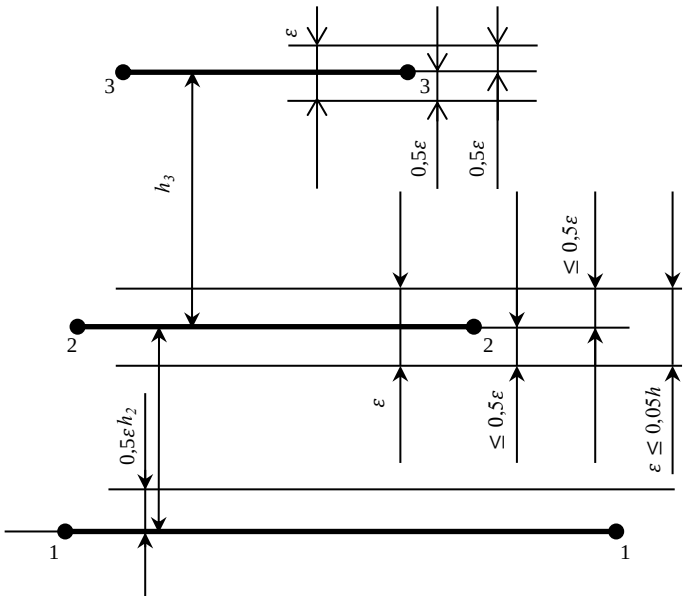


Рис. 3.2. Схема відхилень від рівнів горизонталей

Виходячи з отриманої щільності точок у вихідній хмарі та з наявного досвіду моделювання і дотримання необхідної точності реконструкції топографічної поверхні, обираємо допуск ε на відхилення аплікат точок, що будуть визначати дискретну горизонталь, від аплікати відповідного рівня. На наш погляд, цей допуск ε не повинен перевищувати 10% відстані між суміжними рівнями. У нашому прикладі, прийнято відстань $0{,}05h$ метра між рівнями 1 та 2 і 2 та 3, тому $\varepsilon \leq 0{,}05h$ сантиметрів. Відносно рівня горизонталі h_2 усім точкам, що мають аплікату Z_i у межах $(h_2 - 0{,}5\varepsilon) \leq Z_i \leq (h_2 + 0{,}5\varepsilon)$ призначаємо аплікату горизонталі другого рівня $Z_i = Z_2$. Аналогічно виконуємо і для інших рівнів 3, 4, …, 10. Для першого рівня

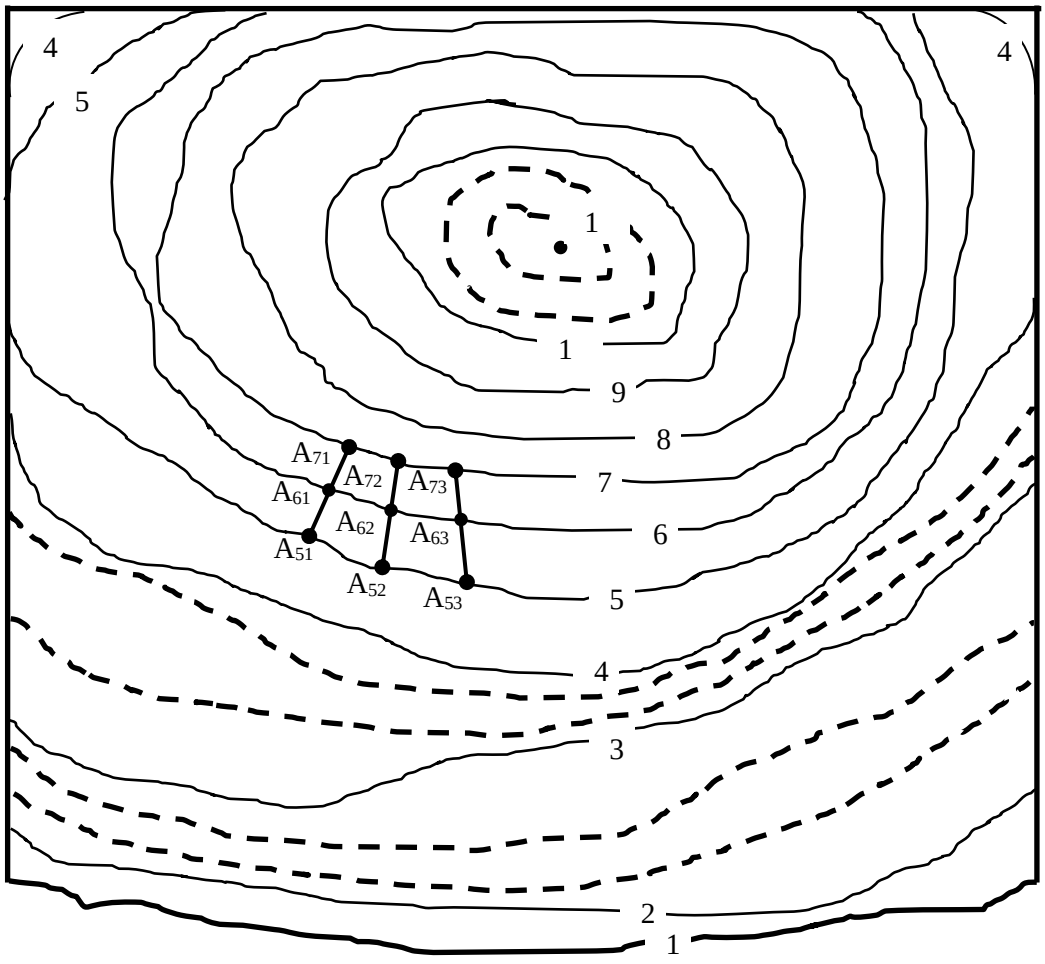


Рис. 3.3. Приклад дискретно поданих горизонталей сформованих на поверхні хмари точок.

відхилення дорівнює $h_1 + 0{,}5\varepsilon$ і усім точкам, аплікати яких $Z_i \leq h_1 + 0{,}5\varepsilon$, призначаємо $Z_i = Z_1$. Для вершини 11 відхилення призначаємо $h_{11} - 0{,}5\varepsilon_i$ усім точкам, аплікати яких $Z_i \leq h_{11} - 0{,}5\varepsilon_i$, призначаємо $Z_i = Z_{11}$.

Отримані таким чином точки, зобразимо на горизонтальній площині і виконаємо аналіз щодо побудови додаткових горизонталей (рис. 3.3).

Як бачимо у плані, відстань між горизонталями, у більшості своїй, скрізь, приблизно, однакова, і можна вирахувати середню, але між другим та третім, між третім та четвертим і між десятим та одинадцятим рівнями відстані є значно більшими за середню. Це означає, що реконструкція рельєфу, з використанням визначених горизонталей, у вказаних місцях буде мати значно більшу похибку у порівняні з рештою поверхні. Для виправлення цієї вади у вказаних місцях додатково проводимо горизонталі (на рисунку 3.3 показані штрихованими лініями), щоб у місцях найбільшої відстані між горизонталями досягти середньої відстані.

У вказаних місцях, у нашому прикладі, проведемо по дві додаткові горизонталі, але їх може бути і по одній, і по три, і по чотири, і так далі в залежності від рельєфу.

Ще раз наголосимо, що всі отримані горизонталі є дискретно поданими, тобто сформовані одновимірними замкненими, незамкненими або з розривами множинами точок, для побудови у зоні допусків ε у відповідності до наперед визначених рівнів (рис. 3.1, рис. 3.2). Всі інші точки, між визначеними рівнями, виключаємо з тих, що будуть використані у цифровій моделі рельєфу.

Виникає питання, а навіщо невключені у цифрову модель точки необхідно було сканувати? Річ у тім, що, навіть при мінімально

налаштованій матриці сканування, отримана хмара точок буде утримувати надлишкову кількість точок, яка доволі точно віддзеркалює рельєф, але повне включення усіх точок хмари для створення його цифрової моделі буде потребувати великих витрат комп'ютерних та фінансових ресурсів. Тому запропонований алгоритм побудови горизонталей призначений для оптимізації процесу «точність-видатки». Цей процес оптимізації не є метою дисертаційних досліджень і тому питання оптимізації не будуть досліджуватись.

Якщо, у разі тестування моделі, з'ясується, що точність реконструкції рельєфу, при обраній кількості горизонталей, не є задовільною, то необхідно повернутися до вихідної хмари точок і збільшити кількість горизонталей у тій частині моделі рельєф, де виникла велика похибка.

За результатами підготовки вихідної хмари точок, тобто, видалення шумової складової та надлишкової інформації шляхом побудови горизонталей, що графічно подають рельєф майданчика, можна застосувати алгоритми з метою отримання цифрової моделі рельєфу.

У наступному підрозділі підготовлену хмару точок використаємо для побудови сегменту поверхні типу лупа.

3.2 Побудова сегменту параболічної поверхні Балюби.

Термін – «Поверхня типу лупа» вперше був застосований професором Балюбою І.Г., а реалізований у точковому БН-численні у дисертаційній роботі [100] Кучеренка В.В. Зрозуміло, що дістати рівняння топографічної поверхні, в цілому, не є можливим, для окремого сегменту, що визначається дев'ятьма явними точками – так. Зосередивши увагу на цьому сегменті, тобто, якби навівши на нього

лупу, спираючись на дев’ять вузлових точок, що визначають цей сегмент, можемо скласти точкове рівняння цього сегменту, який континуально визначає будь-яку його точку в його всередині і на його межах.

Якщо поспіль «наводити лупу» на всі дев’ятки вузлових точок, що дискретно визначають топографічну поверхню в цілому, то отримаємо точкові рівняння усіх сегментів топографічної поверхні. Таку поверхню професор Балюба І.Г. запропонував назвати – поверхня типу лупа. Покажемо процес утворення точкового рівняння для сегменту топографічної поверхні. Звернемося до рис. 3.3, для прикладу, на кожній горизонталей 5, 6, 7 оберемо по три точки, відповідно A_{51}, A_{52}, A_{53}, A_{61}, A_{62}, A_{63} та A_{71}, A_{72}, A_{73}, які розглянемо у просторі, а не на площині закладення (горизонтальній площині), тобто для кожної з дев’яти точок врахуємо усі три координати x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} (рис. 3.4).

Таким чином, у просторі дискретно подані трьома дійсними точками кожне з трьох ребер сегменту топографічної поверхні, які необхідно інтерполювати неперервними кривими. У якості інтерполяційних кривих можна застосовувати будь-які, але у наших дослідженнях будуть застосовані параболи другого ступеня, які були проаналізовані у підрозділі 2.2. Для параболи другого ступеня, окрім трьох дійсних точок, необхідно визначити четверту – невласну точку як відношення двох відтинків.

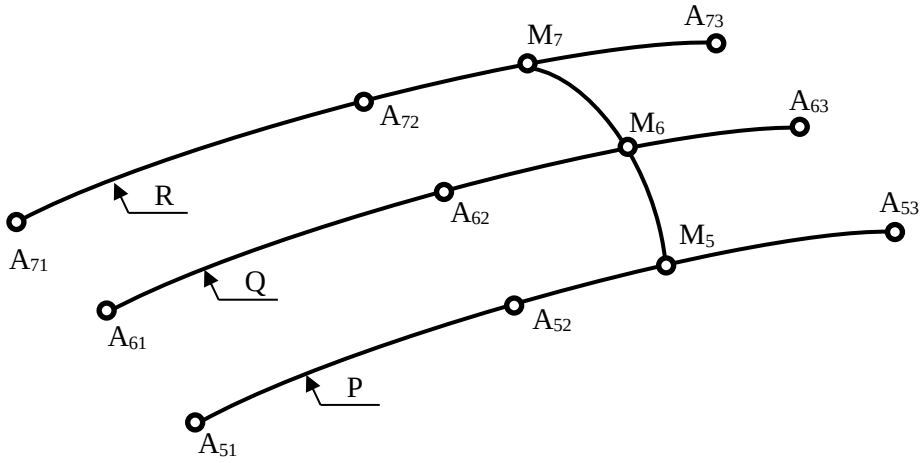


Рис. 3.4. Сегмент топографічної поверхні

Для прикладу, що зображений на рисунку 3.4, позначимо через u_c відношення відтинків, які знаходяться на відтинках A_{i1}, A_{i3} (рис. 3.5).

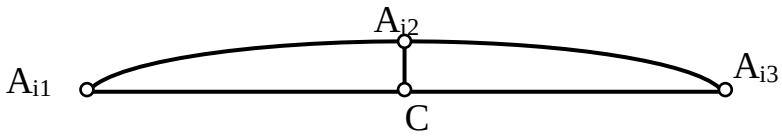


Рис. 3.5. До визначення параметру u_c

$$u_c = \frac{CA_{i1}}{A_{i3}A_{i1}} \quad (3.1)$$

Теоретичні основи з цього питання були розроблені у роботі [20], яка виконувалась під керівництвом Балюби І.Г. при участі Конопацького Є.В. Ця ідея, побудови ребра поверхні у вигляді параболи другого ступеня, була використана у роботі [100] В.В. Кучеренком, але, при цьому, значення t_c було прийнято рівним $u_c = \frac{1}{2}$, що означає $A_{i1}C = CA_{i3}$. Однак $0 \le u_c \le 1$, тобто точка С може переміщуватись від точки A_{i1} до A_{i3}.

Визначення $u_c = \frac{1}{2}$ спрощує точкові рівняння ребер, але тим самим, звужує можливості моделювання у сенсі впливу на зменшення похибки реконструкції сегменту кривої. Згідно з [100] для схеми (рис. 3.4) маємо точкові рівняння ребер поверхні сегменту:

$$P = A_{51}\bar{u}(1 - 2u) + 4A_{52}u\bar{u} + A_{53}u(2u - 1),$$
$$Q = A_{61}\bar{u}(1 - 2u) + 4A_{62}u\bar{u} + A_{63}u(2u - 1), \quad (3.2)$$

$$R = A_{71}\bar{u}(1 - 2u) + 4A_{72}u\bar{u} + A_{73}u(2u - 1),$$

та точкове рівняння, власне сегменту поверхні рельєфу:

$$M = [A_{51}\bar{u}(1 - 2u) + 4A_{52}u\bar{u} + A_{53}u(2u - 1)]\bar{v}(1 - 2v) +$$
$$+ 4[A_{61}\bar{u}(1 - 2u) + 4A_{62}u\bar{u} + A_{63}u(2u - 1)]v\bar{v} +$$
$$+ [A_{71}\bar{u}(1 - 2u) + 4A_{72}u\bar{u} + A_{73}u(2u - 1)]v(2v - 1) \quad (3.3)$$

Для визначення координат точки M у відповідності до (3.3) можемо записати:

$$x_M = [x_{51}\bar{u}(1 - 2u) + 4x_{52}u\bar{u} + x_{53}u(2u - 1)]\bar{v}(1 - 2v) +$$
$$+ 4[x_{61}\bar{u}(1 - 2u) + 4x_{62}u\bar{u} + x_{63}u(2u - 1)]v\bar{v} +$$
$$+ [x_{71}\bar{u}(1 - 2u) + 4x_{72}u\bar{u} + x_{73}u(2u - 1)]v(2v - 1) \quad (3.4)$$

$$y_M = [y_{51}\bar{u}(1 - 2u) + 4y_{52}u\bar{u} + y_{53}u(2u - 1)]\bar{v}(1-2v) +$$
$$+ 4[y_{61}\bar{u}(1 - 2u) + 4y_{62}u\bar{u} + y_{63}u(2u - 1)]v\bar{v} +$$
$$+ [y_{71}\bar{u}(1 - 2u) + 4y_{72}u\bar{u} + y_{73}u(2u - 1)]v(2v - 1) \quad (3.5)$$

$$z_M = [z_{51}\bar{u}(1 - 2u) + 4z_{52}u\bar{u} + z_{53}u(2u - 1)\bar{v}(1 - 2v) +$$
$$+ 4[z_{61}\bar{u}(1 - 2u) + 4z_{62}u\bar{u} + z_{63}u(2u - 1)]v\bar{v} +$$
$$+ [z_{71}\bar{u}(1 - 2u) + 4z_{72}u\bar{u} + z_{73}u(2u - 1)]v(2v - 1) \quad (3.6)$$

Для підвищення точності інтерполяції, з використанням параболи другого ступеня шляхом змінювання положення точки *C*, тобто $0 \le u_c \le 1$, скористаємося точковим рівнянням (2.7), яке було виведене нами у підрозділі 2.1 і, у відповідності до позначень, що прийняті у цьому підрозділі, має вигляд:

$$M = A_{i1}\frac{\bar{u}(u_c - u)}{u_c} - A_{i2}\frac{\bar{u}(u_c - u)}{\bar{u}_c} + A_{i3}\frac{\bar{u}^2 u}{u_c \bar{u}_c}, \quad (3.7)$$

де $\bar{u} = 1 - u$.

Виходячи з (3.7), запишемо точкові рівняння ребер *P, Q, R*:

$$P = A_{51}\frac{\bar{u}(u_c - u)}{u_c} - A_{52}\frac{\bar{u}(u_c - u)}{\bar{u}_c} + A_{53}\frac{\bar{u}^2 u}{u_c \bar{u}_c} \quad (3.8)$$

$$Q = A_{61}\frac{\bar{u}(u_c - u)}{u_c} - A_{62}\frac{\bar{u}(u_c - u)}{\bar{u}_c} + A_{63}\frac{\bar{u}^2 u}{u_c \bar{u}_c} \quad (3.9)$$

$$R = A_{71}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{u_c} - A_{72}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{\bar{u}_c} + A_{73}\frac{\bar{u}^2 u}{u_c\bar{u}_c} \qquad (3.10)$$

Враховуючи (3.8), (3.9), (3.10), можемо записати точкове рівняння сегменту поверхні рельєфу:

$$M = \left[A_{51}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{u_c} - A_{52}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{\bar{u}_c} + A_{53}\frac{\bar{u}^2 u}{u_c\bar{u}_c}\right]\frac{\bar{v}(v_c-v)}{v_c} -$$
$$-\left[A_{61}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{u_c} - A_{62}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{\bar{u}_c} + A_{63}\frac{\bar{u}^2 u}{u_c\bar{u}_c}\right]\frac{\bar{v}(v_c-v)}{\bar{v}_c} +$$
$$+\left[A_{71}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{u_c} - A_{72}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{\bar{u}_c} + A_{73}\frac{\bar{u}^2 u}{u_c\bar{u}_c}\right]\frac{\bar{v}^2 v}{v_c\bar{v}_c}, \qquad (3.11)$$

де v_c – параметр, що визначає точку C на хорді $A_{i1}A_{(i+2)1}$, $\bar{v} = 1 - v$, $\bar{v}_c = 1 - v_c$.

Використовуючи точкове рівняння (3.11), запишемо розрахункові формули для координат x_M, y_M та z_M точки M:

$$x_M = \left[x_{51}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{u_c} - x_{52}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{\bar{u}_c} + x_{53}\frac{\bar{u}^2 u}{u_c\bar{u}_c}\right]\frac{\bar{v}(v_c-v)}{v_c} -$$
$$-\left[x_{61}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{u_c} - x_{62}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{\bar{u}_c} + x_{63}\frac{\bar{u}^2 u}{u_c\bar{u}_c}\right]\frac{\bar{v}(v_c-v)}{\bar{v}_c} +$$
$$+\left[x_{71}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{u_c} - x_{72}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{\bar{u}_c} + x_{73}\frac{\bar{u}^2 u}{u_c\bar{u}_c}\right]\frac{\bar{v}^2 v}{v_c\bar{v}_c}; \qquad (3.12)$$

$$y_M = \left[y_{51}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{u_c} - y_{52}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{\bar{u}_c} + y_{53}\frac{\bar{u}^2 u}{u_c\bar{u}_c}\right]\frac{\bar{v}(v_c-v)}{v_c} -$$
$$-\left[y_{61}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{u_c} - y_{62}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{\bar{u}_c} + y_{63}\frac{\bar{u}^2 u}{u_c\bar{u}_c}\right]\frac{\bar{v}(v_c-v)}{\bar{v}_c} +$$
$$+\left[y_{71}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{u_c} - y_{72}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{\bar{u}_c} + y_{73}\frac{\bar{u}^2 u}{u_c\bar{u}_c}\right]\frac{\bar{v}^2 v}{v_c\bar{v}_c}; \qquad (3.13)$$

$$z_M = \left[z_{51}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{u_c} - z_{52}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{\bar{u}_c} + z_{53}\frac{\bar{u}^2 u}{u_c\bar{u}_c}\right]\frac{\bar{v}(v_c-v)}{v_c} -$$

$$-\left[z_{61}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{u_c}-z_{62}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{\bar{u}_c}+z_{63}\frac{\bar{u}^2u}{u_c\bar{u}_c}\right]\frac{\bar{v}(v_c-v)}{\bar{v}_c}+$$

$$+\left[z_{71}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{u_c}-z_{72}\frac{\bar{u}(u_c-u)}{\bar{u}_c}+z_{73}\frac{\bar{u}^2u}{u_c\bar{u}_c}\right]\frac{\bar{v}^2v}{v_c\bar{v}_c}. \qquad (3.14)$$

Однак, у відповідності до досліджень Балюби І.Г. та Конопацького Є.В. [20], і, враховуючи, що точкове рівняння ребра поверхні має вигляд:

$$M=A_{i1}\frac{\bar{t}}{t_c}(t_c-t)-A_{i2}\frac{t}{\bar{t}_c}(t_c-t)+A_{i3}\frac{t\bar{t}}{t_c\bar{t}_c},$$

то можемо записати точкове рівняння сегменту топографічної поверхні, що аналогічне (3.11), у вигляді

$$M=\left[A_{51}\frac{\bar{u}}{u_c}(u_c-u)-A_{52}\frac{\bar{u}}{\bar{u}_c}(u_c-u)+A_{53}\frac{u\bar{u}}{u_c\bar{u}_c}\right]\frac{\bar{v}}{v_c}(v_c-v)-$$

$$-\left[A_{61}\frac{\bar{u}}{u_c}(u_c-u)-A_{62}\frac{\bar{u}}{\bar{u}_c}(u_c-u)+A_{63}\frac{u\bar{u}}{u_c\bar{u}_c}\right]\frac{v}{\bar{v}_c}(v_c-v)+$$

$$+\left[A_{71}\frac{\bar{u}}{u_c}(u_c-u)-A_{72}\frac{\bar{u}}{\bar{u}_c}(u_c-u)+A_{73}\frac{u\bar{u}}{u_c\bar{u}_c}\right]\frac{v\bar{v}}{v_c\bar{v}_c}, \qquad (3.15)$$

У відповідності до (3.15) аналогічно (3.12), (3.13), (3.14) можна записати розрахункові рівняння для визначення координат x_M, y_M та z_M.

Розглянуті у цьому підрозділі точкові рівняння сегменту поверхні_відрізняються від розглянутих у [100] можливістю зміни положення невласної точки C_∞, що надає можливість зменшувати похибки реконструкції сегменту поверхні через застосування варіативного геометричного моделювання шляхом варіювання параметрів u_c і v_c, обираючи їх у межах $0 \le u_c \le 1$, $0 \le v_c \le 1$.

3.3 Спосіб розростання чарунок.

Досить часто виникає задача реконструкції дискретно поданої поверхні (ДПП), контур якої у плані обмежується криволінійною

формою і при упорядкуванні вихідних даних ДПП застосовуванням сіток з чотирикутними чарунками на межі майже завжди виникають чарунки у вигляді трикутників. Застосування, для реконструкції сегменту поверхні у межах трикутникових чарунок, окремих способів, завжди виникає додаткові труднощі і ускладнює їх програмну реалізацію. Тому, у цьому підрозділі пропонується розглядати трикутну чарунку як чотирикутну, у якої дві вершини співпали, і застосувати для її реконструкції спосіб побудови поверхні типу лупа, яка була розроблена у підрозділі 3.2 для чотирикутних чарунок. На наш погляд, розв'язання цієї задачі надасть можливість застосування єдиного способу для реконструкції ДПП як у середині сегменту, де є чотирикутні чарунки, так і на його межі, а також для областей визначення сегменту, що мають форму клину.

Достатньо ґрунтовний аналіз, стосовно реконструкції ДПП, наведено у [120], у якому наголошується, що моделювання поверхонь розвивається у двох напрямках, таких як неперервне моделювання лінійних каркасів ДПП, з виходом на послідовну двовимірну інтерполяцію, та поліноміальна двовимірна інтерполяція точкового масиву узагальненими поліномами і раціональними функціями. При цьому, використання першого не передбачає знаходження рівняння поверхні, одним із напрямків його застосування є метод порцій. Використання другого, впроваджується через знаходження рівняння поверхні, що інтерполює задану ДПП, використовуючи методи кусково-поліноміальної інтерполяції. Недоліками двовимірної неперервної інтерполяції є високі степені поліномів і, як наслідок, неминуча поява осциляції; значні труднощі обчислювальної реалізації, малі можливості цілеспрямованої корекції й керування формою поверхні та інше. Методи варіативного дискретного геометричного

моделювання (ВДГМ), засновані на геометричних співвідношеннях, на основі тотожностей двовимірного згущення, на основі базисних функцій інтерполяції, забезпечують локальність розрахунків, мають можливість не зберігати проміжні розрахунки, але їх основними недоліками є неможливість корекції формованої чарунки. Щоб уникнути цього недоліку, у роботі [125] пропонується використовувати чарунки з похідними на межі, які базуються на згущенні Кунса.

Іншим способом реконструкції ДПП, що використовує трикутні чарунки, є тріангуляція. ЇЇ головною перевагою є те, що вона може інтерполювати ДПП, межа якої має довільну форму, але, при цьому, процес встановлення суміжних елементів є доволі складними [66, 175, 176, 200].

Одночасно використання трикутної та чотирикутної сіток, у єдиному процесі реконструкції сегментів однієї ДПП, викликає труднощі.

Розвиток нового геометро-математичного апарату БН-числення [124] дозволяє формалізувати процес реконструкції сегменту упорядкованої ДПП, на базі поверхонь типу лупа [99], у вигляді точкового рівняння, за допомогою якого у одному сегменті ДПП стає можливим поєднати три- та чотирикутні чарунки.

Виходячи зі сказаного у цьому підрозділі, використовуючи поверхні типу лупа, обґрунтуємо використання способу розростання чарунок, що був запропонований у [38], який дає можливість, у процесі реконструкції ДПП, комбінувати застосування три- та чотирикутні чарунки, не змінюючи, при цьому, методики реконструкції.

Поверхня типу лупа на базі 9-ти дійсних та трьох невласних точок створюється у результаті переміщення твірної лінії *PQR*, по криволінійним напрямним $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ (рис. 3.6).

Точкове рівняння, що визначає сегмент цієї поверхні у довільному одиничному симплексі $OE_1E_2E_3$ має вигляд (3.16):

$$M = [A_1\bar{u}(1 - 2u) + 4A_2u\bar{u} + A_3u(2u - 1)]\bar{v}(1 - 2v) +$$
$$+ 4[B_1\bar{u}(1 - 2u) + 4B_2u\bar{u} + B_3u(2u - 1)]v\bar{v} +$$
$$+ [C_1\bar{u}(1 - 2u) + 4C_2u\bar{u} + C_3u(2u - 1)]v(2v - 1) \qquad (3.16)$$

Необхідно визначити можливості варіантів моделей сегментів поверхонь типу лупа при різних конфігураціях чотирьох чарунок, що визначають цей сегмент поверхні і мають три- або чотирикутну форму.

Неповний перелік можливих варіантів конфігурацій дев’яти точок наведено у таблиці 3.1.

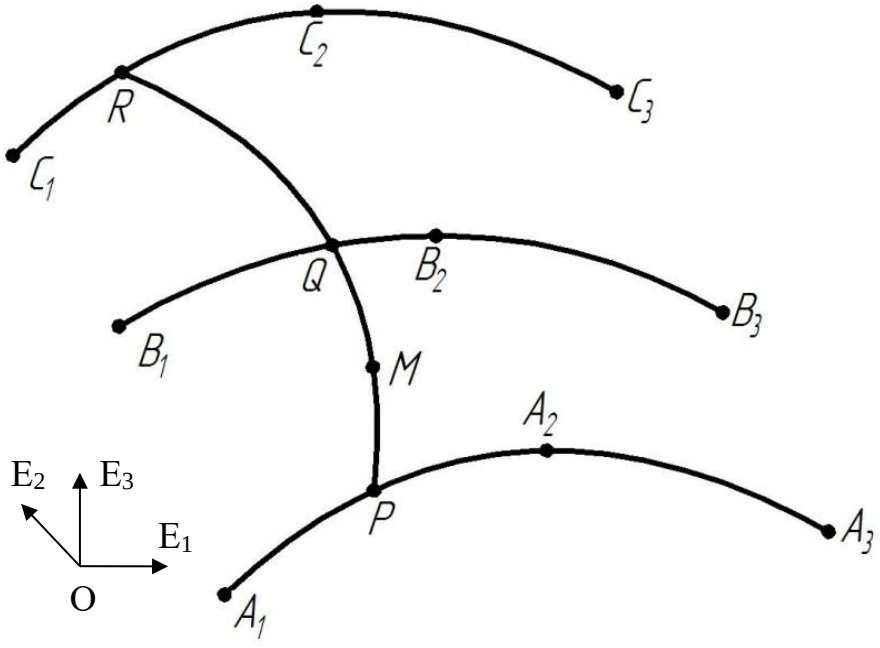
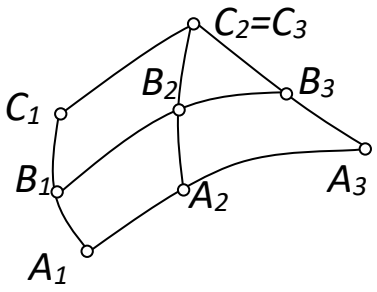
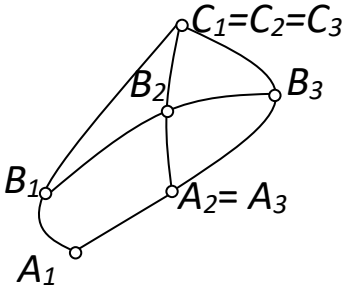
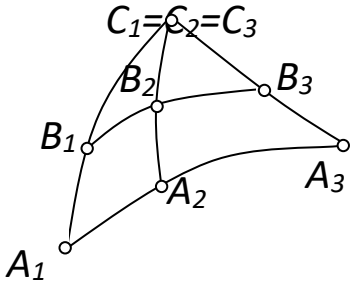
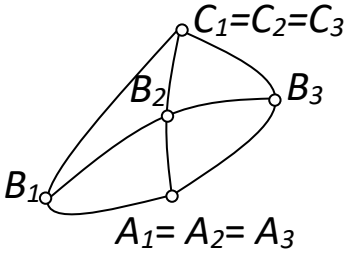
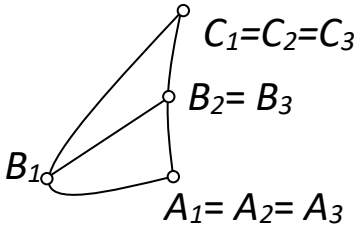
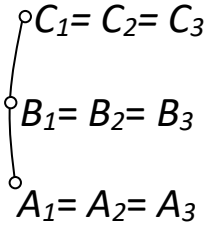
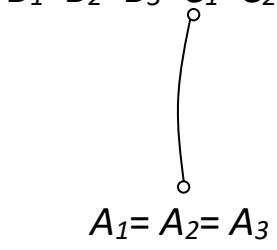
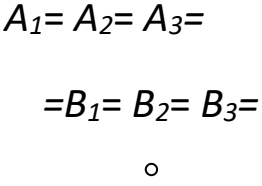
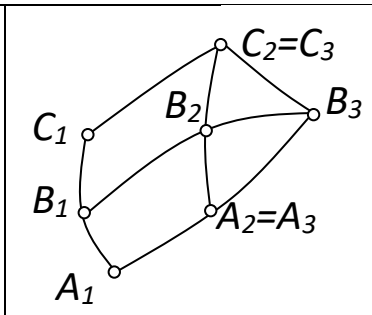
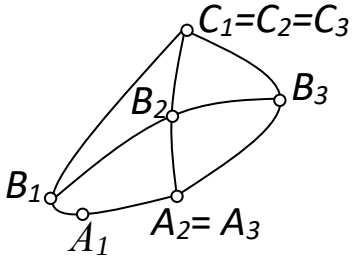
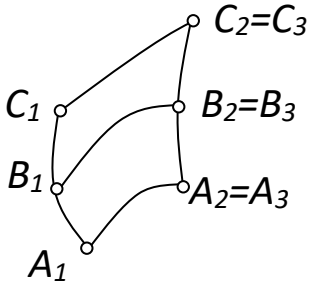
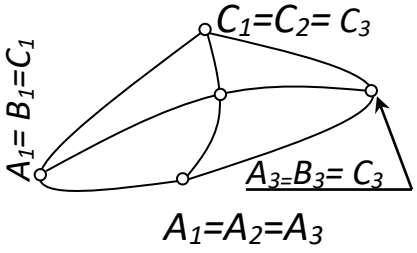
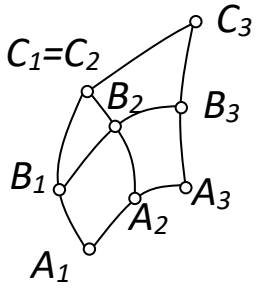
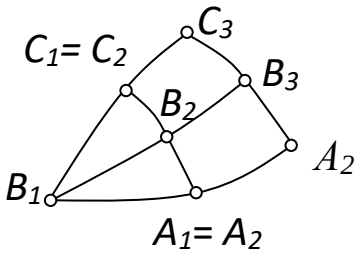
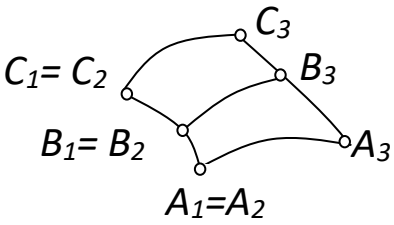
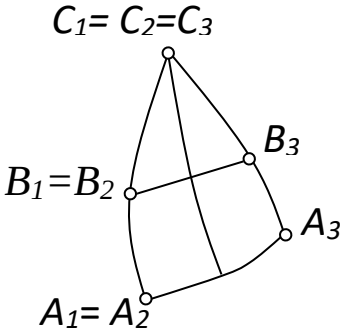


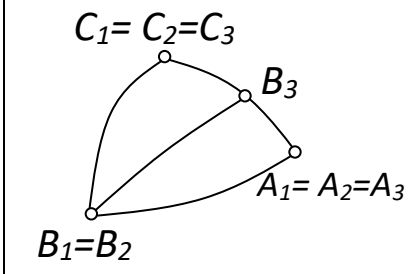
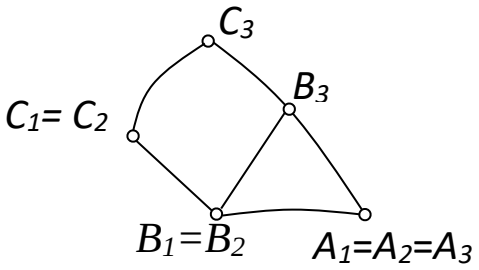
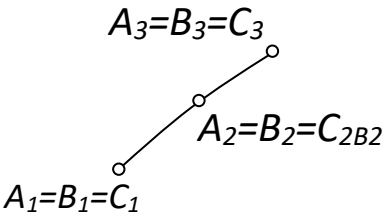
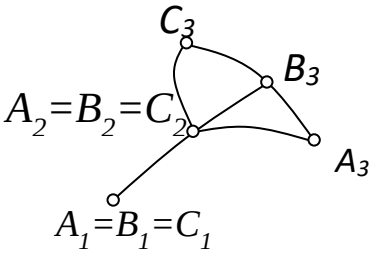
Рис. 3.6. Сегмент поверхні типу лупа на базі 9-ти дійсних та трьох невласних точок

Таблиця 3.1.

Варіанти розташування 9 опорних точок сегменту

№ вар-ту	Геометрична схема	№ вар-ту	Геометрична схема
1	2	3	4
1		2	
3		4	
5		6	
7		8	

9		10	
11		12	
13		14	
15		16	

17		18	
19		20	

Пояснимо перші вісім варіантів суміщення чарунок.

Варіант 1. Чотирикутні чарунки $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, $B_1B_2C_2C_1$. Чарунка $B_2B_3C_3C_2$ – трикутна.

Варіант 2. Чарунка $A_1A_2B_2B_1$ – чотирикутна, а чарунки $A_2A_3B_3B_2$, $B_1B_2C_2C_1$, $B_2B_3C_3C_2$ – трикутні.

Варіант 3. Чотирикутні чарунки $A_1A_2B_2B_1$ та $A_2A_3B_3B_2$. Трикутні чарунки $B_1B_2C_2C_1$ та $B_2B_3C_3C_2$.

Варіант 4. Всі чотири чарунки $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, $B_1B_2C_2C_1$ та $B_2B_3C_3C_2$ – трикутні.

Варіант 5. Утримуємо дві трикутні чарунки $A_1A_2B_2B_1$ та $B_1B_2C_2C_1$, а дві інші $A_2A_3B_3B_2$ та $B_2B_3C_3C_2$ виродилися у лінію, до речі, вона може бути і прямою.

Варіант 6. Всі чотири чарунки $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, $B_1B_2C_2C_1$ та $B_2B_3C_3C_2$ виродилися у лінію.

Варіант 7. Чарунки $B_1B_2C_2C_1$ та $B_2B_3C_3C_2$ виродилися у точку, а чарунки $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$ виродилися у лінію.

Варіант 8. Всі чотири чарунки виродилися у точку.

Зауважимо, що у таблиці 3.1 надана не повна класифікація усіх можливих варіантів геометричних схем, способу розростання (стискання) чарунок, що упорядковують ДПП. При цьому, звертаємо увагу, що навіть чотири чарунки, що виродилися у точку, позначені дев'ятьма буквами, які входять до точкового рівняння (3.16) мають сенс у способі розростання чарунок для позначення вершин.

Наведемо точкові рівняння для декількох варіантів з таблиці 3.1, що, у відповідності до геометричної схеми, випливають із рівняння (3.16).

Варіант 6:

$$M = A_1\bar{v}(1 - 2u) + 4B_1v\bar{v} + C_1v(2v - 1). \quad (3.17)$$

Варіант 7:

$$M = [A_1\bar{u}(1 - 2u) + 4A_2u\bar{u} + A_3u(2u - 1)]\bar{v}(1 - 2v) + \\ + B_1(4v\bar{v} + v(2v - 1)). \quad (3.18)$$

Варіант 8

$$M = A_1. \quad (3.19)$$

Ці варіанти були обрані для демонстрації через відносну складність та через те, що працездатність способу при обробці таких вихідних даних забезпечує роботу схеми у будь-яких інших варіантах сегменту.

У результаті проведеного аналізу було встановлено, що отриманий спосіб розростання чарунок, на базі поверхні типу лупа, має широкі можливості для реконструкції ДПП і є нечутливим до зміни геометричних характеристик вихідної ДПП. Такі результати дозволяють говорити про загальність способу та простоту його програмної реалізації. Подальші дослідження цього питання дозволять відкрити нові перспективні напрямки застосування наведеного способу у області моделювання дискретно представлених поверхонь.

Однією із головних переваг способу розростання чарунок є можливість його використання для дискретно представлених поверхонь, межа яких має трикутникову форму. У цьому випадку, перші чотири чарунки можуть бути представлені у вигляді точки у вершині трикутної області, далі, у процесі переміщення у бік сторони, яка знаходиться напроти цієї вершини, з метою збереження необхідної точності реконструкції, збільшується кількість чарунок три- та чотирикутної форм.

Таким чином, можливість одночасного комбінування чарунок різної форми для реконструкції ДПП, робить запропонований спосіб універсальним. У наступному розділі розглянемо приклад застосування способу розростання чарунок.

3.4. Застосування способу розростання чарунок для реконструкції дискретно поданих поверхонь (ДПП).

Існує багато поверхонь, меридіани якої проходять через одну точку, що є її вершиною; а ближче до екватора відстань між цими меридіанами збільшується і, якщо, при цьому, не згущувати сітку, яку утворюють її меридіани, то відстань між точками, що визначають чарунки в околі екватора, буде збільшуватися, а звідси, відповідно, точність реконструкції ДПП, безпосередньо біля екватора, буде зменшуватись.

Окрім того, біля вершини поверхні форма чарунку має трикутникову форму, а ближче до екватора – чотирикутникову. Враховуючи цю обставину, виникає необхідність створення такого способу реконструкції, математична модель якого взагалі не зважала б на форму чарунки, чи то вона чотири- або трикутникова і нехай виродилась у пряму або навіть у точку.

Спосіб розростання чарунок, запропонований нами [38, 138, 141], позбавлений вищеозначених вад. Розв'язання цієї задачі дозволить реконструювати ДПП зі зменшенням похибок, величина яких не буде перевищувати допустимі межі, і буде, практично, однаковою по всій реконструйованій поверхні, формалізованій за допомогою БН-числення, у вигляді точкових рівнянь сегментів, з яких буде складено цю поверхню.

Суть способу розростання чарунок викладено у підрозділі 3.3, спираючись на дослідження, що були проведені у роботі [38]. Створення його геометро-математичної моделі базується на використанні розробок стосовно поверхонь типу лупа [99], для реалізації яких необхідно взяти дев'ять дійсних вузлових точок.

У роботі [120] наголошується, що моделювання ДПП, на основі чотирикутних чарунок, розвивається у двох напрямках, шляхом: 1) послідовної двовимірної інтерполяції, при цьому, рівняння поверхні не відшукується, а кожна чарунка, в результаті обчислювальних операцій, загущується в її середині однією точкою; 2) поліноміальної двопараметричної інтерполяції узагальненими поліномами і раціональними функціями, недоліками якої є високі степені поліномів і, як наслідок, неминуча поява непередбачуваної осциляції, значні труднощі обчислювальної реалізації, малі можливості цілеспрямованої корекції й керування формою та інше.

Найбільш відомим способом реконструкції ДПП на основі трикутних чарунок є тріангуляція [66, 175, 176, 200], основним

недоліком якої є складність встановлення відносин сумісності елементів, який у процесі комп'ютерної реалізації потребує значного

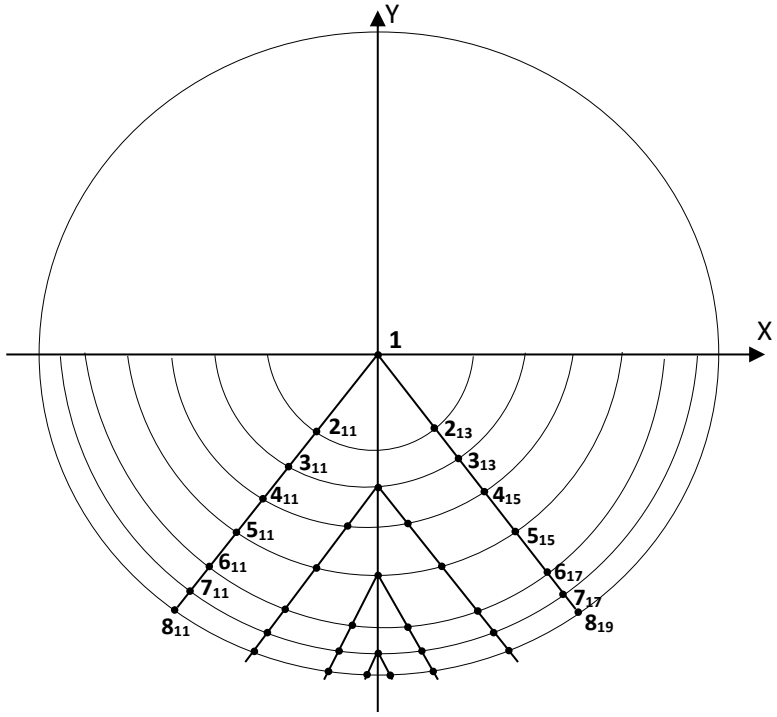


Рис.3.7 Прийнята схема дискретизації кулі для способу розростання чарунок

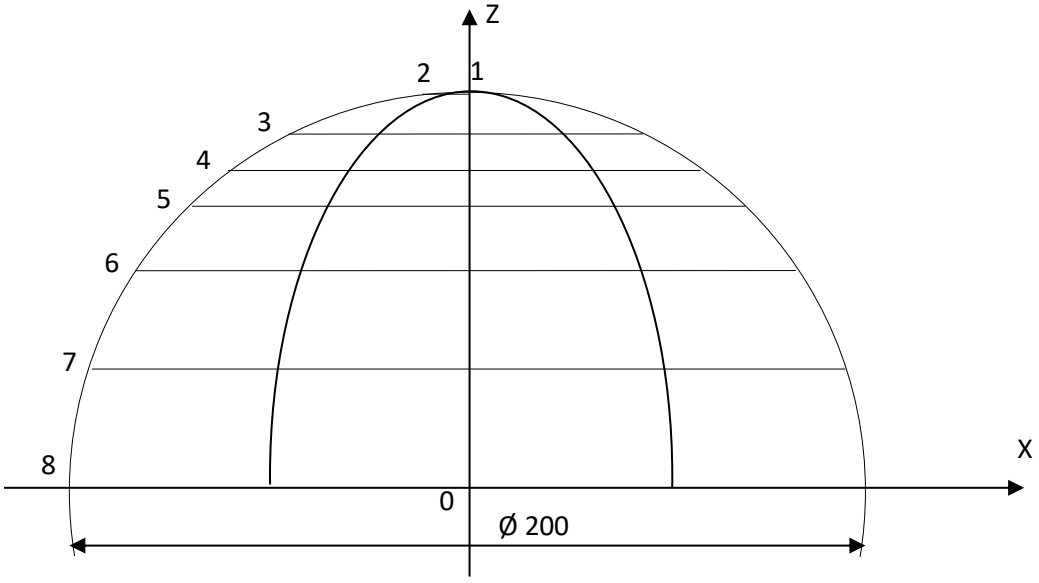


Рис.3.8 Схема дискретизації кулі без застосування способу розростання чарунок

ресурсу.

Розвиток БН-числення [124] дозволяє формалізувати процес реконструкції сегменту упорядкованої ДПП на базі поверхонь типу лупа, у межах якого стає можливим поєднати методики реконструкції ДПП для трикутникових та чотирикутникових форми чарунок у одному сегменті поверхні, який складається із чотирьох чарунок.

У даному підрозділі ставиться за мету дослідити, на прикладі кулі, вплив застосування способу розростання чарунок на величину похибки у зоні екватора.

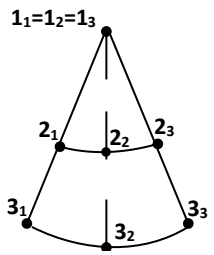


Рис. 3.9. Схема I сегменту

Розглянемо 1/12 частину кулі (рис. 3.7), перший сегмент якої визначений вузловими точками 1_1, 2_1, 3_1, 3_3, 2_3, 1_1 (рис. 3.9). Якщо цей сегмент реконструювати поверхнею типу лупа, використовуючи точкове рівняння (3.20), то у точці 1 треба розглядати три співпадаючі точки $1_1=1_2=1_3$. Це означає, що дуга $1_1 1_2 1_3$ виродилась у точку.

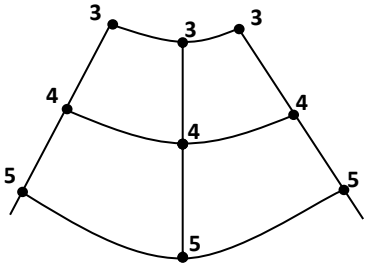


Рис. 3.10. Схема II сегменту

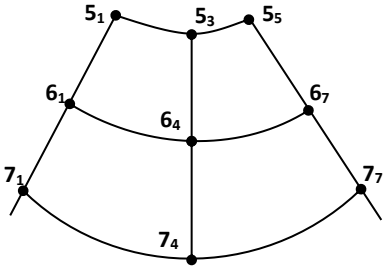


Рис. 3.11. Схема III сегменту

Другий сегмент з рисунку 3.7, визначений вузловими точками 3_1, 4_1, 5_1, 5_5, 4_5, 3_3 (рис. 3.10).

Третій сегмент з рисунку 3.7 визначений вузловими точками 5_1, 6_1, 7_1, 7_7, 6_7, 5_5 (рис. 3.11). Четвертий збільшений сегмент у просторі з рисунку 3.7 визначений вузловими точками 7_1, 8_1, 8_9, 7_7 (рис. 3.12).

Разом з точками 7_4 та 8_5 дійсних вузлових точок всього шість, а для поверхні типу лупа [99] їх необхідно дев'ять. Для збереження таких умов просто подвоїмо якусь із трійок, наприклад, з ряду 8, тоді $8_1 \equiv 9_1$, $8_5 \equiv 9_5$, $8_9 \equiv 9_9$.Далі, застосовуючи поверхні типу лупа записуємо точкові рівняння для усіх чотирьох розглянутих сегментів.

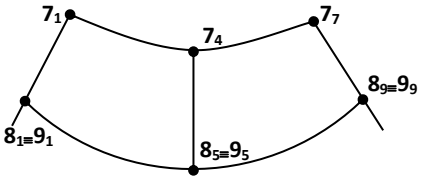


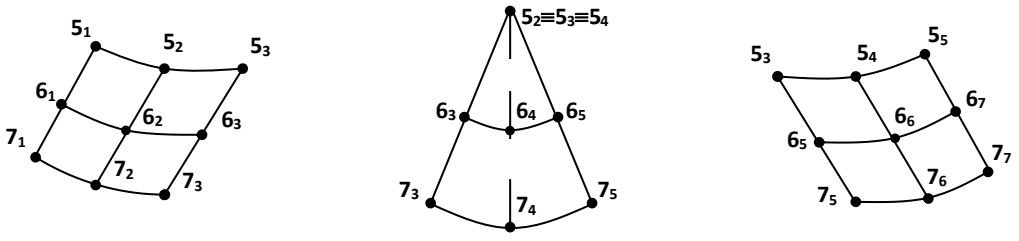
Рис.3.12. Схема IV сегменту

а) б)

Рис. 3.13 Схема II (а) і III (б) сегментів

Тепер розглянемо дискретизацію кулі у випадку із застосуванням способу розростання чарунок (рис. 3.8).

Перший сегмент відповідає рисунку 3.8 і визначається точками, що знаходяться на його межі 1, 2_{11}, 3_{11}, 3_{13}, 2_{13}, повністю співпадає з рис. 3.9 з попереднього випадку. Другий і третій - є симетричними відносно осі (рис. 3.13). Як бачимо, у кожного із сегментів по вісім дійсних вузлових точок, а потрібно – дев'ять. Однієї точки не вистачає у рядку, позначеного цифрою три. Подвоїмо точку 3_2, тоді для лівого сегменту $3_2 \equiv 3_3$ (рис. 3.13а)), а для правого $3_2 \equiv 3_1$(рис. 3.13б)).



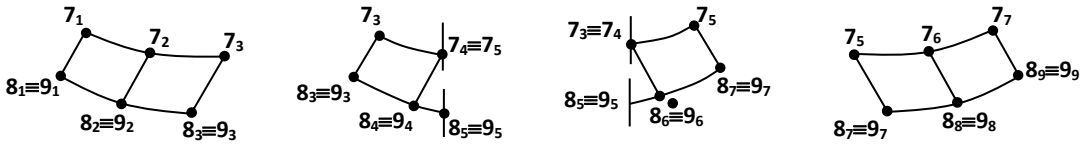
а) б) в)

Рис. 3.14. Схема IV (а), V (б) та VI (в) сегментів

Четвертий, п’ятий та шостий сегменти визначаються 5-м, 6-м та 7-м рядами, зображені на рисунку 3.14.

Для четвертого сегменту (рис. 3.14. (а)), що визначаються точками 5_i, 6_i та 7_i; для i = 1, 2, 3 та шостого сегменту (рис. 3.14. (в)), що визначається точками 5_3, 5_4, 5_5, 6_5, 6_6, 6_7, 7_5, 7_6, 7_7, можна застосовувати точкове рівняння поверхні типу лупа (3.20), оскільки кожен з них утримує по дев’ять дійсних точок.

Для п’ятого сегменту (рис. 3.14. (б)) горизонталі шоста і сьома утримують, кожна, по три точки, а п’ята горизонталь виродилась у точку. Тому, перш ніж застосовувати до п’ятого сегменту точкове рівняння (3.20), необхідно прийняти, що у вершині сегмента, у яку виродилась п’та горизонталь, співпали три точки $5_2 = 5_3 = 5_4$. Після цього, у п’ятого сегменту стали визначеними необхідні, для точкового рівняння (3.20), дев’ять точок, що дозволить його застосувати рівняння визначеного сегменту.



а) б) в) г)

Рис. 3.15. Схема VII (а), VIII (б), IX (в), X (г) сегментів

Останні чотири сегменти сьомий, восьмий, дев’ятий та десятий, що знаходяться між 7-м та 8-м рядами (рис. 3.15а), б), в), г)) теж потребують пояснень.

Для усіх чотирьох випадків (рис. 3.15) не вистачає дев’ятої горизонталі, тому приймаємо її такою, що співпала з восьмою горизонталлю, а звідси, у кожній точці на восьмій горизонталі присутня, відповідна їй, точка дев’ять.

Прийнявши це, випадки а) та г) з рис. 3.15 отримали необхідні дев'ять точок для застосування (3.20).

Для випадку б) рис. 3.15 подвоюємо точку 7_4, прийнявши, що з нею співпадає точка 7_5. Для випадку в) також подвоюємо точку 7_4,прийнявши, що з нею співпадає точка 7_3.

Для усіх елементів, зображених на рисунках 3.9 – 3.15, точкове рівняння має вигляд:

$$\begin{aligned} M = &[A_1\bar{u}(1-2u) + 4A_2u\bar{u} + A_3u(2u-1)]\bar{v}(1-2v) + \\ &+ 4[B_1\bar{u}(1-2u) + 4B_2u\bar{u} + B_3u(2u-1)]v\bar{v} + \\ &+ [C_1\bar{u}(1-2u) + 4C_2u\bar{u} + C_3u(2u-1)]v(2v-1), \end{aligned} \tag{3.20}$$

де A_i, B_i, C_i – умовно позначені вузлові точки, що визначають кожен сегмент; u, v– змінні параметри, що належать відрізку [0,1], на якому визначимо параболу другого сегмента; $\bar{u} = 1-u$, $\bar{v} = 1-v$.

Для отримання рівняння того чи іншого сегменту у (3.20) необхідно замість A_i, B_i, C_i підставити відповідні вузлові точки, що визначають цей сегмент.

Треба зауважити, що схема дискретизації кулі може бути зовсім іншою, ніж та, що подана на рисунку 3.8 також, зовсім іншими можуть бути подвоювання вузлових точок, кожного з розглянутих сегментів, яке застосовується для збільшення їхньої кількості до дев'яти, чого потребує точкове рівняння (3.20). Для проведення порівняння похибки на поверхні сфери, радіусом 100 мм з центром, розташованим у початку системи координат, що подана рівнянням:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{3.21}$$

Нагадаємо, що на рисунку 3.7 була розглянута схема дискретизації сфери без застосування способу розростання чарунок, а на рисунку 3.8 – із застосуванням способу розростання чарунок.

Порівняємо похибки реконструкції сфери, за допомогою точкового рівняння (3.20), для згаданих дискретизацій.

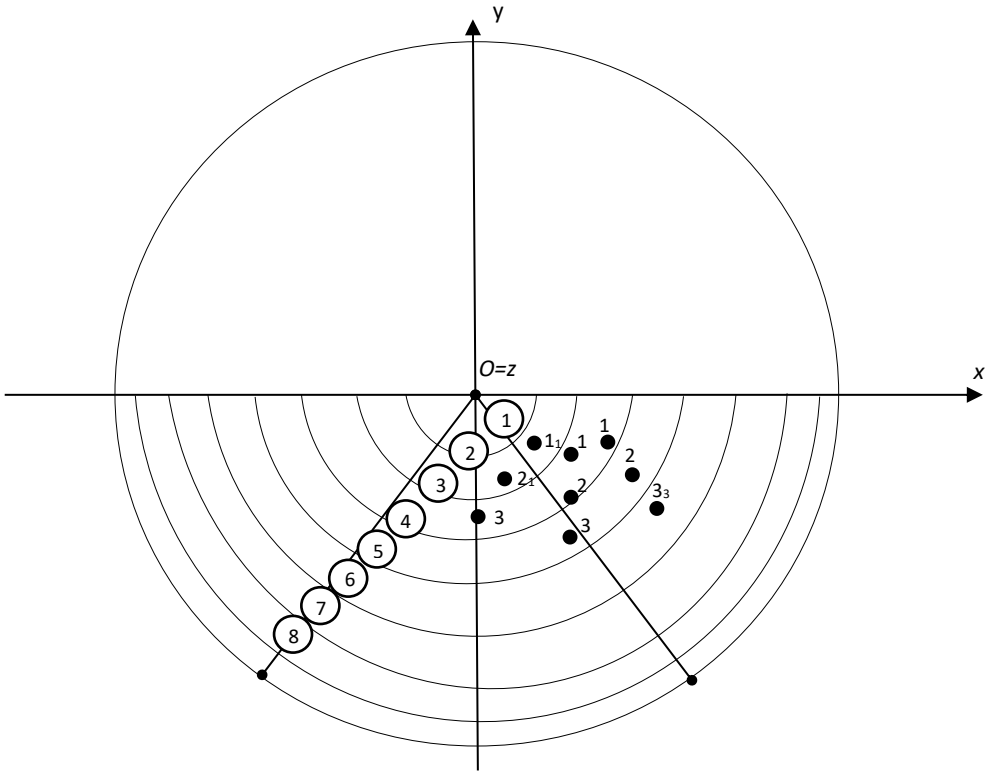


Рис. 3.16 Точки на поверхні кулі для проведення порівняння

Розрахуємо координати опорних точок на рівнях 1, 2, 3 (рис. 3.16) для випадку, у якому не застосовується спосіб розростання чарунок. На поверхні сфери, що визначена рівнянням (3.21), для кожного з визначених рівнів 1, 2, 3 (рис. 3.16), у відповідності до рівняння (3.21), розраховуємо координати опорних точок.

Для рівня 1:

точка 1_1: x_{11} = -3,2; y_{11} = -6; z_{11} = 99,77;

точка 1_2: x_{12} = 0; y_{12} = -6,78; z_{12} = 99,77;

(3.22)

точка 1_3: x_{13} = 3,2; y_{13} = -6; z_{13} = 99,77.

Для рівняння 2:

точка 2_1: x_{21} = -10,6; y_{21} = -19,28; z_{21} = 97,55;

точка 2_2: $x_{22} = 0$; $y_{22} = -22{,}0$; $z_{22} = 97{,}55$;

(3.23)

точка 2_3: $x_{23} = 10{,}6$; $y_{23} = -19{,}28$; $z_{23} = 97{,}55$.

Для рівняння 3:

точка 3_1: $x_{31} = 22{,}5$; $y_{31} = -40{,}69$; $z_{31} = 88{,}53$;

точка 3_2: $x_{32} = 0$; $y_{32} = -46{,}5$; $z_{32} = 88{,}53$;

(3.24)

точка 3_3: $x_{33} = 22{,}5$; $y_{33} = -40{,}69$; $z_{33} = 88{,}53$.

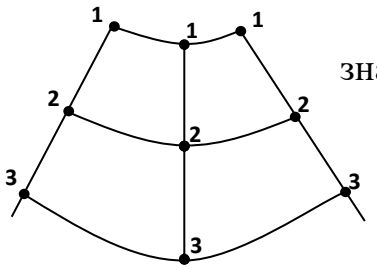


Рис. 3.17. Сегмент поверхні типу лупа

Використовуючи (3.22), (3.23), (3.24), для значень параметрів $u = 0{,}4$; $v = 0{,}6$, обчислимо у відповідності до (3.20), координати x_{A1},y_A z_A для точки A, яка знаходиться на сегменті (рис. 3.17).

$$x_A = [x_{11}\bar{u}(1 - 2u) + 4x_{12}u\bar{u} + x_{13}u(2u - 1)]\bar{v}(1 - 2v) +$$
$$+ 4[x_{21}\bar{u}(1 - 2u) + 4x_{22}u\bar{u} + x_{23}u(2u - 1)]v\bar{v} + \quad (3.25)$$
$$+ [x_{31}\bar{u}(1 - 2u) + 4x_{32}u\bar{u} + x_{33}u(2u - 1)]v(2v - 1).$$

Звідкіля $x_A = -2{,}524$.

Аналогічно:

$$y_A = [y_{11}\bar{u}(1 - 2u) + 4y_{12}u\bar{u} + y_{13}u(2u - 1)]\bar{v}(1 - 2v) +$$
$$+ 4[y_{21}\bar{u}(1 - 2u) + 4y_{22}u\bar{u} + y_{23}u(2u - 1)]v\bar{v} + \quad (3.26)$$
$$+ [y_{31}\bar{u}(1 - 2u) + 4y_{32}u\bar{u} + y_{33}u(2u - 1)]v(2v - 1).$$

За результатами підрахунків $y_A = -26{,}0278$.

Аналогічно для $z_{AЛ}$:

$$z_{AЛ} = [z_{11}\bar{u}(1 - 2u) + 4z_{12}u\bar{u} + z_{13}u(2u - 1)]\bar{v}(1 - 2v) +$$
$$+ 4[z_{21}\bar{u}(1 - 2u) + 4z_{22}u\bar{u} + z_{23}u(2u - 1)]v\bar{v} + \quad (3.27)$$
$$+ [z_{31}\bar{u}(1 - 2u) + 4z_{32}u\bar{u} + z_{33}u(2u - 1)]v(2v - 1).$$

З (3.27) значення $z_{АЛ} = 96,29$. Це значення $z_{АЛ}$ реконструйоване за допомогою поверхі типу лупа, вузловими точками якої є точки, що належать поверхні сфери (3.21) (рис. 3.16), тому у позначенні координати $z_{АЛ}$ індекс утримує букву «Л».

Підставимо значення $x_A = -2,524$ та $y_A = -26,0278$ у рівняння (3.21) і розрахуємо $z_A = 96,5204$.

Порівнюючи $z_{АЛ}$ та z_A визначимо, що абсолютна похибка $П_{Аабс} = z_A - z_{АЛ} = 96,5204 – 96,29 = 0,2304$ мм, а відносна - $П_{Авід} = 1 - \frac{Z_{АЛ} \cdot 100}{Z_A}$ = =0,24%.

Тепер виконаємо реконструкцію сфери для сегменту, зображеного на (рис. 3.17), з використанням способу розростання чарунок (рис. 3.18).

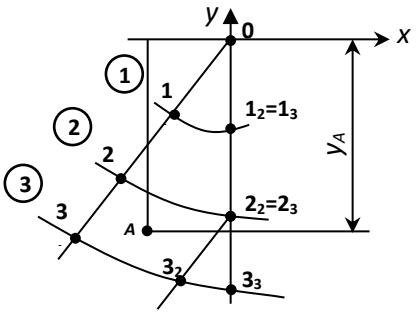


Рис. 3.17. Сегмент поверхні із застосуванням способу розростання чарунок

Як бачимо (рис. 3.18), застосування способу розростання чарунок, дозволяє зменшити у двічі сегмент, що розглядався на рис. 3.17. На рис. 3.18 обрано ту половину, на якій визначено точку A у попередньому випадку. Визначимо для сегменту сфери, який зображено на рис.3.18 координати усіх дев’яти опорних точок.

Для рівня 1:

$$\text{точка } 1_1: x_{11} = -3,2;\ y_{11} = -6;\ z_{11} = 99,77;$$
$$\text{точка } 1_2: x_{12} = 0;\ y_{12} = -6,7;\ z_{12} = 99,77; \qquad (3.28)$$
$$\text{точка } 1_3: x_{13} = 0;\ y_{13} = -6,7;\ z_{13} = 99,77.$$

Для рівняння 2:

$$\text{точка } 2_1: x_{21} = -10,6;\ y_{21} = -19,28;\ z_{21} = 99,55;$$
$$\text{точка } 2_2: x_{22} = 0;\ y_{22} = -22,0;\ z_{22} = 99,55; \qquad (3.29)$$
$$\text{точка } 2_3: x_{23} = 0;\ y_{23} = -22,0;\ z_{23} = 99,55.$$

Для рівняння 3:

$$\text{точка } 3_1\text{: } x_{31} = 22{,}5;\ y_{31} = -40{,}69;\ z_{31} = 88{,}53;$$
$$\text{точка } 3_2\text{: } x_{32} = -11{,}75;\ y_{32} = -44{,}9931;\ z_{32} = 88{,}53; \qquad (3.30)$$
$$\text{точка } 3_3\text{: } x_{33} = 0;\ y_{33} = -46{,}5;\ z_{33} = 88{,}53.$$

Було б доцільним визначити параметри u і v такими, що відповідають координатам точки A, які були розраховані у відповідності до (3.25), (3.26) та (3.27). Однак, встановлення, для сегменту поверхні, взаємно однозначної відповідності між координатами точки на сегменті поверхні та параметрами u і v цієї поверхні, є доволі складною задачею, що не є метою цього дисертаційного дослідження. Тому будемо порівнювати абсолютну та відносну похібку точки А, що визначена при значеннях $u = 0{,}4$ і $v = 0{,}6$ у відповідності до рис. 3.17, з точкою $\bar{A}$, що буде визначена при тих же значеннях $u = 0{,}4$ і $v = 0{,}6$ для сегменту поверхні, який зображено на рис. 3.18. Запишемо рівняння для визначення $x_{\bar{A}}$ - координати точки $\bar{A}$.

$$x_{\bar{A}} = [x_{11}\cdot 0{,}12 + x_{12}\cdot 0{,}96 + x_{13}\cdot(-0{,}08)] \cdot (-0{,}08) +$$
$$+ 4[x_{21}\cdot 0{,}12 + x_{22}\cdot 0{,}96 + x_{23}\cdot(-0{,}08)] \cdot 0{,}24 +$$
$$+ [x_{31}\cdot 0{,}12 + x_{32}\cdot 0{,}96 + x_{33}\cdot(-0{,}08)] \cdot 0{,}12. \qquad (3.31)$$

Підставимо у (3.31) значення координат з (3.28), отримаємо $x_{\bar{A}} = -2{,}644$. Аналогічним чином визначимо $y_{\bar{A}} = -25{,}6001$ та $z_{\bar{A}Л} = 96{,}29$. Із рівняння (3.21) визначимо $z_{\bar{A}}$ на сфері коли $x_{\bar{A}} = -2{,}644$; $y_{\bar{A}} = -25{,}6001$

$$z_{\bar{A}} = \sqrt{R^2 - x_{\bar{A}}^2 - y_{\bar{A}}^2} = 96{,}6315$$

Абсолютна похибка $П_{\bar{A}абс} = 96{,}6315 - 96{,}29 = 0{,}34315$. Відносна похибка $П_{\bar{A}відн} = 0{,}35\%$. Результати розрахунків, які зроблено тут і далі для значень $u = 0{,}4$ і $v = 0{,}6$, напишемо у таблиці 3.2.

Результати розрахунків точок A та $\bar{A}$ у мм при $u = 0{,}4$; $v = 0{,}6$.

Таблиця 3.2.

Точки / Значення	A	Ā
x_A	-2,524	-2,644
y_A	-26,0278	-25,6001
$z_{AЛ}$	96,29	96,29
z_A	96,5204	96,6315
$П_{абс}$	0,2304	0,34315
$П_{відн}$	0,24%	0,35%

У цій таблиці $z_{AЛ}$ – координата точки, що знаходиться на поверхні типу лупа (3.20), а z_A – координата точки, яка знаходиться на сфері (3.21).

Як бачимо з таблиці 3.2, розрахунки щодо точки *A*, розроблені у відповідності до рис. 3.17 без застосування способу розростання чарунок та щодо точки $\bar{A}$, зроблені у відповідності до рис. 3.18 із застосуванням способу розростання чарунок, відрізняються не суттєво і мають один порядок. Це можна пояснити тим, що біля вершини сфери розміри чарунок, як у першому, так і у другому випадках приблизно однакові.

Розглянемо наступні сегменти, які визначаються третім, четвертим та п’ятим рівняннями без застосування способу розростання

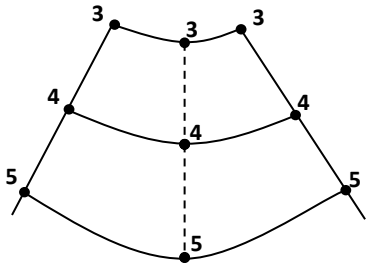


Рис. 3.19. Повний сегмент

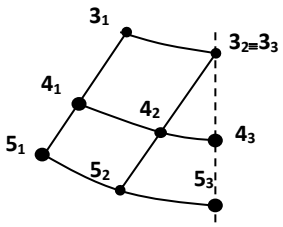


Рис. 3.20. Частинний сегмент

чарунок (рис. 3.20).

Частинний сегмент (рис. 3.20) є лівою частиною повного сегменту (рис. 3.19) і обидва вони виокремленні із 1\12 сфери (рис.

3.16), а вузлові точки 3_i, 4_i, 5_i (для i = $\overline{1,3}$) знаходяться на поверхні, обраної для прикладу, сфери.

Результати розрахунків за цими визначеними сегментами, надамо у таблиці 3.3.

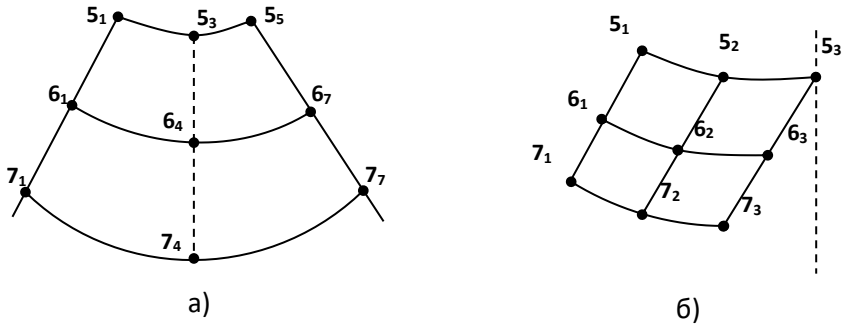
Таблиця 3.3

Результати розрахунків точок B та $\overline{B}$ у мм при $u = 0{,}4$; $v = 0{,}6$.

Точки / Значення	B	$\overline{B}$
X_B	-6,3034	-24,4085
Y_B	-62,8562	-60,5308
$Z_{BЛ}$	75,9887	75,9887
Z_B	77,5201	75,7644
$П_{абс}$	1,5314	0,2243
$П_{відн}$	1,98%	0,296%

Як бачимо з табл. 3.3, точка $\overline{B}$, що отримана на поверхні типу лупа із застосуванням способу розростання чарунок, має похибки $П_{абс}$ та $П_{відн}$, у порівнянні з відповідною їй точкою на сфері, на порядок меншими ніж для точки *B*. Хоча, треба зауважити, що застосування поверхонь типу лупа без способу розростання чарунок, забезпечує похибку у межах 2%, що теж може бути задовільним.

Тепер розглянемо сегмент, що знаходиться ближче до екватору сфери і визначається рівнями 5, 6 та 7 (рис. 3.16). Зобразимо його повний і частинний варіанти на рис. 3.21.



а) б)

Рис. 3.21. а) – варіант повного сегменту без застосування способу розростання чарунок; б) – варіант частинного сегменту із застосуванням способу розростання чарунок.

У цьому випадку, як і раніше, вузлові точки 5_i, 6_i та 7_i; i = $\overline{1,3}$ знаходяться на поверхні сфери (3.21). Результати розрахунків наведемо у таблиці 3.4.

Таблиця 3.4

Результати розрахунків точок C та $\overline{C}$ у міліметрах при u = 0,4; v = 0,6.

Точки / Значення	C	$\overline{C}$
X_C	-8,4896	-24,2188
Y_C	-86,9303	-83,4212
$Z_{СЛ}$	48,796	48,796
Z_C	49,6934	48,5414
$П_{абс}$	0,897	0,2546
$П_{відн}$	1,81%	0,52%

Як бачимо з табл. 3.4, ефект від застосування способу розростання чарунок є дещо меншим ніж у попередньому випадку. Це пояснюється тим, що біля екватору вихідні чарунки (рис. 3.21 (а)) є значно більшими ніж ближче до вершини. Тому для підвищення точності необхідно змінити дискретизацію сфери з метою зменшення чарунок для реконструкції точки $\overline{C}$.

Підсумовуючи дослідження цього підрозділу відносно застосування запропонованого нами способу розростання чарунок, треба сказати, що його головним здобутком є можливість використання не тільки чотирикутних чарунок, а й трикутних, у вигляді прямих і навіть у вигляді точки. При цьому, немає потреби змінювати алгоритм реконструкції поверхні зі зміною форми чарунки. Неперервність реконструкції дискретно поданої поверхні, зі змінними формами чарунок, забезпечується безпомилковим визначенням вузлових точок,

що їх визначають. Такий узагальнений, до форм чарунок, підхід став можливим у результаті застосування поверхонь типу лупа, розробка яких здійснена на базі геометро-математичного апарату точкового БН-числення.

Другим важливим надбанням способу розростання чарунок є можливість підвищувати локально реконструкцію дискретно поданих поверхонь, до необхідної наперед заданої точності.

3.5. Геометричне моделювання горизонталей для відтворення рельєфу земельної ділянки за результатами наземного лазерного сканування

Найбільш звичним поданням топографічної поверхні на мапі, на наш погляд, є її зображення горизонталями. Наявність горизонталей на моделі рельєфу дозволяє визначати геометричні характеристики земельної ділянки, завдяки відомим властивостям, що притаманні горизонталям. Коротко нагадаємо ці властивості. Усі точки однієї горизонталі мають за константу аплікату, закладення між горизонталями визначають крутизну схилів та підвищень, перпендикуляр до горизонталі визначає напрям водотоку у точці, найкоротша відстань між двома горизонталями вказує на напрям найбільшої крутизни рельєфу, вододільні лінії та осі площин перетинаються горизонталями під прямим кутом. Зважаючи на все сказане, горизонталі відіграють велику роль у моделюванні рельєфу. Тому у цьому підрозділі розглянемо їх більш детально.

3.5.1. Огляд деяких досліджень щодо моделювання горизонталей.

Спочатку розглянемо автоматизовані алгоритми побудови горизонталей, до яких можна віднести алгоритм Marching Squares, що був запропонований у роботі [199]. Суть цього алгоритму полягає у розподілі усіх точок скану за рівнями, для цього складається двовимірна матриця значень на базі вихідної рівномірної сітки, на якій встановлюються межі рівнів, відносно цих меж визначаються горизонталі за допомогою контурних чарунок. При послідовному перегляді контурних сіток, що утворюються контурними чарунками, визначаються точки, які знаходяться або вище, або нижче. Недоліком цього алгоритму, на нашу думку, є багатоваріантність прийняття рішень. Для кожної контурної чарунки може бути розраховано до шістнадцяти комбінацій і, у зв'язку з цим, програмна реалізація, а також робота алгоритму, при розв'язанні конкретної задачі, може викликати певні труднощі. Другим недоліком є обмежена точність результатів визначення лінії рівня, яка визначається розміром чарунки контурної сітки, що подається у вигляді прямокутника. Горизонталь, що визначається у процесі виконання алгоритму, на кожному кроці проводиться тільки через середини прямокутників контурної сітки. Для підвищення точності треба змінювати розміри чарунок контурної сітки і повторювати усі розрахунки спочатку.

У роботах [2, 199, 100] розглядаються методи побудови горизонталей, що носять назву сканування та трасування.

Алгоритм методу сканування організовується за допомогою рядкової розгортки з досить малим кроком у межах визначеної ділянки. У результаті такої прогонки визначаються точки, що належать на перед визначеним рівням певних горизонталей. Цей алгоритм передбачає сканування вздовж осей, тобто паралельно їм. Інколи таке пересування викликає погану обумовленість вихідної інформації, коли окрема

ділянка шуканої горизонталі є майже паралельною одній або іншій із осей. Така ситуація змушує виконувати повторне сканування.

Іншою вадою є повільна робота алгоритму за рахунок необхідного застосування дрібної сітки. Перевагою цього методу є те, що будуються одночасно усі горизонталі. Ця обставина потребує наперед правильного обрання відстаней між горизонталями. У разі помилки у виборі кроку, локальне корегування виконати неможливо, необхідно змінити крок та зробити повторне сканування, що є занадто витратним.

Алгоритм методу трасування побудовано на знаходженні вписаної ламаної лінії, вершини якої належать шуканій горизонталі. Побудова кожної ланки ламаної складається із трьох етапів: 1) пересування із початкової точки уздовж дотичної на визначений крок; 2) пошук точки із заданим рівнем горизонталі; 3) з’єднання початкової та знайденої точок. Однією із основних вад цього методу, є накопичення похибки. Тому розмір похибки необхідно контролювати і у разі досягнення межі, обирати нову початкову точку.

У роботі [100] було запропоновано спосіб побудови горизонталей на поверхні типу лупа. Як відомо з [83, 100], чотири точки визначають симплекс тривимірного простору, з'єднавши які, отримаємо тригранну

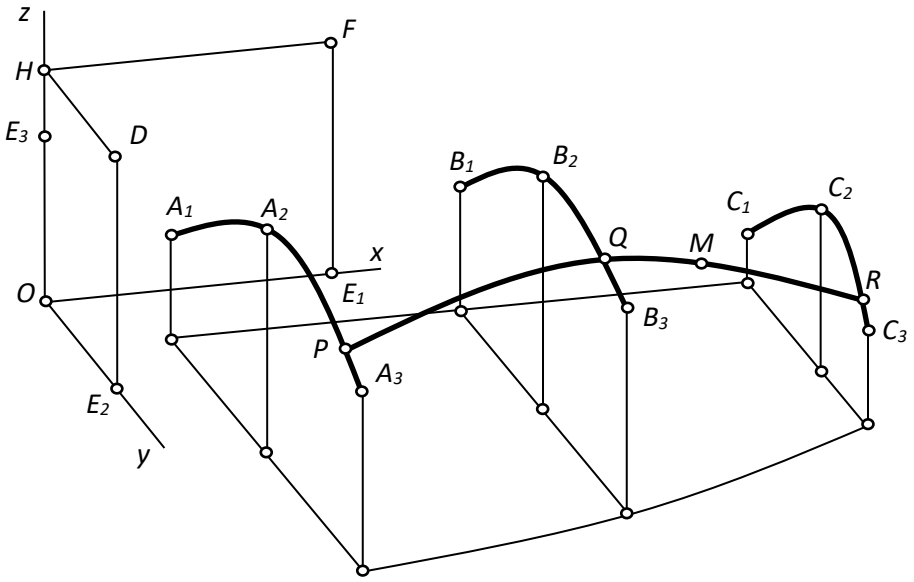


Рис. 3.22. Вихідна схема поверхні типу лупа

піраміду.

Оберемо три точки E_1, E_2, E_3, що є кінцями одиничних векторів, а четверта O – початок декартової системи координат. У симплексі $OE_1E_2E_3$ грані: OE_1E_2 – горизонтальна площина, OE_1E_3 – фронтальна площина, OE_2E_3 – профільна площина. У цьому сегменті $OE_1E_2E_3$ оберемо дев'ять явних точок $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ та три неявні точки $A_\infty, B_\infty, C_\infty$, що визначають сегмент поверхні (рис. 3.22) (на вказаному рисунку неявні точки $A_\infty, B_\infty, C_\infty$ не зображено). Відносно симплексу $OE_1E_2E_3$ визначаємо усі дев'ять явних точок, точкові рівняння яких, у відповідності до [83, 100], матимуть вигляд:

$$A_1 = E_1p_{11} + E_2q_{11} + E_3r_{11} + Os_{11}$$

$$A_2 = E_1p_{12} + E_2q_{12} + E_3r_{12} + Os_{12}$$

$$A_3 = E_1p_{13} + E_2q_{13} + E_3r_{13} + Os_{13}$$

$$B_1 = E_1p_{21} + E_2q_{21} + E_3r_{21} + Os_{21}$$

$$B_2 = E_1p_{22} + E_2q_{22} + E_3r_{22} + Os_{22} \quad (3.32)$$

$$B_3 = E_1p_{23} + E_2q_{23} + E_3r_{23} + Os_{23}$$

$$C_1 = E_1p_{31} + E_2q_{31} + E_3r_{31} + Os_{31}$$

$$C_2 = E_1p_{32} + E_2q_{32} + E_3r_{32} + Os_{32}$$

$$C_3 = E_1p_{33} + E_2q_{33} + E_3r_{33} + Os_{33}$$

Тут, у точкових рівняннях (3.32), індекси $ij = 1j:2j:3j$ вказують на групи точок: 1 – для A, 2 – для B, 3 – для C; індекси $ij = i1:i2:i3$ вказують на порядковий номер точки у групі. Окрім того, у всіх точкових рівняннях (3.32), останній доданок Os_{ij} можна не враховувати, оскільки початок системи координат точка O має усі координати, що дорівнюють нулю – $O(0;0;0)$.

визначимо параметри p_{ij} як співставлення об'ємів:

$p_{ij} = \frac{V_{OA_jE_2E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}}$, тоді для A_j запишемо:

$$p_{11} = \frac{V_{OA_1E_2E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}}; \qquad p_{12} = \frac{V_{OA_2E_2E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}}; \qquad p_{13} = \frac{V_{OA_3E_2E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}};$$

для B_jзапишемо:

$$p_{21} = \frac{V_{OB_1E_2E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}}; \qquad p_{22} = \frac{V_{OB_2E_2E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}}; \qquad p_{23} = \frac{V_{OB_3E_2E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}};$$

для C_jзапишемо:

$$p_{31} = \frac{V_{OC_1E_2E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}}; \qquad p_{32} = \frac{V_{OC_2E_2E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}}; \qquad p_{33} = \frac{V_{OC_3E_2E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}}.$$

Аналогічно для $q_{ij} = \frac{V_{OE_1A_jE_3}}{V_{OE_1E_2E_3}}$:

для A_{ij}:

$$q_{11} = \frac{V_{OE_1A_1E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}}; \qquad q_{12} = \frac{V_{OE_1A_2E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}}; \qquad q_{13} = \frac{V_{OE_1A_3E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}};$$

для B_{ij}:

$$q_{21}=\frac{V_{OE_1B_1E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}};\qquad q_{22}=\frac{V_{OE_1B_2E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}};\qquad q_{23}=\frac{V_{OE_1B_3E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}};$$

для C_{ij}:

$$q_{31}=\frac{V_{OE_1C_1E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}};\qquad q_{32}=\frac{V_{OE_1C_2E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}};\qquad q_{33}=\frac{V_{OE_1C_3E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}}.$$

Аналогічно для $r_{ij}=\frac{V_{OE_1E_2A_j}}{V_{OE_1E_2E_3}}$:

для A_{ij}:

$$r_{11}=\frac{V_{OE_1E_2A_1}}{V_{OE_1E_2E_3}};\qquad r_{12}=\frac{V_{OE_1E_2A_2}}{V_{OE_1E_2E_3}};\qquad r_{13}=\frac{V_{OE_1E_2A_3}}{V_{OE_1E_2E_3}};$$

для B_{ij}:

$$r_{21}=\frac{V_{OE_1E_2B_1}}{V_{OE_1E_2E_3}};\qquad r_{22}=\frac{V_{OE_1E_2B_2}}{V_{OE_1E_2E_3}};\qquad r_{23}=\frac{V_{OE_1E_2B_3}}{V_{OE_1E_2E_3}};$$

для C_{ij}:

$$r_{31}=\frac{V_{OE_1E_2C_1}}{V_{OE_1E_2E_3}};\qquad r_{22}=\frac{V_{OE_1E_2C_2}}{V_{OE_1E_2E_3}};\qquad r_{23}=\frac{V_{OE_1E_2C_3}}{V_{OE_1E_2E_3}}.$$

Визначимо орієнтовані об’єми, що визначають параметри p_{ij}, q_{ij}, r_{ij}. Розглянемо об’єм, який міститься у знаменнику дробу, та є загальним для усіх параметрів. Як відомо [44], у піраміди, два ребра основи, та одне ребро бокове співпадають з осями системи координат та є одиничними відрізками, при цьому, бокове ребро є висотою піраміди, об’єм такої піраміди можна вирахувати як $\frac{1}{6}$ частина визначника:

$$V_{OE_1E_2E_3}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}x_{E_1}-x_0 & y_{E_1}-y_0 & z_{E_1}-z_0\\ x_{E_2}-x_0 & y_{E_2}-y_0 & z_{E_2}-z_0\\ x_{E_3}-x_0 & y_{E_3}-y_0 & z_{E_3}-z_0\end{bmatrix}$$

У цьому визначнику, елементи $x_{E_2}-x_0=0, x_{E_3}-x_0=0$ з першого стовбця дорівнюють нулю тому, що одиничний відрізок OE_1 уздовж осі Ox є перпендикулярним до осей Oy та Oz, в результаті OE_1

на *Oy* та на *Oz* проектується у точки. З тих же причин елементи $y_{E_1} - y_0 = 0,\ z_{E_1} - z_0 = 0$ з першого рядка. Відносно елементу з другого рядка і другого стовбця, який дорівнює одиниці: $y_{E_2} - y_0 = 1$, всі інші елементи згаданих рядка і стовбця дорівнюють нулю. $x_{E_2} - x_0 = 0, z_{E_2} - z_0 = 0, y_{E_1} - y_0 = 0, y_{E_3} - y_0 = 0$ з тих самих причин, що і у попередньому випадку.

Аналогічно, для елементу з третього рядка та третього стовбця $z_{E_3} - z_0 = 1$, маємо: $x_{E_3} - x_0 = 0, y_{E_3} - y_0 = 0, z_{E_1} - z_0 = 0, z_{E_2} - z_0 = 0$. У результаті цього визначник, що розглядається, прийме вигляд:

$$V_{OE_1E_2E_3} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \tag{3.33}$$

Визначимо інші орієнтовані об’єми, що входять до чисельників у параметрах p_{11}, q_{11}, r_{11}:

$$V_{OE_1E_2E_3} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} x_{A_1} - x_0 & y_{A_1} - y_0 & z_{A_1} - z_0 \\ x_{E_2} - x_0 & y_{E_2} - y_0 & z_{E_2} - z_0 \\ x_{E_3} - x_0 & y_{E_3} - y_0 & z_{E_3} - z_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_{A_1} & y_{A_1} & z_{A_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} x_{A_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} x_{A_1} \tag{3.34}$$

$$V_{OE_1A_1E_3} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} x_{E_1} - x_0 & y_{E_1} - y_0 & z_{E_1} - z_0 \\ x_{A_1} - x_0 & y_{A_1} - y_0 & z_{A_1} - z_0 \\ x_{E_3} - x_0 & y_{E_3} - y_0 & z_{E_3} - z_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_{A_1} & y_{A_1} & z_{A_1} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} y_{A_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} y_{A_1} \tag{3.35}$$

$$V_{OE_1E_2A_1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} x_{E_1} - x_0 & y_{E_1} - y_0 & z_{E_1} - z_0 \\ x_{E_2} - x_0 & y_{E_2} - y_0 & z_{E_2} - z_0 \\ x_{A_1} - x_0 & y_{A_1} - y_0 & z_{A_1} - z_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_{A_1} & y_{A_1} & z_{A_1} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} z_{A_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} z_{A_1} \tag{3.36}$$

Таким чином, визначено знаменник (3.33) та три чисельники (3.34), (3.35), (3.36), які необхідні для розрахунку параметрів p_{11}, q_{11}, r_{11}. Розрахуємо їх:

$$p_{11}=\frac{V_{OA_1E_2E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}}=\frac{\frac{1}{6}x_{A_1}}{\frac{1}{6}}=x_{A_1} \tag{3.37}$$

$$q_{11}=\frac{V_{OE_1A_1E_3}}{V_{OE_1E_2E_3}}=\frac{\frac{1}{6}y_{A_1}}{\frac{1}{6}}=y_{A_1} \tag{3.38}$$

$$r_{11}=\frac{V_{OE_1E_2A_1}}{V_{OE_1E_2E_3}}=\frac{\frac{1}{6}z_{A_1}}{\frac{1}{6}}=z_{A_1} \tag{3.39}$$

У результаті, перше точкове рівняння з (3.32), що визначає точку A_1, можемо записати як:

$$A_1 = E_1x_{A_1} + E_2y_{A_1} + E_3z_{A_1} \tag{3.40}$$

Якщо для точок A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 виконати розрахунки, що аналогічні (3.34), (3.35), (3.36), (3.37), (3.38), (3.39) та врахувати (3.33), то точкові рівняння з (3.32) дістануть вигляду:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= E_1x_{A_1} + E_2y_{A_1} + E_3z_{A_1}\\
A_1 &= E_1x_{A_2} + E_2y_{A_2} + E_3z_{A_2}\\
A_1 &= E_1x_{A_3} + E_2y_{A_3} + E_3z_{A_3}\\
B_1 &= E_1x_{B_1} + E_2y_{B_1} + E_3z_{B_1}\\
B_2 &= E_1x_{B_2} + E_2y_{B_2} + E_3z_{B_2}\\
B_3 &= E_1x_{B_3} + E_2y_{B_3} + E_3z_{B_3}\\
C_1 &= E_1x_{C_1} + E_2y_{C_1} + E_3z_{C_1}\\
C_2 &= E_1x_{C_2} + E_2y_{C_2} + E_3z_{C_2}\\
C_3 &= E_1x_{C_3} + E_2y_{C_3} + E_3z_{C_3}
\end{aligned}\right] \tag{3.41}$$

Отримані у (3.41) точки підставимо у точкове рівняння поверхні (3.3) та введемо позначення

$$a = \bar{u}(1-2u),\ b = 4v\bar{v},\ c = u(2u-1),\ d = \bar{v}(1-2v),\ e = 4v\bar{v},\ f = v(2v-1), \tag{3.42}$$

які врахуємо у (3.3). У результаті дістанемо:

$$M = E_1\begin{bmatrix}(x_{A_1}\cdot a + x_{A_2}\cdot b + x_{A_3}\cdot c)d + \\ +(x_{B_1}\cdot a + x_{B_2}\cdot b + x_{B_3}\cdot c)e + \\ +(x_{C_1}\cdot a + x_{C_2}\cdot b + x_{C_3}\cdot c)f\end{bmatrix} +$$

$$+E_2\begin{bmatrix}(y_{A_1}\cdot a + y_{A_2}\cdot b + y_{A_3}\cdot c)d + \\ +(y_{B_1}\cdot a + y_{B_2}\cdot b + y_{B_3}\cdot c)e + \\ +(y_{C_1}\cdot a + y_{C_2}\cdot b + y_{C_3}\cdot c)f\end{bmatrix} +$$

$$+E_3\begin{bmatrix}(z_{A_1}\cdot a + z_{A_2}\cdot b + z_{A_3}\cdot c)d + \\ +(z_{B_1}\cdot a + z_{B_2}\cdot b + z_{B_3}\cdot c)e + \\ +(z_{C_1}\cdot a + z_{C_2}\cdot b + z_{C_3}\cdot c)f\end{bmatrix}. \tag{3.43}$$

Із (3.43) випливає, що:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= (x_{A_1}\cdot a + x_{A_2}\cdot b + x_{A_3}\cdot c)d + (x_{B_1}\cdot a + x_{B_2}\cdot b + x_{B_3}\cdot c)e + \\ &\quad +(x_{C_1}\cdot a + x_{C_2}\cdot b + x_{C_3}\cdot c)f; \\ y_M &= (y_{A_1}\cdot a + y_{A_2}\cdot b + y_{A_3}\cdot c)d + (y_{B_1}\cdot a + y_{B_2}\cdot b + y_{B_3}\cdot c)e + \\ &\quad +(y_{C_1}\cdot a + y_{C_2}\cdot b + y_{C_3}\cdot c)f; \\ z_M &= (z_{A_1}\cdot a + z_{A_2}\cdot b + z_{A_3}\cdot c)d + (z_{B_1}\cdot a + z_{B_2}\cdot b + z_{B_3}\cdot c)e + \\ &\quad +(z_{C_1}\cdot a + z_{C_2}\cdot b + z_{C_3}\cdot c)f. \end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

З урахуванням позначень (3.44), рівняння (3.43) прийме вигляд:

$$M = E_1 x_M + E_2 y_M + E_3 z_M \tag{3.45}$$

На осі OE_3 визначимо довільну точку H за допомогою параметру h, маючи на увазі, що $\bar{h}=1-h$, тоді

$$H = 0\bar{h} + E_3 h \rightarrow H = E_3 h \tag{3.46}$$

У відповідності до правила паралелограма, визначимо D та F, що мають таку ж висоту, що і точка H:

$$\left.\begin{array}{l} D = H + E_2 - 0 = E_2 + E_3 h \\ F = H + E_1 - 0 = E_1 + E_3 h \end{array}\right] \quad (3.47)$$

Таким чином, три точки *H, D, F* мають однакову висоту, що визначається параметром *h*, і тому площина *HDF*, яку вони утворюють, є горизонтальною. Загалом, точкове рівняння (3.43) та його параметрична форма (3.44), надають сегмент топографічної поверхні. Однак, якщо у (3.43) та (3.44) прирівняти $z_M = h$, то отримаємо сегмент горизонтальної кривої лінії, яка знаходиться на сегменті топографічної поверхні і належить горизонтальній площині *HDF*, тобто отримаємо точкове рівняння горизонталі топографічної поверхні (3.45) та її параметричну форму (3.46) для розрахунку координат мінливої точки $M_{гор}$.

$$M_{гор} = E_1 \begin{bmatrix} \left(x_{A_1} \cdot a + x_{A_2} \cdot b + x_{A_3} \cdot c\right) d + \\ + \left(x_{B_1} \cdot a + x_{B_2} \cdot b + x_{B_3} \cdot c\right) e + \\ + \left(x_{C_1} \cdot a + x_{C_2} \cdot b + x_{C_3} \cdot c\right) f \end{bmatrix} +$$

$$+ E_2 \begin{bmatrix} \left(y_{A_1} \cdot a + y_{A_2} \cdot b + y_{A_3} \cdot c\right) d + \\ + \left(y_{B_1} \cdot a + y_{B_2} \cdot b + y_{B_3} \cdot c\right) e + \\ + \left(y_{C_1} \cdot a + y_{C_2} \cdot b + y_{C_3} \cdot c\right) f \end{bmatrix} + E_3 h \quad (3.48)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{M_{гор}} = \left(x_{A_1} \cdot a + x_{A_2} \cdot b + x_{A_3} \cdot c\right) d + \left(x_{B_1} \cdot a + x_{B_2} \cdot b + x_{B_3} \cdot c\right) e + \\ + \left(x_{C_1} \cdot a + x_{C_2} \cdot b + x_{C_3} \cdot c\right) f; \\ y_{M_{гор}} = \left(y_{A_1} \cdot a + y_{A_2} \cdot b + y_{A_3} \cdot c\right) d + \left(y_{B_1} \cdot a + y_{B_2} \cdot b + y_{B_3} \cdot c\right) e + \\ + \left(y_{C_1} \cdot a + y_{C_2} \cdot b + y_{C_3} \cdot c\right) f; \\ z_{M_{гор}} = h. \end{array}\right] \quad (3.49)$$

У рівняннях (3.49) не показано залежність параметрів *u* та *v* від висоти *h* горизонтальної площини *HDF*. Для встановлення цієї залежності розглянемо параметричне рівняння для однієї точки *M* горизонталі, яка знаходиться на визначеній висоті $z_M = h$. Розглянемо останнє рівняння з (3.44), у якому позначимо: $k = z_{A_1} a + z_{A_2} b + z_{A_3} c$, $l = z_{B_1} a + z_{B_2} b + z_{B_3} c$, $m = z_{C_1} a + + z_{C_2} b + z_{C_3} c$, дістанемо:

$$h = k\bar{v}(1-2u) + 4lv\bar{v} + mv(2v-1) \quad (3.50)$$

Перетворимо рівняння (3.50) відносно параметру *v*, дістанемо:

$$(2k-4l+3m)v^2 - (3k-4l+m)v + (k-h) = 0 \quad (3.51)$$

Розв'яжемо (3.51)

$$v_{1,2} = \frac{3k-4l+m \pm \sqrt{(3k-4l+m)^2 - 4(2k-4l+2m)(k-h)}}{4k-8l+4m} \quad (3.52)$$

Розрахункова формула (3.52) показує, що параметр *u* обирається довільно у межах умов розв'язання задачі: $u = \overline{0,1}$, далі з (3.42) визначаються *a, b, c, d, e, f.* Потім призначається h – рівень, на якому треба визначити точки горизонталі на сегменті мапи земельної ділянки та визначаємо з (3.52) значення параметру v_1 та v_2. З двох значень v_1 та v_2 обираємо те значення, що знаходиться у межах від 0 до 1. Змінюючи значення $u = \overline{0,1}$ і повторюючи розрахунки при $b = const$, отримаємо множину точок на мапі, що будуть зображати горизонталь на рівні h.

Запропонований тут спосіб побудови горизонталей на сегменті топографічної поверхні є загальним і тому доволі складним. Оскільки нами раніше було запропоновано підготовку вихідних даних, після наземного лазерного сканування, через дискретно подані горизонталі, то у подальшому будемо застосовувати дискретні методи згущення для зображення горизонталей на мапі земельної ділянки.

3.6 Розрахунковий алгоритм згущення дискретно поданої горизонталі з використанням її супровідних трикутників та супровідної ламаної лінії.

Як було показано у підрозділі 3.1, що найбільш доцільним, при наявній вихідній хмарі точок, є перехід від хмари точок до цифрової моделі поверхні, яка задається у вигляді горизонталей. У цьому ж підрозділі 3.1 було означено принципи переходу від хмари точок, що віддзеркалює поверхню рельєфу земельної ділянки, до дискретно поданих горизонталей, які сформовані на поверхні хмари точок. Такий перехід від хмари точок, що є сканом рельєфу, до поверхні, визначеної дискретно поданими горизонталями, які можуть бути замкненими або незамкненими топографічними кривими, або горизонталями, які складаються з окремих ланок на мапі земельної ділянки. У будь-якому випадку, отримаємо упорядкований дискретний одновимірний

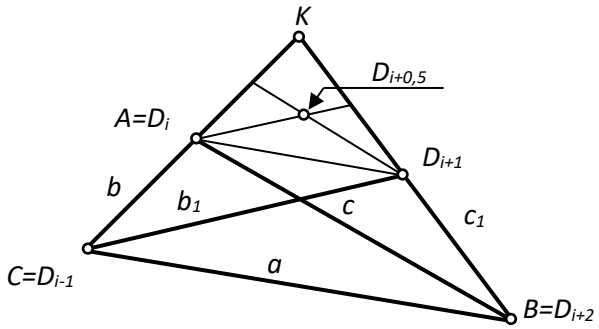


Рис. 3.23. Схема для визначення точки загущення $D_{i+0,5}$

точковий ряд (лінія) у двовимірному просторі (на площині).

Нехай дискретний точковий ряд D_i визначає сегмент горизонталі (рис. 3.23). Для застосування алгоритму згущення необхідно розглядати по чотири точки з точкового ряду D_i, які позначимо D_{i-1}, D_i, D_{i+1}, D_{i+2} та супровідний трикутник $\Delta D_i D_{i+1} K$.

1. Введемо позначення, що визначать симплекс, відносно якого буде відбуватися згущення та знаходження точки загущення $D_{i+0,5}$:

$C = D_{i-1}$ – вершина симплексу,

$A = D_i$, $B = D_{i+2}$ – точки симплексу CAB.

2. Визначимо довжину відрізку $CA = D_{i-1}D_i = b$:

$$b = \sqrt{(x_{D_{i-1}} - x_{D_i})^2 + (y_{D_{i-1}} - y_{D_i})^2}.$$

3. Визначимо довжину відрізку $CB = D_{i+2}D_{i-1} = a$:

$$a = \sqrt{(x_{D_{i+2}} - x_{D_{i-1}})^2 + (y_{D_{i+2}} - y_{D_{i-1}})^2}.$$

4. Визначимо довжину відрізку $AB = D_{i+2}D_i = c$:

$$c = \sqrt{(x_{D_{i+2}} - x_i)^2 + (y_{D_{i+2}} - y_i)^2}.$$

5. Визначити довжину відрізку $CD_{i+1} = D_{i-1}D_{i+1} = b_1$:

$$b_1 = \sqrt{(x_{D_{i+1}} - x_{D_{i-1}})^2 + (y_{D_{i+1}} - y_{D_{i-1}})^2}.$$

6. Визначимо $p = (a + b + c)/2.$

7. Визначимо довжину відрізку $BD_{i+1} = D_{i+2}D_{i+1} = c_1$:

$$c_1 = \sqrt{(x_{D_{i+2}} - x_{D_{i+1}})^2 + (y_{D_{i+2}} - y_{D_{i+1}})^2}.$$

8. Визначимо $p_1 = (a_1 + b_1 + c_1)/2.$

9. Визначимо площу трикутника $S_{ABC} = D_i\, D_{i+2}D_{i+1}$:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

10. Визначимо площу трикутника $S_{D_{i+1}BC} = S_{D_{i+1}D_{i+2}D_{i+1}}$:

$$S_{D_{i+1}BC} = \sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-b)(p_1-c)}.$$

11. Визначимо параметр $p_{i+1} = \frac{S_{D_{i+1}BC}}{S_{ABC}}$.

12. Визначимо параметр $d = u$:

$$d = u = \frac{1}{p_{i+1} + 1}$$

13. Визначимо координати точки K:

$$x_K = x_A(1 - d) + x_c d$$

$$y_K = y_A(1 - d) + y_c d$$

14. Визначимо точку згущення $D_{i+0,5}$:

$$D_{i+0,5} = \frac{D_i + D_{i+1} + K}{3}$$

або у координатній формі

$$x_{i+0,5} = \frac{x_{D_i} + x_{D_i+1} + x_k}{3}; \quad y_{i+0,5} = \frac{y_{D_i} + y_{D_{i+1}} + y_k}{3};$$

15. Далі зрушуємося на одну точку праворуч або ліворуч, перепозначаємо точки і повністю повторюємо наведений алгоритм.

16. Отримані точки загущення $D_{i+0,5}$ включаємо у вихідний точковий ряд, перепозначаємо їх і можемо повторити цей алгоритм згущення доки щільність точок після загущення стане такою, яку вимагає розв'язання задачі.

Треба зауважити, що цей алгоритм, що побудований на застосуванні супровідної ламаної лінії та супровідних трикутників, побудованих на ній, не потребує попереднього визначення точок перегину – вони автоматично визначаються у процесі виконання алгоритму. І, при цьому, чим більша щільність згущення, тим точніше визначається положення точки перегину. Також цей алгоритм дозволяє згущувати дискретні точкові ряди, що утримують точки звороту, точки зламу, місця розриву на горизонталях. У результаті роботи запропонованого розрахункового алгоритму вихідний дискретний точковий ряд згущується до необхідної, наперед заданої, щільності точок, залишаючись, при цьому, дискретним. Такі можливості алгоритму надають суттєві переваги у моделюванні горизонталей на топографічній поверхні, і як наслідок, у розв'язанні поставленої задачі дослідження в цілому.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

У цьому розділі проаналізовано джерела щодо створення геометричних моделей топографічних поверхонь та цифрових моделей рельєфу земельних ділянок, виявлено їхні вади та запропоновано способи моделювання топографічних поверхонь, що усувають виявлені недоліки. У зв'язку з цим, у розділі:

1. Запропоновано і розроблено спосіб підготовки вихідної хмари точок для задання топографічної поверхні її горизонталями, який суттєво спрощує модель рельєфу земельної ділянки зокрема, та розв'язок задач дослідження з мінімізацією ресурсних видатків в цілому.

2. Надано удосконалені параметричні рівняння, що придатні для використання у розрахункових алгоритмах моделювання сегменту топографічної поверхні, які дозволяють підвищувати точність моделювання за рахунок варіювання параметром невласної точки параболи.

3. Розроблено спосіб розростання чарунок, який не потребує особливих підходів згущення в залежності від форми чарунки (чотири-, трикутні), здатен локально підвищувати точність реконструкції топографічної поверхні за рахунок введення додаткових чарунок, що розростаються з точки або лінії. Можливість локального збільшення кількості чарунок для локального підвищення точності моделювання рельєфу, дозволяє зменшити видатки ресурсів і, як наслідок, здешевлення комп'ютерного моделювання. Для зменшення похибки відтворення, особливо ефективним є спосіб розростання чарунок у випадках, коли рельєф має пагорби з вершинами.

4. Зроблено аналіз методів побудови горизонталей на топографічних поверхнях, виявлено їхні вади та запропоновано оригінальний розрахунковий алгоритм згущення дискретно поданої горизонталі на топографічній поверхні з використанням супровідної ламаної лінії та супровідних трикутників на ній, що дозволяє проводити згущення на кривих, які утримують точки перегину, точку звороту, точки зламу та точки розриву. Згущення, з використанням запропонованого алгоритму, може відбуватися до необхідної, наперед заданої, щільності точок. Результатом згущення є також дискретно подана крива. Використання локальних симплексів спрощує розрахунки, тим самим зменшує видатки на ресурси, в результаті, здешевлюється процес комп'ютерного моделювання рельєфу земельної ділянки.

Матеріали щодо теми цього підрозділу опубліковано у статтях:

37. *Верещага В.М.* Спосіб розростання чарунок / *В.М. Верещага, В.В. Кучеренко, О.М. Павленко* // Матеріали ІІ-ї міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Прикладна геометрія, дизайн та об'єкти інтелектуальної власності». Випуск 2. – К.: Дія, 2013р. – с. 13-17.

138. *Павленко О.М.* Застосування способу розростання чарунок для реконструкції дискретно представлених поверхонь / О.М. Павленко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. / Праці. Таврійський державний агротехнологічний університет. – Вип. 4, т. 56. – Мелітополь: ТДАТУ, 2013. – с.272-279.

141. *Павленко О.М.* Спосіб згортання (розгортання) чарунок / Верещага В.М., Адоньєв Є.О., Павленко О.М. // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред.

кол. А.В. Найдиш. – Мелітополь: Видавництво МДПУ імені Б. Хмельницького, 2016.– Вип. 7. – с. 32-38.

РОЗДІЛ 4

МОДЕЛЮВАННЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОЇ ЗЕМЕЛЬНОЇ ДІЛЯНКИ.

Як було наголошено у аналізі методів вертикального планування (підрозділі 1.4), найбільш складними, в усіх розглянутих методах, є розрахунки щодо визначення проектної відмітки. І тому, у цьому розділі, в наших дослідженнях цьому питанню буде приділена особлива увага, тому що з проектною відміткою пов’язано визначення лінії точок нульових робіт, що є межою між насипами та виїмками. Для усунення вад розглянутих методів вертикального планування, у цьому розділі буде вперше запропоновано узагальнений спосіб визначення проектної відмітки, який можна застосовувати в усіх існуючих способах вертикального планування, і у якому не будуть використовуватись графічні методи, щодо створення мапи рельєфу земельної ділянки. До цього ж, спосіб визначення проектної відмітки, що буде запропоновано, є розрахунковим і не використовує обчислювальні методи наближення, тому запропонований розв’язок виконується за розрахунковими формулами і тому здобувається з першого разу. Перерахунки за цим способом можуть бути здійснені тільки з метою підвищення точності щодо об’ємів земляних робіт. Спосіб визначення проектної відмітки, що пропонується, тут може бути легко програмно реалізований і тому придатний до використання у геоінформаційних системах та проектних установах відповідного профілю.

4.1 Про умови щодо меж земельної ділянки.

Межами промислових майданчиків можуть бути лінії та поверхні різної форми. Оскільки мова йде про вертикальне планування, то у

якості вертикального обмежувача ділянки оберемо площини. У площині, закладення у якості геометричної фігури, що обмежує майданчик, оберемо чотиристоронній прямокутник. У реальності вертикальними обмежувачами майданчика можуть бути лінійчасті поверхні, а геометрична фігура у плані – довільної форми. Але, оскільки ці питання не є предметом досліджень, то не будемо узагальнювати їх, і оберемо найпростіший варіант, у плані – прямолінійний чотирьохсторонній прямокутник, через сторони якого проходять вертикальні площини, що перпендикулярні до площини

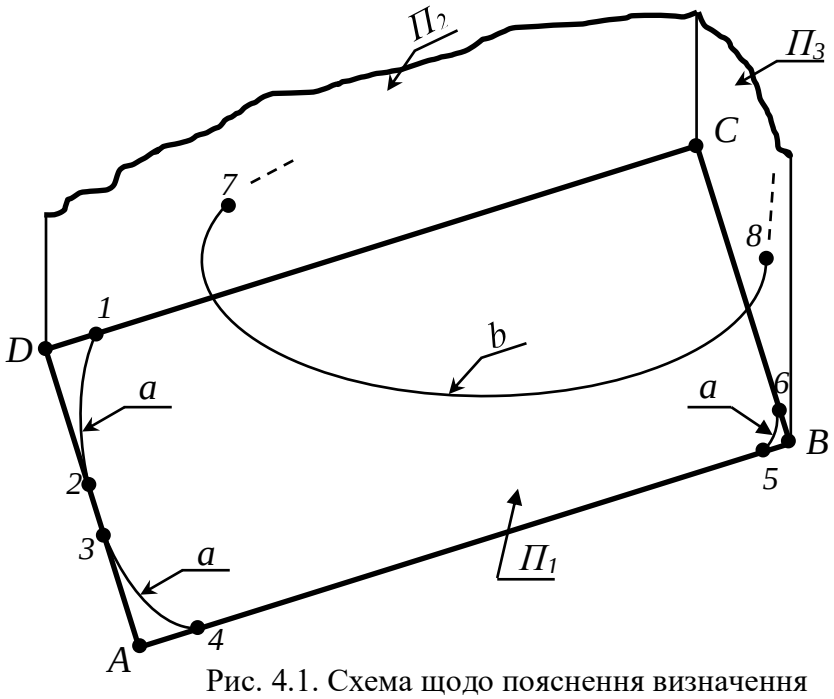


Рис. 4.1. Схема щодо пояснення визначення кінцевих точок горизонталей

закладення, яка проходить через найнижчу, за рівнем моря, горизонталь на мапі земельної ділянки. Таке визначення умов щодо меж майданчика необхідне для знаходження кінцевих точок для горизонталей на мапі земельної ділянки (рис. 4.1).

Кінцевими точками 1, 2, 3, 4 і т.д. будемо вважати такі, що належать горизонталям рельєфу і знаходяться у вертикальних площинах, що обмежують промисловий майданчик. На рис. 4.1 $П_1$ –

площина закладення, у якій знаходиться горизонталь *a*, що складається із сегментів між точками 12; 34; 56. Точки 1, 2,…,6, що визначають сегменти і є – кінцевими. $П_2$, $П_3$ – вертикальні площини, що обмежують промисловий майданчик. Горизонталь *b* знаходиться вище площини закладення і перетинає $П_2$ у точці 7, а $П_3$ – у точці 8, які також є кінцевими точками для горизонталі *b*.

У наведеному прикладі (рис. 4.1), горизонталь *a*, серед інших горизонталей на мапі рельєфу майданчика, має найменшу висоту відносно рівня моря і тому площину закладення *ABCD* проведено на цьому ж рівні.

У підрозділі 3.1.2 було запропоновано алгоритм підготовки вихідної хмари точок, отриманої після наземного лазерного сканування, з метою створення цифрової моделі рельєфу, через нанесення на його мапі дискретно поданих горизонталей, які є організованим одновимірним набором точок у двовимірному просторі. Однак, враховуючи те, що у процесі сканування, окрім точок ділянки промислового майданчика знімаються і точки, що знаходяться за його межами, то і кожна з визначених горизонталей може утримувати точки, які їй належать і знаходяться за межами майданчика. Тому для кожної горизонталі необхідно проводити аналіз щодо належності її точок ділянці, що нас цікавить і тим самим визначати кінцеві точки на кожній горизонталі.

Розв’язувати задачі визначення кінцевих точок або їхню відсутність будемо через проектування усіх горизонталей на площину закладення.

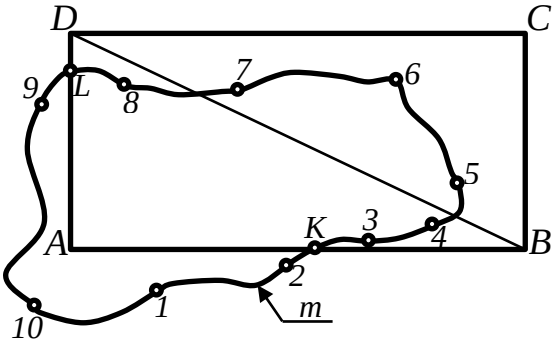


Рис. 4.2. Схема-приклад для визначення кінцевих точок

Прямокутник *ABCD*, який у закладенні обмежує промисловий майданчик, поділимо на два трикутники ΔABD та ΔBCD (рис. 4.2). До речі, можна розглянути і інші два трикутники ΔABC та ΔACD. Нехай крива m – є горизонталлю на мапі рельєфу, що подана дискретно і є упорядкованою одновимірною множиною точок. Ця горизонталь, у загальному випадку, не належить площині закладення, а знаходиться на певній висоті по відношенню до *ABCD*. Для відтворення різних варіантів знаходження кінцевих точок (на рис. 4.2 – не показані) оберемо для прикладу на горизонталі із множини точок, що її утворюють, десять, які позначимо 1, 2,…, 10.

Як відомо [185], точкові рівняння у площині для визначення положення кожної з десяти точок у симплексі *ABD*, мають вигляд:

$$\begin{aligned} 1 &= Ap_{1A} + Bq_{1A} + Dr_{1A} \\ 2 &= Ap_{2A} + Bq_{2A} + Dr_{2A} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 9 &= Ap_{9A} + Bq_{9A} + Dr_{9A} \\ 10 &= Ap_{10A} + Bq_{10A} + Dr_{10A}, \text{ де } p_{iA} + q_{iA} + r_{iA} = 1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Точкові рівняння у площині, для визначення кожної з десяти точок у симплексі, *CBD*, мають вигляд:

$$\begin{aligned} 1 &= Bp_{1C} + Cq_{1C} + Dr_{1C} \\ 2 &= Bp_{2C} + Cq_{2C} + Dr_{2C} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 9 &= Bp_{9C} + Cq_{9C} + Dr_{9C} \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$10 = Bp_{10C} + Cq_{10C} + Dr_{10C}, \text{ де } p_{iC} + q_{iC} + r_{iC} = 1.$$

Розглянемо точкове рівняння для визначення точки 1 з (4.1), положення якої відносно симплексу ABD впливає на знак та значення параметрів p_{1A}, q_{1A}, r_{1A}. Визначимо їх.

$$p_{1A} = \frac{S_{1BD}}{S_{ABD}};\ q_{1A} = \frac{S_{A1D}}{S_{ABD}};\ r_{1A} = \frac{S_{AB1}}{S_{ABD}} \tag{4.3}$$

де S_{ABD}, S_{1BD}, S_{A1D}, S_{AB1} – площі трикутників, позначених у індексах. Для пояснень зобразимо окремо трикутник ΔABD та точку 1 (рис. 4.3) та з'єднаємо точки, щоб отримати усі чотири трикутники, що необхідні для визначення параметрів. Позначимо точку K. Для того, щоб зберіглася умова, що $p_{iA} + q_{iA} + r_{iA} = 1$, необхідно щоби алгебраїчна сума площ трьох трикутників дорівнювала площі ΔABD [185]. Для цього, визначимо знаки $S_{ABD} > 0$, $S_{1BD} > 0$, $S_{A1D} > 0$, $S_{AB1} < 0$. Якщо прийняти до уваги, що $S_{A1D} = S_{AKD} + S_{AK1}$, а $S_{1BD} = S_{KBD} + S_{KB1}$, то можна записати для площ рівняння

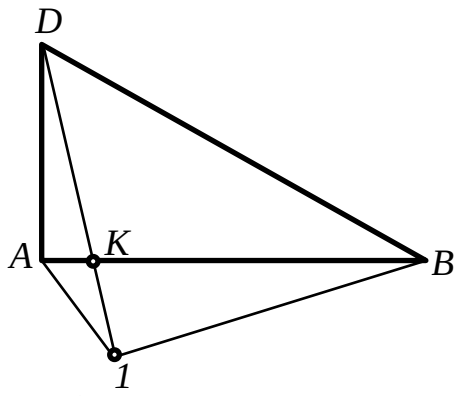


Рис. 4.3. Розташування точки *1* відносно ΔABD

$$S_{A1D} + S_{1BD} = S_{AKD} + S_{AK1} + S_{KBD} + S_{KB1} = S_{AKD} + S_{KBD} + S_{AB1} =$$
$$= S_{ABD} + S_{AB1}.$$

Як бачимо, сума площ $S_{A1D} + S_{1BD} = S_{ABD} + S_{AB1}$ перевищує площу S_{ABD} на площу S_{AB1}. Однак, ми розглянули суму тільки площ двох трикутників, якщо додати третій $S_{AB1} < 0$, то отримаємо

$$S_{A1D} + S_{1BD} - S_{AB1} = S_{ABD} + S_{AB1} - S_{AB1} = S_{ABD},$$

що і треба було довести. Звідси випливає, що $p_{1A} > 0, q_{1A} > 0, r_{1A} < 0$. Таким чином, якщо хоча б один з параметрів є від'ємним, то досліджувана точка знаходиться за межами трикутника *ABD*. Як бачимо, точка 1 знаходиться за межами ΔABD, але для того, щоб з'ясувати чи знаходиться точка 1 за межами промислового майданчика, необхідно визначити її розташування відносно ΔBCD (рис. 4.4). Визначимо параметри з (4.2)

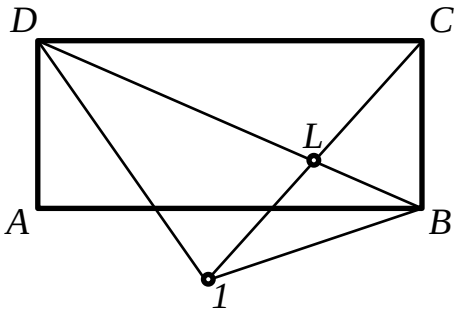


Рис. 4.4. Розташування точки *1* відносно трикутника Δ*BCD*

$$p_{1C} = \frac{S_{1CD}}{S_{BCD}};\ q_{1C} = \frac{S_{B1D}}{S_{BCD}};\ r_{1C} = \frac{S_{BC1}}{S_{BCD}} \tag{4.4}$$

Запишемо рівняння щодо сум площ чотирьох трикутників:

$$S_{BC1} + S_{CD1} - S_{BD1} = S_{BCD}.$$

Доведемо справедливість цього рівняння, замінивши площу S_{BC1} сумою площ:

$S_{BC1} = S_{BCL} + S_{BL1}$, а $S_{CD1} = S_{CDL} + S_{D1L}$, отримаємо

$S_{BCL} + S_{BL1} + S_{CDL} + S_{D1L} - S_{BD1} = S_{BCD}$,

$S_{BCL} + S_{CDL} = S_{BCD}$

$S_{BL1} + S_{D1L} = S_{BD1}$, тоді (4.5) прийме вигляд

$S_{BCD} + S_{BD1} - S_{BD1} = S_{BCD}$.

Таким чином параметр $q_{1C} < 0$, у цьому разі, точка 1 знаходиться за межами ΔBCD.

Твердження 1. У разі, якщо хоча б один з параметрів p_{1A}, q_{1A}, r_{1A} з (4.3) і хоча б один з параметрів p_{1C}, q_{1C}, r_{1C} з (4.4) одночасно є від'ємними, то точка, відносно визначення якої розраховані ці параметри, знаходиться за межами чотирикутника *ABCD*.

Твердження 2. У разі, коли всі параметри p_{1A}, q_{1A}, r_{1A} з (4.3) мають однаковий знак (або додатні, або від'ємні), то точка, відносно визначення якої розраховані ці параметри, знаходиться всередині трикутника *ABD*.

Твердження 3. У разі, коли усі параметри p_{1C}, q_{1C}, r_{1C} з (4.4) мають однаковий знак (або додатні, або від'ємні), то точка, відносно визначення якої розраховані ці параметри, знаходиться всередині трикутника *CBD*.

Визначення знаку для площ має складне геометричне обґрунтування, яке у кінцевому варіанті можна сформулювати наступним чином. Якщо досліджувана точка знаходиться за межами базового трикутника, то із трьох трикутників, що утворюються з'єднуванням досліджуваної точки з вершинами базового трикутника, площу трикутника, який є суміжним із базовим, необхідно брати від'ємною.

І дійсно, у першому випадку (4.3) базовий трикутник *ABD*. Трикутники $\Delta AD1$ та $\Delta BD1$ не є суміжними з ΔABD, їхні площі треба розглядати як додатні. Трикутник $\Delta AB1$ – суміжний з ΔABD, його площу треба брати від'ємною.

У другому випадку (рис. 4.4) коли базовим трикутником є ΔBCD, а суміжним до нього $\Delta BD1$, то $S_{BD1} < 0$ обирається від'ємною, а $S_{BC1} > 0$ і $S_{CD1} > 0$.

Такий аналіз, що проведений до точки 1, необхідно зробити для усіх десяти точок, які визначені (рис. 4.2). У результаті, визначимо на горизонталі дві ділянки між точками 2 та 3 і 8 та 9, для яких певний параметр буде змінювати знак на протилежний.

Застосовуючи на цих ділянках згущення, алгоритм якого був запропонований у підрозділах 2.3 та 3.6, визначимо кінцеві точки K та L.

Встановлення кінцевих точок на кожній із усіх наявних горизонталей на мапі рельєфу, є важливим для визначення їхніх сегментів, що знаходяться у межах промислового майданчика. У подальшому ця інформація буде визначальною для підрахунку об’ємів робіт.

4.2 Визначення площі сегменту, обмеженого дугою кривої, яка задана точковим рівнянням.

Метою встановлення кінцевих точок на горизонталях, була необхідність подальшого їх використання для визначення площі, що обмежена сегментом цієї горизонталі та прямою, яка з’єднує кінцеві точки на горизонталі.

Визначення площ сегментів необхідне для встановлення на рельєфі площі топографічної фігури, яка виникає у результаті його перетину площиною на рівні горизонталі. Розробка способів з цього приводу базується на дослідженнях [9, 32, 86, 125, 185], а отримані результати опубліковані у роботах [135, 139, 140, 144]. Перейдемо до викладення досліджень з цього приводу.

Нехай, у якомусь глобальному симплексі (рис. 4.5), визначена точковим рівнянням (4.6) крива *M*.

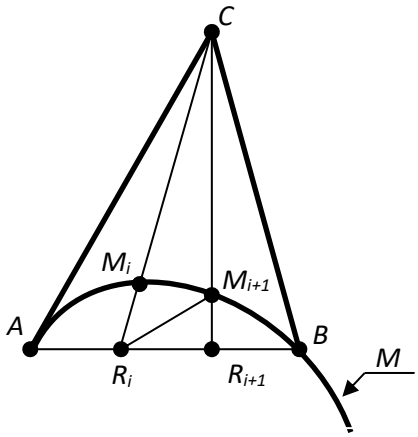


Рис. 4.5. Схема для визначення площі
між відрізком АВ і дугою АВ кривої М.

Обираємо локальний симплекс *CAB*, вершина якого *C* знаходиться поза межами кривої *M* і обирається довільно, а дві інші *A* і *B* – на кривій *M*. Нехай точкове рівняння цієї кривої буде:

$$M = (A - C)\,p + (B - C)q + C, \tag{4.6}$$

де *p* і *q* – параметри, що являють собою у явній або неявній формі просте відношення трьох точок і визначають форму кривої.

Для визначення точок *A* і *B*, що належать кривій *M*, необхідно відносно цих точок розв'язати систему двох рівнянь (4.7):

$$\begin{cases} M_A = Ap_A - Cp_A + Bq_A - Cq_A + C \\ M_B = Ap_B - Cp_B + Bq_B - Cq_B + C \end{cases} \tag{4.7}$$

Звідки можна записати:

$$A = B\frac{q_A}{p_A} + \frac{1}{p_A}(M_A - C(1 - p_A - q_A)), \tag{4.8}$$

якщо позначити $a = M_A - C(1 - p_A - q_A)$, то рівняння (4.8) буде мати вигляд:

$$A = B\frac{q_A}{p_A} + \frac{1}{p_A}a \tag{4.9}$$

Враховуючи (4.9), можна записати:

$$M_B = B\frac{q_A p_B}{p_A} + \frac{p_B}{p_A}a + Bq_B + C(1 - p_B - q_B).$$

Якщо ввести позначення $b = \frac{q_A p_B}{p_A} + q_B$ та $c = M_B - a\frac{p_B}{p_A} - C(1 - p_B - q_B)$, тоді визначимо:

$$B = \frac{c}{b} = b_B \tag{4.10}$$

Враховуючи (4.10) запишемо (4.9):

$$A = a_A = \frac{1}{p_A}(b_{\mathbf{B}} q_A + a) \tag{4.11}$$

З урахуванням (4.10) та (4.11) точкове рівняння (4.6) отримає вигляд:

$$M = (a_A - C)p + (b_B - C)q + C \tag{4.12}$$

Обираємо на кривій M із (4.12) дві довільні точки M_i та M_{i+1}. Запишемо точкові рівняння для цих точок, що визначають їхні координати:

$$M_i = (a_A - C)p_i + (b_B - C)q_i + C, \text{ де } p_i = p(t_i);\ q_i = q(t_i) \tag{4.13}$$

$$M_{i+1} = (a_A - C)p_{i+1} + (b_B - C)q_{i+1} + C, \text{ де } p_{i+1} = p(t_{i+1});\ q_{i+1} = q(t_{i+1}) \tag{4.14}$$

Визначимо точку R_i з простого відношення трьох точок $M_i C R_i$:

$$M_i C R_i = r_i;\ \rightarrow \frac{M_i - R_i}{C - R_i} = r_i;\ R_i = \frac{M_i - C r_i}{1 - r_i}, \text{ де } r_i = 1 - p_i - q_i \tag{4.15}$$

Підставляючи у (4.15) точкове рівняння (4.13), отримаємо точку R_i:

$$R_i = (a_A - C)\frac{p_i}{p_i + q_i} + (b_B - C)\frac{q_i}{p_i + q_i} + C \tag{4.16}$$

Аналогічним чином, визначимо точку R_{i+1} через просте відношення трьох точок у точковій формі:

$$R_{i+1} = \frac{M_{i+1} - Cr_{i+1}}{1 - r_{i+1}}, \tag{4.17}$$

знайдемо точку R_{i+1} із точкового рівняння:

$$R_{i+1} = (a_A - C)\frac{p_{i+1}}{p_{i+1} + q_{i+1}} + (b_B - C)\frac{q_{i+1}}{p_{i+1} + q_{i+1}} + C \tag{4.18}$$

Площа шуканого чотирикутника $S(M_i R_i R_{i+1} M_{i+1})$ (рис.4.5) дорівнює сумі площ двох трикутників $S(M_i R_i M_{i+1})$ та $S(M_{i+1} R_i R_{i+1})$, тобто

$$S_{i,i+1} = \frac{ab\sin\gamma}{2(p_i + q_i)}\left(\begin{vmatrix} p_i & q_i & 1 \\ p_i & q_i & p_i + q_i \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{p_{i+1} + q_{i+1}} \begin{vmatrix} p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \\ p_i & q_i & p_i + q_i \\ p_{i+1} & q_{i+1} & p_{i+1} + q_{i+1} \end{vmatrix} \right) \tag{4.19}$$

Якщо прийняти, що $\Delta_{i,i+1} = p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i$, то отримаємо формулу для обчислення площі чотирикутника (рис.4.5):

$$S_{i,i+1} = \frac{ab\sin\gamma}{2}\left(\frac{r_{i+1} - r_i(p_{i+1} + q_{i+1})}{(p_i + q_i)(p_{i+1} + q_{i+1})}\Delta_{i,i+1} \right), \tag{4.20}$$

де $r_i = 1 - p_i - q_i$, а $r_{i+1} = 1 - p_{i+1} - q_{i+1}$.

Треба зауважити, що чим менший крок між *i*-ю та *(i+1)*-ю точками, тим точніше буде визначено площу трикутника.

Враховуючи з (4.15), що $r_i = 1 - p_i - q_i$ розкриємо визначники з (4.19), в результаті отримаємо:

$$\begin{vmatrix} p_i & q_i & 1 \\ p_i & q_i & p_i + q_i \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_i & q_i & 1 \\ 0 & 0 & -r_i \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \end{vmatrix} = -r_i(p_i q_{i+1} - q_i p_{i+1}) \tag{4.21}$$

У цьому перетворенні визначника від його другого рядка було віднято перший та результат записано до другого рядка перетвореного визначника:

$$\begin{vmatrix} p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \\ p_i & q_i & p_i+q_i \\ p_{i+1} & q_{i+1} & p_{i+1}+q_{i+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \\ p_i & q_i & p_i+q_i \\ 0 & 0 & -r_{i+1} \end{vmatrix} = -r_{i+1}(p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i) \quad (4.22)$$

Якщо для (4.19), (4.21) та (4.22) ввести позначення $\Delta_{i,i+1} = p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i$, то тоді отримаємо формулу для обчислення площі чотирикутника $M_i R_i R_{i+1} M_{i+1}$, сторона якого $M_i M_{i+1}$ є дугою кривої M (рис.4.5).

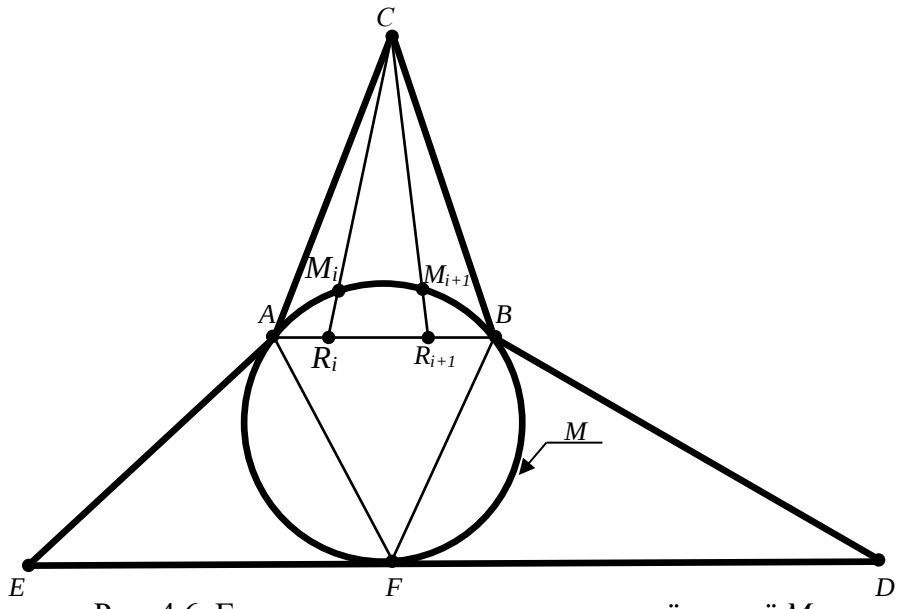


Рис. 4.6. Геометрична схема для замкненої кривої M

Тепер треба обчислити площу S_c, що знаходиться між дугою AB та відрізком прямої AB. У відповідності до рис.4.5 вона буде дорівнювати сумі:

$$S_c = S_{i,i+1} + S(AR_i M_i) + S(M_{i+1} R_{i+1} B) \quad (4.23)$$

Треба зауважити, що для іншої геометричної схеми права частина з (4.23) буде мати іншу кількість та якість доданків.

Дотепер було розглянуто визначення площі для дуги AB кривої M, заданої точковим рівнянням (4.6) відповідно до рис.4.5 для визначення площі S_M, обмеженої замкненою кривою M, у

відповідності до рис.4.6, необхідно розглянути ще два симплекси *DBF* та *EFA* і повторити для них алгоритм, аналогічний алгоритму симплекса *CAB*. Тоді площа S_M може бути обчислена:

$$S_M = S_C + S_D + S_E + S_{\Delta ABF} \qquad (4.24)$$

Розв'язання для іншої геометричної схеми (4.24) буде мати відповідний вигляд.

Розв'язання задачі визначення площі, обмеженої топографічною замкненою плоскою кривою, що представлена у вигляді точкового рівняння, дозволить обчислювати об'єми горбів та западин на рельєфах земельних ділянок.

Часто, для розв'язання цієї задачі необхідно знаходити точку дотику на замкненій кривій з прямою, що проведена із довільної точки поза межами кривої у площині цієї кривої. Цю задачу розглянемо у наступному підрозділі.

4.3 Геометричний алгоритм визначення точки дотику прямої до плоскої кривої, які знаходяться в одній площині.

Перш ніж розв'язувати задачу визначення точки дотику кривої з прямою, яка проведена із довільної точки, що знаходиться в одній площині з кривою та поза її межами, необхідно знайти умову розташування трьох точок на одній прямій.

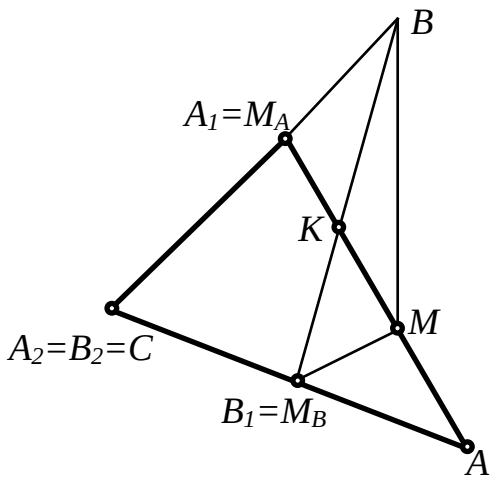


Рис. 4.7. Геометрична схема визначення точки *K*

Розглянемо рис. 4.7, на якому показано геометричну схему визначення точки *K* – перетину двох прямих AM_A і BM_B. У

симплексі CAB визначимо точки M_A і M_B:

$$M_A = (A - C)p_A + (B - C)q_A + C, \quad (4.25)$$

$$M_B = (A - C)p_B + (B - C)q_B + C, \quad (4.26)$$

де $p_A = \frac{A_1 M_A}{A M_A} = \frac{A_1 - M_A}{A - M_A} = \frac{0}{A M_A} = 0.$ (4.27)

Тут спостерігаємо частинний випадок, коли точка перетину A_1 прямої AM_A з прямою BC співпадає з точкою M_A, яку ми визначаємо (4.25).

В результаті цього, довжина відрізку A_1M_A дорівнює нулю і тому параметр $p_A = 0$. Для визначення параметру q_A необхідно провести пряму із точки B через точку M_A і знайти точку перетину прямої BM_A з прямою CA, тобто $BM_A \cap CA = B_2 \equiv C$. Як бачимо, точка B_2 співпадає з вершиною симплексу, точкою C. Після визначення усіх точок, запишемо значення параметру q_A:

$$q_A = \frac{M_A B_2}{B B_2} = \frac{M_A C}{BC} \quad (4.28)$$

Аналогічним чином для (4.26) визначаємо параметри p_B і q_B. Для визначення параметру p_B необхідно виконати наступні геометричні побудови. Із точки A через точку M_B провести пряму AM_B і знайти точку перетину прямої AM_B із прямою BC. Оскільки це є частинний випадок до загальної геометричної схеми визначення параметру p_B [39], то пряма AM_B співпадає з прямою AC, а точка перетину $B_2 = AM_B \cap BC$ співпадає з точкою С – вершиною симплексу $B_2 \equiv C$, у результаті:

$$p_B = \frac{M_B B_2}{A B_2} = \frac{M_B C}{AC} \quad (4.29)$$

Для визначення параметру q_B необхідно через точку M_B із вершини B провести пряму BM_B і знайти точку B_1 їхнього перетину. Оскільки $M_B \in AC$, то точка $B_1 \equiv M_B$, звідки довжина відрізку $M_B B_1$ буде

дорівнювати нулю. Враховуючи це, значення q_B теж буде дорівнювати нулю:

$$q_B = \frac{MB_1}{AC} = \frac{0}{AC} = 0 \tag{4.30}$$

У тому ж таки симплексі *CAB* визначимо точку *B* із наступного рівняння:

$$B = (A - C)p + (B - C)q + C \tag{4.31}$$

Якщо у (4.31) прийняти *p = 0, q = 1*, отримаємо:

$$B = (A - C) \cdot 0 + (B - C) \cdot 1 + C \ \rightarrow B = B \tag{4.32}$$

Запишемо точкове рівняння для змінюваної точки *M* у одновимірному симплексі AM_A:

$$M = (M_A - A)\lambda + A \tag{4.33}$$

Змінюючи параметр λ, буде змінювати своє положення і точка *M* на прямій AM_A і, у кінцевому рахунку, точка *M* може зайняти положення шуканої точки *K* – точки перетину прямих BM_B і AM_A: $K \in AM_A \cap BM_B$.

У цьому випадку, площа трикутника ΔBM_BM буде дорівнювати нулю.

Перетворимо рівняння (4.33), підставивши у нього (4.25), а також врахуємо, що точкове рівняння точки *A*, у симплексі *CAB*, має вигляд:

$A = (A - C) \cdot 0 + (B - C) \cdot 1 + C$, дістанемо: (4.34)

$$M = (A - C)p_A\lambda + (B - C)q_A\lambda + C\lambda - (A - C) \cdot 1 \cdot \lambda - (B - C) \cdot 0 \cdot \lambda - \\ - C\lambda + (A - C) \cdot 1 + (B - C) \cdot 0 + C$$

$$= (A - C)(p_A - 1)\lambda + (B - C)q_A\lambda + C \tag{4.35}$$

Для того, щоби площа трикутника ΔBM_BM дорівнювала нулю, необхідно щоб визначник, складений з параметрів точок *B, M_B, M* з рівнянь (4.25), (4.31), (4.35), дорівнював нулю

$$\begin{vmatrix} (p_A-1)\lambda & q_A\lambda & 1 \\ p & q & 1 \\ p_A & q_A & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.36)$$

Розкриємо цей визначник та знайдемо змінюваний параметр λ, при якому він дорівнюватиме нулю:

$$(p_A-1)q\lambda + q_A p_A\lambda + pq_A - p_A q - (p_A-1)q_A\lambda - pq_A\lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{p_A q - pq_A}{(p_A-1)(q-q_A) - q_A(p_A+p)} \qquad (4.37)$$

Якщо у (4.35) підставити (4.37), то отримаємо шукану точку *K* – перетину двох прямих AM_A і BM_B.

$$K = (A-C)(p_A-1)\frac{p_A q - pq_A}{(p_A-1)(q-q_A) - q_A(p_A+p)} +$$

$$+(B-C)q_A\frac{p_A q - pq_A}{(p_A-1)(q-q_A) - q_A(p_A+p)} + C \qquad (4.38)$$

У роботі [39] надано теоретичне обґрунтування наведеного підходу для знаходження точки *K*. У роботі [185] розв'язання цієї задачі, щодо визначення точки *K* – перетину двох прямих, наведено у загальному вигляді, коли точки, які визначають прямі, що перетинаються, не є елементами симплексу і не належать елементам симплексу. У цьому підрозділі вперше наведено розв'язання задачі знаходження точки *K* для частинного випадку, коли точки *A* і *B* є елементами симплексу *CAB*, а точки M_A і M_B належать сторонам симплексу *CA* і *CB*.

Річ у тім, що такий частинний випадок, на нашу думку, є більш складним, у розумінні, ніж загальний випадок. Отриманий тут розв'язок для частинного випадку, знаходиться у повній відповідності із загальним розв'язком, що наведений у [185].

Тепер перейдемо для розгляду питання щодо визначення точок дотику прямої до кривої, що проведена з довільної точки, яка є поза межами кривої, з опуклої її сторони, і знаходиться у площині цієї

кривої. Дослідження з цього приводу опубліковані у [39]. У дисертаційних дослідженнях Конопацького Є.В., Давиденка І.П. [59, 86] та їхніх наукових керівників Верещаги В.М. і Балюби І.Г. [9, 32] було розв'язано задачу побудови дотичної у точці на кривій, що здана точковим рівнянням. При цьому, застосовувалося диференціювання точкового рівняння і знаходилося точкове рівняння для похідної. Знаходження точкового рівняння для похідної інколи викликає певні труднощі. Тому у даному підрозділі пропонується інший підхід для побудови дотичної до кривої.

Нехай у симплексі $A_1A_2A_3$ точковим рівнянням (4.39) задана плоска крива M (рис.4.8):

$$M = (A_2 - A_1)p(t) + (A_3 - A_1)q(t) + A_1 \qquad (4.39)$$

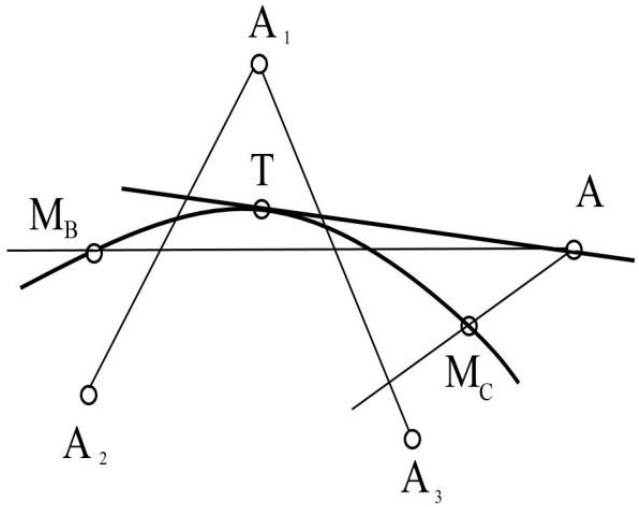


Рис. 4.8. Геометрична схема побудови дотичної AT

У площині цієї кривої (4.39) довільно обираємо (рис.4.8) точку A у тому ж таки симплексі $A_1A_2A_3$. Точкове рівняння (4.40) точки A матиме вигляд:

$$A = (A_2 - A_1)p_{\mathrm{A}} + (A_3 - A_1)q_{\mathrm{A}} + A_1 \qquad (4.40)$$

На рис.4.8 буквою T позначено шукану точку дотику прямої AT до кривої M. Змінювані точки, позначені літерами M_B і M_C.

Для визначення точки дотику T, скористаємося властивістю метричного оператора трьох точок прямої [185], яку викладемо у відповідності до геометричної схеми (рис.4.8). У цій властивості визначається, що дотримання рівності метричного оператора $\sum^{\mathrm{A}}_{\mathrm{M_B\,M_C}}$ та кореня квадратного з добутку метричних операторів $\sum^{\mathrm{A}}_{\mathrm{M_B M_B}} \cdot \sum^{\mathrm{A}}_{\mathrm{M_C M_C}}$, забезпечує площу ΔAM_BM_C, яка дорівнює нулю. Враховуючи це, змінюємо положення точок M_B та M_C, залишаючи повсякчас їх на кривій M, то у момент їхнього співпадання $M_B = M_C = T$, утворюється точка дотику T. З геометричної точки зору це відповідає рівності відрізків $AM_B = AM_C = AT$. Використовуючи (4.39) визначимо точки M_B, рівняння (4.41) та M_C, рівняння (4.42):

$$M_B = (A_2 - A_1)p(t_{\mathrm{B}}) + (A_3 - A_1)q(t_{\mathrm{B}}) + A_1 \qquad (4.41)$$

$$M_C = (A_2 - A_1)p(t_{\mathrm{C}}) + (A_3 - A_1)q(t_{\mathrm{C}}) + A_1 \qquad (4.42)$$

Або у іншому вигляді:

$$M_B = A_1\big(1 - p(t_{\mathrm{B}}) - q(t_{\mathrm{B}})\big) + A_2p(t_{\mathrm{B}}) + A_3q(t_{\mathrm{B}}) \qquad (4.43)$$

$$M_C = A_1\big(1 - p(t_{\mathrm{C}}) - q(t_{\mathrm{C}})\big) + A_2p(t_{\mathrm{C}}) + A_3q(t_{\mathrm{C}}) \qquad (4.44)$$

Аналогічним чином визначаємо точку дотику T:

$$T = T_1\big(1 - p(t_\mathrm{T}) - q(t_\mathrm{T})\big) + T_2 p(t_\mathrm{T}) + A_3 q(t_\mathrm{T}) \qquad (4.45)$$

Враховуючи згадану вище властивість метричного оператора трьох точок прямої:

$$\sum\nolimits_{\mathrm{M_B M_C}}^{\mathrm{A}} = \sqrt{\sum\nolimits_{\mathrm{M_B M_B}}^{\mathrm{A}} \cdot \sum\nolimits_{\mathrm{M_C M_C}}^{\mathrm{A}}}, \qquad (4.46)$$

та застосовуючи *S*-теорему для вимірювання площею $\Delta A_1A_2A_3$площ двох трикутників ΔAM_BT і ΔAM_CT, та поставивши вимогу, щоб площі S_{AM_BT} *і* S_{AM_CT} дорівнювали нулю, дістанемо два визначника (4.47) та (4.48), що дорівнюють нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 - p_A - q_A & p_A & q_A \\ 1 - p(t_\mathrm{B}) - q(t_\mathrm{B}) & p(t_\mathrm{B}) & q(t_\mathrm{B}) \\ 1 - p(t_T) - q(t_T) & p(t_T) & q(t_T) \end{vmatrix} = 0; \qquad (4.47)$$

$$\begin{vmatrix} 1 - p_A - q_A & p_A & q_A \\ 1 - p(t_C) - q(t_C) & p(t_C) & q(t_C) \\ 1 - p(t_T) - q(t_T) & p(t_T) & q(t_T) \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.48)$$

Розв’язавши систему точкових рівнянь відносно $p(t_T)$ та $q(t_T)$, отримаємо значення параметрів, що визначають точку дотику *T*, у якій пряма *AT* дотикається до кривої *M*.

4.4 Визначення площі, обмеженої дискретно поданою горизонталлю топографічної поверхні.

У підрозділі 4.2 було розглянуто визначення площі сегменту, обмеженого дугою кривої, яка континуально задана точковим рівнянням, а також показано алгоритм визначення площі обмеженої замкненою горизонталлю.

Розгляд питання щодо визначення площі, обмеженої дискретно поданою горизонталлю, є необхідним, виходячи з того, що у підрозділі 3.1.2 було розглянуто питання упорядкування горизонталей топографічної поверхні на основі вихідної хмари точок, отриманої у результаті наземного лазерного сканування. Запропоноване у підрозділі 3.1.2 упорядкування, після наземного лазерного сканування вихідної інформації, призводить до утворення, на необхідній відстані одна від одної, горизонталей у вигляді дискретно поданих кривих.

Як було показано у підрозділі 4.1, при визначенні кінцевих точок, що горизонталі топографічної поверхні можуть бути поданими різними геометричними фігурами. Розглянемо дискретно подані горизонталі, що не мають кінцевих точок, тобто є замкненими, і такі, що мають кінцеві точки, тобто, у межах промислового майданчика вони є незамкненими.

4.4.1 Визначення площі, що обмежена замкненою дискретно поданою горизонталлю топографічної поверхні.

Нехай у межах промислового майданчика *ABCD* існує замкнена горизонталь, що дискретно подана точками A_i, $i = \overline{1,N}$ і не утримує кінцевих точок (рис. 4.9). Треба визначити площу геометричної фігури в середині цієї горизонталі. Зобразимо збільшено на рис. 4.10 цю горизонталь. Будемо обчислювати площу фігури як суму площ множини трикутників. Для цього необхідно обрати одну або декілька точок B_j в середині

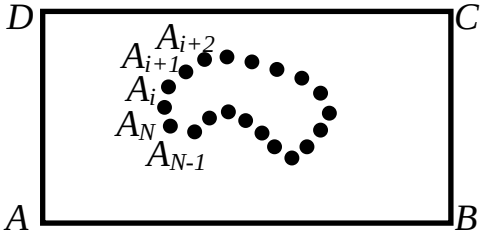


Рис. 4.9. Приклад дискретно поданої горизонталі, що не утримує кінцевих точок

геометричної фігури і з'єднати її (або їх) з усіма точками A_i, які формують дискретну криву. А також з'єднати між собою усі точки A_i.

Як бачимо, для показаної на рис. 4.10 кривої, було взято три точки B_1, B_2, B_3. Можна було б узяти і дві точки або B_1, B_2, або B_2, B_3, або B_1, B_3. Тоді, у цьому випадку, з'єднання точок у трикутнику необхідно виконувати обачливо, наприклад, ні у якому разі не можна з'єднувати точку B_3 з точками A_N, A_{N-1}, A_{N-2} та інших подібних, тому що пряма B_3A_N буде перетинати горизонталь. Однак, ми не досліджуємо загальні правила обрання кількості точок B_j та місця їхнього розташування, тому що це не є метою нашого дослідження. Таким чином, площа фігури $S_{гор}$, що обмежена дискретно поданою горизонталлю топографічної поверхні можна записати як суму площ трикутників $S_{\Delta B_j A_i A_{i+1}}$:

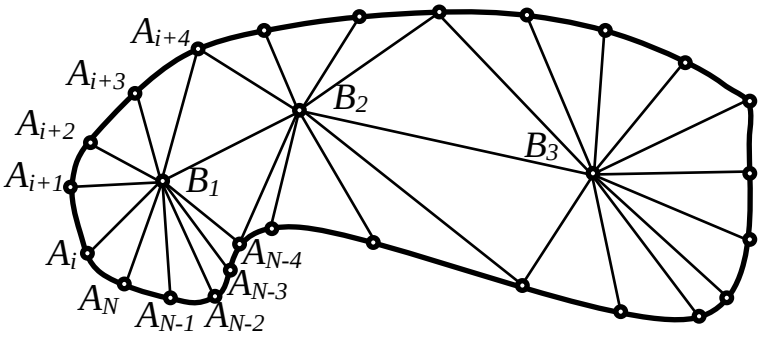


Рис. 4.10. Збільшення зображення фігури горизонталі

$$S_{\text{гор}} = \sum_{i,j=1}^{N} S_{\Delta B_j A_i A_{i+1}} \tag{4.49}$$

При цьому, треба зауважити, що поділ на трикутники фігури, обмеженої горизонталлю, може бути і іншим, не обов'язково таким, що

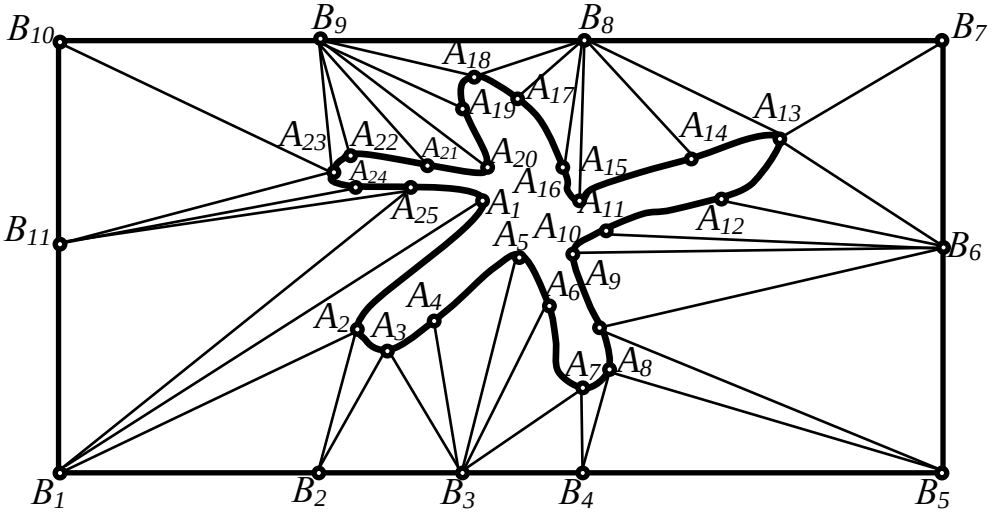


Рис. 4.11. Другий спосіб визначення площі, обмеженої дискретно поданою горизонталлю

наведений на рис. 4.10. У випадках, коли форма горизонталі є досить складною, то для визначення площі, що обмежена цією горизонталлю можна застосовувати інший спосіб, який розглянемо далі. На рис. 4.11 прямокутний промисловий майданчик визначено точками B_1, B_5, B_7, B_{10}, а дискретно подана горизонталь визначається точками $A_1, A_2, \ldots, A_{24}$, A_{25}, які з'єднаємо у замкнену ламану відрізками $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{24}A_{25}$, $A_{25}A_1$. Оберемо додатково точки $B_2, B_3, \ldots, B_{11}$ та з'єднаємо їх з точками горизонталі A_i, як показано на рис. 4.11, або якимось іншим способом. Тоді площу $S_{гор}$, яка обмежена дискретно поданою горизонталлю, що визначена точками $A_1, \ldots, A_{25}$, дістанемо як різницю площі горизонтального майданчик – S_M.

$S_M = |B_1B_5| \times |B_5B_7|$, та суми площ усіх трикутників

$$\sum_{i,j=1}^{N_i,N_j} S_{\Delta B_j A_i A_{i+1}},$$

тобто

$$S_{\text{гор}} = S_M - \sum_{i,j=1}^{25,11} S_{\Delta B_j A_i A_{i+1}} - \sum_{i,j=1}^{25,11} S_{\Delta B_j A_i B_{i+1}} \qquad (4.50)$$

Треба зауважити, що і у (4.49) і у (4.50) кількість сум площ визначається не кількістю усіх можливих перестановок, а кількість наявних трикутників відповідно до рис. 4.10 та рис. 4.11.

Можна використовувати і одночасно у комбінації два розглянуті способи (рис. 4.10, рис. 4.11) визначення площі $S_{\text{гор}}$, але тут не будемо наводити прикладу їхнього комбінованого застосування, тому що варіантів може бути багато.

4.4.2 Визначення площі геометричної фігури, яка обмежена незамкненою дискретно поданою горизонталлю топографічної поверхні.

Досить складно розробити узагальнюючі способи визначення площі, що обмежена горизонталлю топографічної поверхні. Це питання потребує окремого наукового дослідження і, оскільки питання тріангуляції плоских геометричних фігур не є темою нашого дослідження, то наведемо декілька прикладів, що допоможуть, на нашу

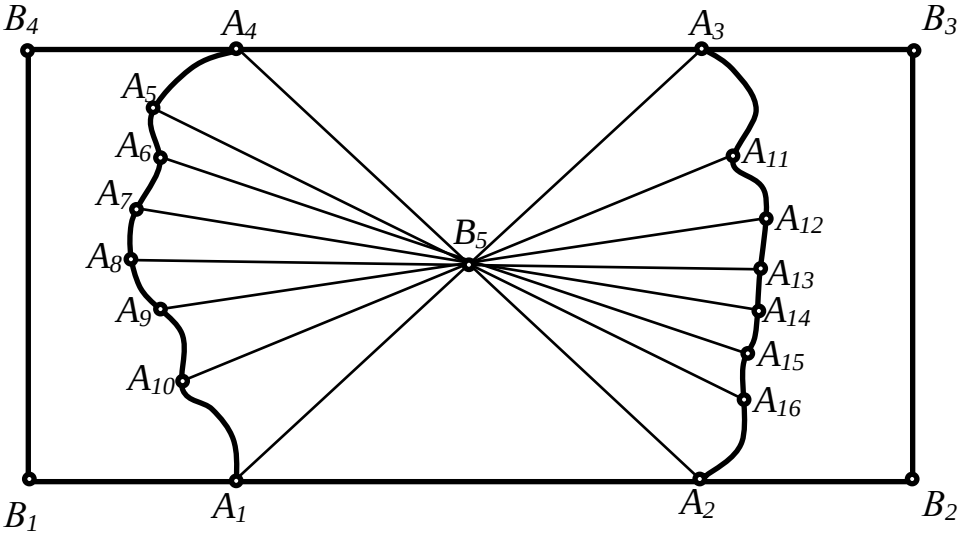


Рис. 4.12. Визначення площі, обмеженої незамкненою горизонталлю, приклад 1

думку, зрозуміти принципи визначення площі фігури, що обмежена дискретно поданою незамкненою горизонталлю топографічної поверхні.

Нехай промисловий майданчик обмежений прямокутником $B_1B_2B_3B_4$ (рис. 4.12). Точки A_1, A_2, A_3, A_4 є кінцевими точками, у відповідності до 4.1 нашого дослідження, двох сегментів горизонталі, що подана точками A_5, A_6,…, A_{15}, A_{16}. Оберемо точку B_5 та побудуємо трикутники $\Delta B_5 A_i A_{i+1}$. Тоді площу $S_{\text{гор}}$ можна розрахувати через суму площ трикутників:

$$S_{\text{гор}} = S_{B_5A_1A_2} + S_{B_5A_3A_4} + S_{B_5A_4A_5} + \cdots + S_{B_5A_{10}A_1} + S_{B_5A_2A_{16}} + \cdots + S_{B_5A_{11}A_3} \quad (4.51)$$

Тут була використана точка B_5, що обмежена горизонталлю. Розв'яжемо цю ж саму задачу з використанням точок B_j, які знаходяться зовні горизонталі (рис. 4.13) – B_1,…, B_6. У цьому випадку площу $S_{\text{гор}}$ можна розрахувати через алгебраїчну суму:

$$S_{\text{гор}} = S_{B_1B_2B_3B_4} - S_{B_1B_5A_8} - S_{B_4B_5A_6} - S_{B_2B_6A_{15}} -$$
$$-S_{B_3B_6A_{13}} - S_{B_1A_1A_{10}} - \cdots - S_{B_1A_9A_8} - S_{B_5A_8A_7} - S_{B_5A_7A_6} - S_{B_4A_6A_5} -$$

$$-S_{B_4A_5A_4} - S_{B_3A_3A_{11}} - S_{B_3A_{11}A_{12}} - S_{B_3A_{12}A_{13}} - S_{B_6A_{13}A_{14}} -$$

$$S_{B_6A_{14}A_{15}} -$$

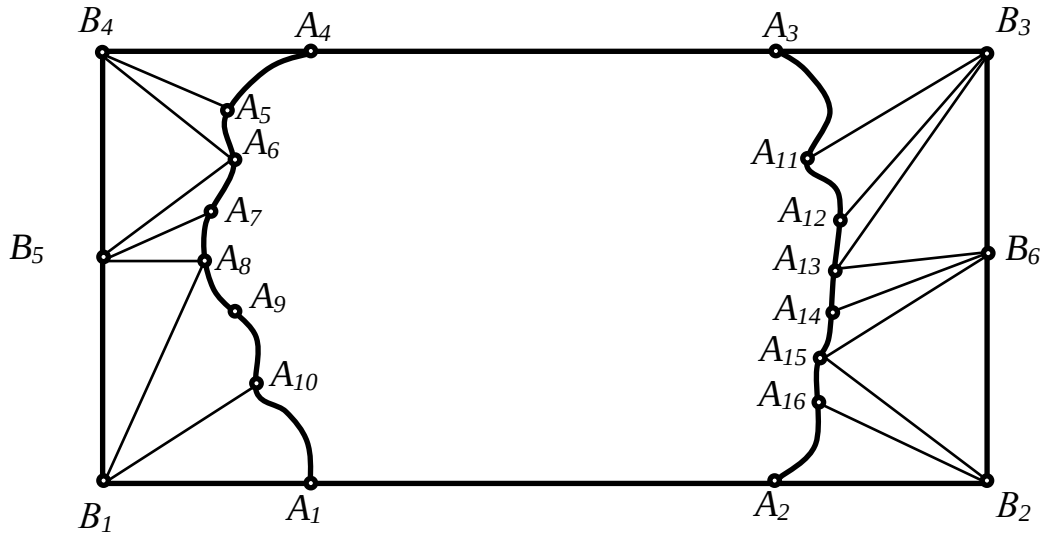


Рис. 4.13. Визначення площі $S_{гор}$, обмеженої не замкненою горизонталлю, приклад 1, другий спосіб.

$$-S_{B_2A_{15}A_{16}} - S_{B_2A_{16}A_2} \tag{4.52}$$

Тепер розглянемо випадок, коли горизонталь поділена на декілька окремих, пов’язаних між собою тільки однаковою висотою, сегментів (рис. 4.14). На цьому рисунку область *C* належить до площі $S_{\text{гор}}$, яку необхідно визначити, область *D*, яка складається із декількох окремих частин S_C, не належить $S_{\text{гор}}$.

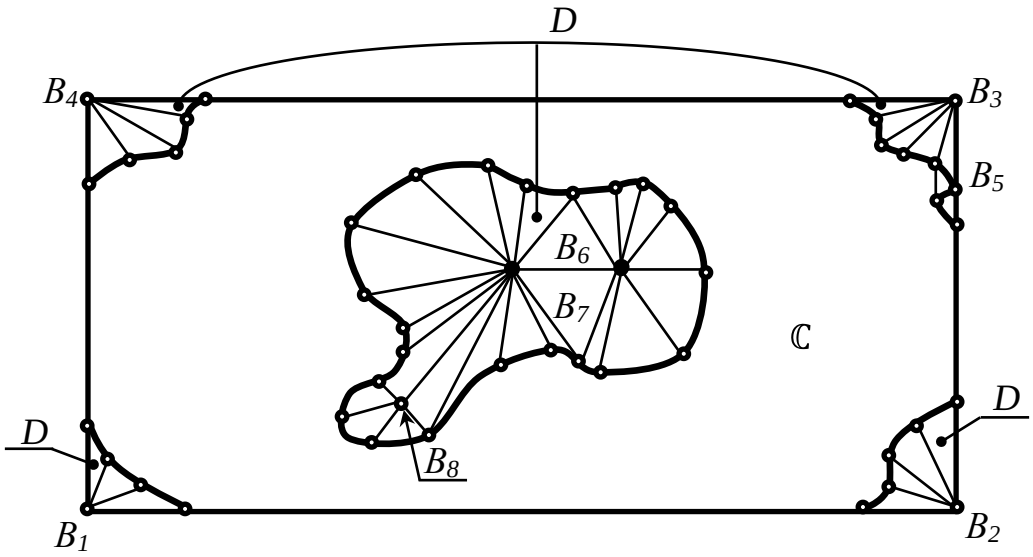


Рис. 4.14. Визначення площі $S_{гор}$ геометричної фігури $\mathbb{C}$

Пропонуємо визнати $S_{\text{гор}} = S_C$ наступним чином:

$$S_C = S_{B_1B_2B_3B_4} - \sum S_D \tag{4.53}$$

Таким чином, у підрозділах 4.4.1 та 4.4.2 на прикладах було показано загальні принципи обчислення площі для замкнених і незамкнених дискретно поданих горизонталей топографічної поверхні. Результати цих запропонованих способів будуть використовуватись у інтегрованих обчисленнях об’ємів елементів рельєфу топографічної поверхні відносно площини закладення.

4.4.3 Алгоритм розрахунку площі трикутника у точковому БН-численні.

Оскільки для визначення площі, яка обмежена дискретно поданою горизонталлю, використовується визначення площі окремих трикутників, з яких складається площа фігури, що обмежена цією горизонталлю, то є сенс окремо розробити, у точковому БН-численні, алгоритм визначення площі трикутника. Нехай задано довільний

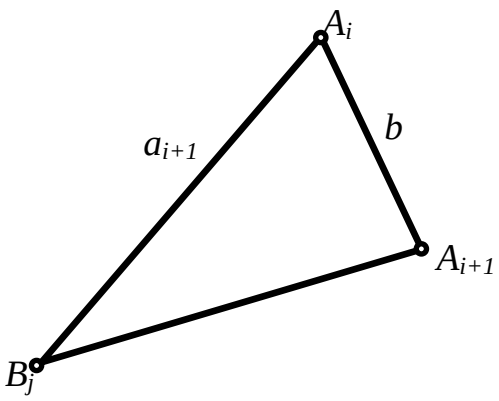


Рис. 4.15. Подання позначень трикутника

трикутник $\Delta B_j A_i A_{i+1}$. Позначимо довжини сторін цього трикутника a_i, b_j, a_{i+1}, як показано на рис. 4.15. Як відомо [44]:$a_i^2 = \sum_{B_j B_j}^{A_{i+1}} = \sum (B_j - A_{i+1})^2$, звідки

$$a_i = \sqrt{\sum (B_j - A_{i+1})^2} \tag{4.54}$$

Аналогічно

$$a_{i+1}^2 = \sum_{B_j B_j}^{A_{i+1}} = \sum (B_j - A_i)^2 \rightarrow a_{i+1} = \sqrt{\sum (B_j - A_i)^2} \tag{4.55}$$

$$b_j^2 = \sum_{A_i A_i}^{A_{i+1}} = \sum (A_i - A_{i+1})^2 \rightarrow b_j = \sqrt{\sum (A_i - A_{i+1})^2} \tag{4.56}$$

Позначимо

$$\Delta = \frac{\sqrt{\sum (B_j - A_{i+1})^2} + \sqrt{\sum (B_j - A_i)^2} + \sqrt{\sum (A_i - A_{i+1})^2}}{2} \tag{4.57}$$

$$\alpha = \Delta - \sqrt{\sum (B_j - A_{i+1})^2}$$

$$\beta = \Delta - \sqrt{\sum (B_j - A_i)^2}$$

$$\gamma = \Delta - \sqrt{\sum (A_i - A_{i+1})^2}$$

Тоді площа S трикутника $\Delta B_j A_i A_{i+1}$ буде формалізована наступним чином:

$$S_{B_j A_i A_{i+1}} = \sqrt{\Delta \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma} \tag{4.58}$$

У відповідності до наведеної вище формалізованої схеми запишемо розрахунковий алгоритм. При цьому, координати точок

будемо брати для двовимірного простору, тому що усі трикутники знаходяться у горизонтальних площинах.

1. Розкриємо (4.54)

$$a_i = \sqrt{(x_{B_j} - x_{A_{i+1}})^2 + (y_{B_j} - y_{A_{i+1}})^2}$$

2. Розкриємо (4.55)

$$a_{i+1} = \sqrt{(x_{B_j} - x_{A_i})^2 + (y_{B_j} - y_{A_i})^2}$$

3. Розкриємо (4.56)

$$b_j = \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2}$$

4. Використовуючи позначення у пунктах 1, 2, 3 розкриємо (4.57)

$$\Delta = \frac{a_i + a_{i+1} + b_j}{2}$$

5. Тоді площу $S_{B_j A_i A_{i+1}}$ зможемо розрахувати за наступною формулою:

$$S_{B_j A_i A_{i+1}} = \sqrt{\Delta(\Delta - a_i)(\Delta - a_{i+1})(\Delta - b_j)} \qquad (4.59)$$

Подані у цьому розрахунковому алгоритмі формули, треба буде застосовувати до кожного з трикутників, які будуть використовуватись для обчислення площ, що обмежені горизонталями рельєфу земельної ділянки промислового майданчика.

4.5 Обчислення об’єму елементів рельєфу земельної ділянки промислового майданчика.

Як було показано у підрозділі 3.1, мапа рельєфу земельної ділянки промислового майданчику створюється за допомогою дискретно поданих горизонталей на поверхні рельєфу, які формуються з хмари точок, що отримана за результатами наземного лазерного

сканування. Велика кількість горизонталей збільшує кількість розрахунків і видатки на ресурси. Мала кількість горизонталей – підвищує похибку у розрахунках.

У цих дослідженнях ми не торкаємося оптимізації кількості горизонталей з метою мінімізації витрат та похибки, яка задовольняє розробника проекту. Тому що це питання знаходиться поза межами досліджень.

Обчислення об’ємів елементів рельєфу промислового майданчика будемо виконувати відносно площини закладення. Під площиною закладення будемо розуміти *i*-й рівень поверхні рельєфу, відносно рівня моря, на якому межі промислового майданчика не перетинаються горизонталлю – a_i (рис. 4.16), у той час, коли горизонталь – a_{i+1} має кінцеві точки – 1, 2, 3, перетинаюсь і дотикаючись до меж майданчика (рис. 4.16), який визначений чотирикутником *ABCD*.

Таким чином, на *i*-му рівні (дамо йому позначення нульового

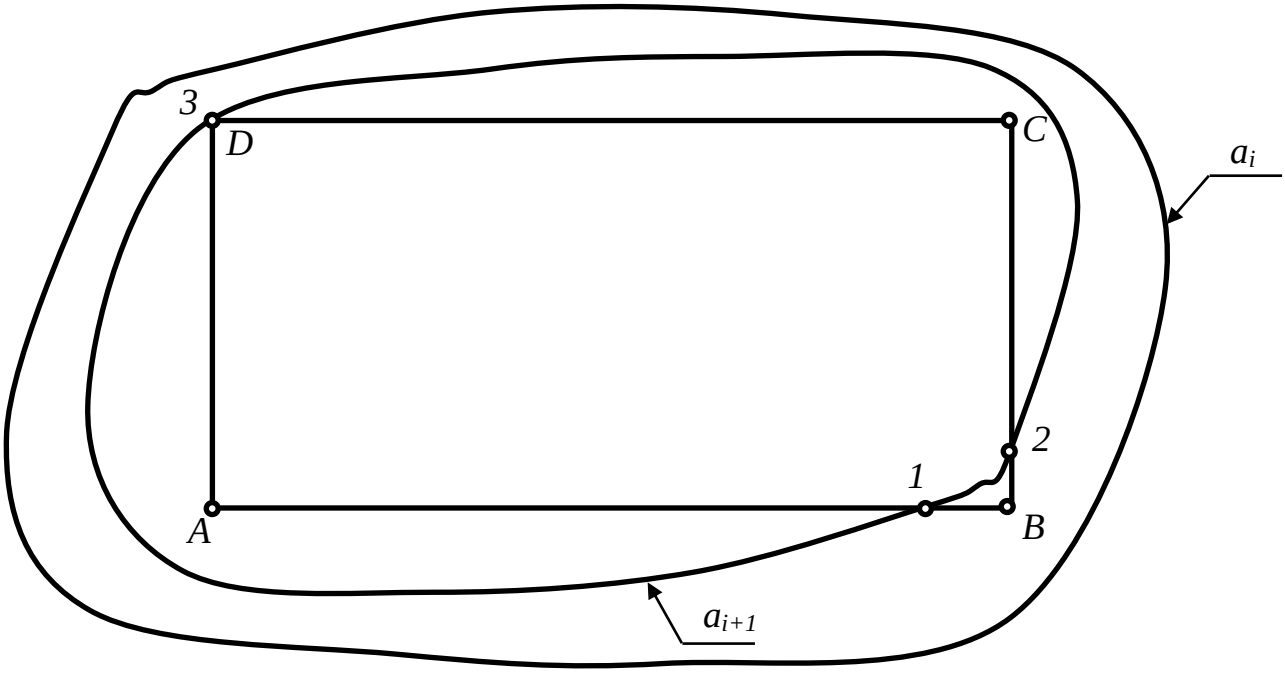


Рис. 4.16. Щодо визначення площини закладення

рівня) площа елементів рельєфу у перерізі дорівнює $S_{ABCD} = |AB| \cdot |BC|$. На $(i+1)$-му рівні площа елементів рельєфу дорівнює $S_{ABCD} - S_{B12}$. Для *i*-го та $(i+1)$-го рівнів розраховуємо середню площу S_i:

$$S_i = \frac{S_{ABCD} + S_{ABCD} - S_{B12}}{2} \tag{4.60}$$

Ця формула (4.60) відповідає зображенню (рис. 4.16). Для іншого зображення вона буде іншою. Відстань між *i*-м та $(i+1)$-м рівнями відома - Δh. Їхній добуток визначить об'єм ґрунту V_i, який знаходиться між *i*-м та $(i+1)$-м рівнями. Послідовно виконуючи такі розрахунки для усіх суміжних рівнів, дістанемо об'єм ґрунту *V*, який утримують усі елементи земельної ділянки під промисловим майданчиком, у вигляді суми:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=0}^{n} S_i \, \Delta h_i \tag{4.61}$$

Крок Δh може бути сталим. У разі, коли точність підрахунку *V* не задовольняє, можна збільшити кількість рівнів або зробити у окремих

місцях крок Δh змінним. Підвищення точності розрахунку V впливає на зменшення похибки у розрахунку положення горизонталі нульових робіт.

4.6 Розрахунок положення проектної відмітки та лінії нульових робіт.

Розрахунок положення лінії нульових робіт є чи не найголовнішим питанням у формуванні промислового майданчика. Заради цього питання розроблялася геометрична модель цього дисертаційного дослідження.

Правильний її вибір зменшить видатки на облаштування майданчика до мінімуму, а помилковий – значно їх збільшить за рахунок виникнення необхідності вивезення надлишкової або завезення недостатньої кількості ґрунту.

Як було показано раніше, у аналізі досліджень способів знаходження цієї лінії нульових робіт, що існуючі способи є доволі трудомісткими й неточними і зменшити похибку її знаходження, при існуючих технологіях, є нереальним.

Розроблений у цьому дослідженні геометричний апарат моделювання лінії нульових робіт у точковому БН-численні, дозволяє зменшити похибку її знаходження до розрахункової похибки. Підготовка вихідних даних та геометричне розв’язання цієї задачі, у даному дослідженні, розраховане на моделювання з використанням інформаційних технологій, що дозволить зменшити трудомісткість процесу моделювання та значно підвищити його якість.

Нехай на вигляді збоку обрис рельєфу поверхні вихідної земельної ділянки під промисловий майданчик має геометричну фігуру, наведену на рис. 4.17.

Треба знайти горизонтальну площину M – площину нульових робіт, відносно якої ґрунт, що знаходиться вище треба перемістити у западини, що знаходяться нижче неї.

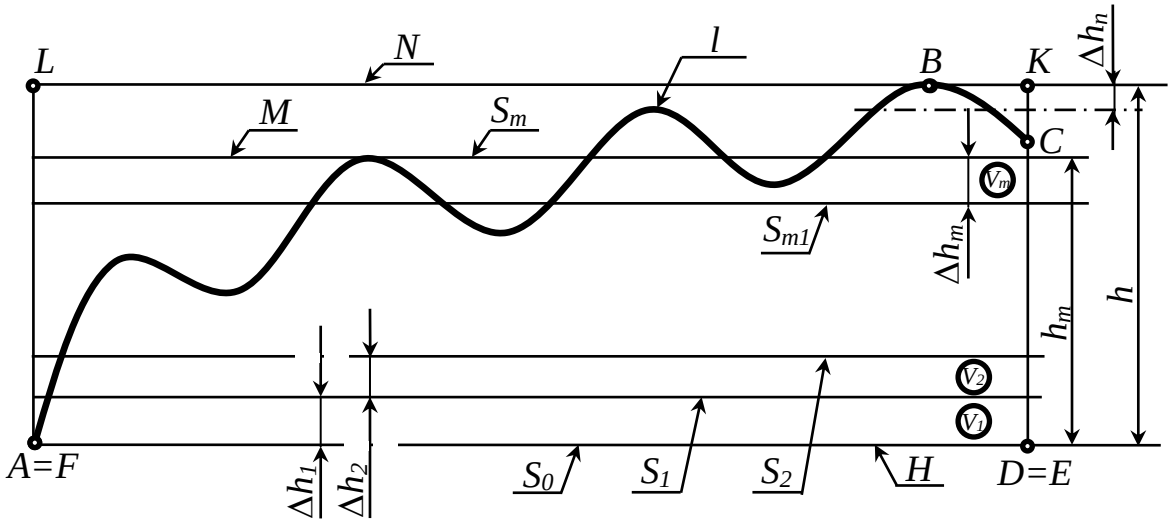


Рис. 4.17. Вигляд збоку рельєфу вихідної земельної ділянки під промисловий майданчик

На рис. 4.17 прийняті позначення означають:

H – площина закладення;

AD – довжина земельної ділянки під промисловий майданчик;

A – найнижча і також кінцева точка;

B – найвища точка;

C – кінцева точка;

$h = Z_B - Z_A$ – перепад на земельній ділянці;

h_m – висота площини для горизонталі нульових робіт, яку необхідно визначити;

l – лінія обрису рельєфу на вигляді збоку на земельну ділянку у межах промислового майданчика;

$ADEF$ – прямокутний чотирикутник, що розташований перпендикулярно до фронтальної площини проекцій і знаходяться у площині закладення – H;

Δh_1, Δh_2, Δh_m, Δh_n – відстань (крок) між суміжними площинами;

S_0, S_1, S_2, S_{m-1}, S_m – площа геометричних фігур у відповідних горизонтальних площинах;

V_1, V_2, V_m – об'єми ґрунту між двома суміжними горизонтальними площинами, які дорівнюють:

$$V_i = \frac{S_{i-1} + S_i}{2} \cdot \Delta h_i; \tag{4.62}$$

M – горизонтальна площина нульових робіт;

N – найвища горизонтальна площина, що обмежує земельну ділянку по вертикалі;

ADKL – прямокутний чотирикутник, що перпендикулярний до *H* і обмежує промисловий майданчик уздовж вертикалі.

Для розв'язання поставленої задачі знаходження площини нульових робіт – *M*, необхідно, спочатку, визначити об'єм ґрунту, який знаходиться вище площини закладення *H* і нижче найвищої площини *N*, у межах чотирикутника *ADKL*. Для цього, враховуючи (4.62), скориставшись (4.61), можемо записати, що об'єм ґрунту $V_{гр}$ над площиною закладення *H* у межах *ADKL* дорівнює:

$$V_{\text{гр}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_{i+1} + S_i}{2} \cdot \Delta h_i \tag{4.63}$$

Щоб не завантажувати додатковою інформацією зображення на рис. 4.17, для подальших пояснень, повторимо частину фігури на рис.

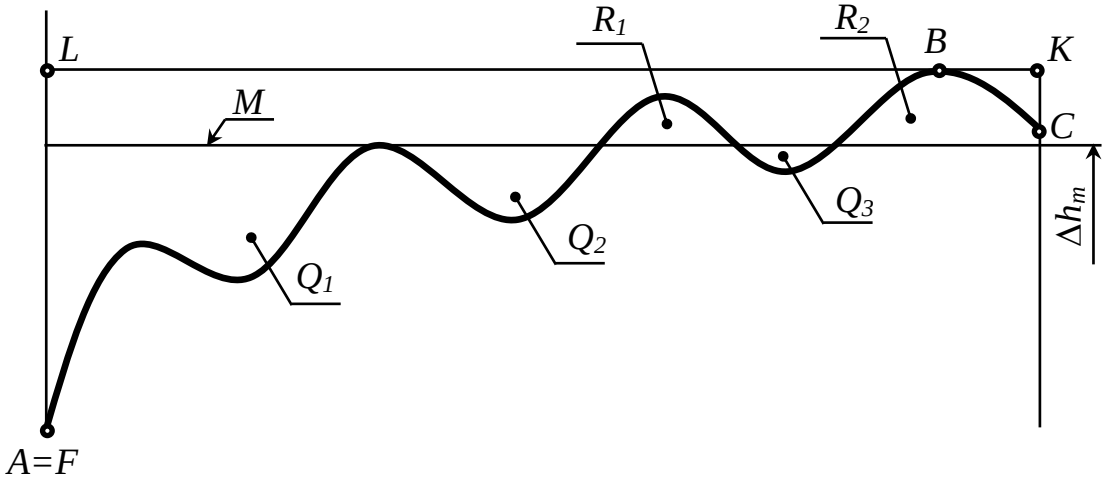


Рис. 4.18. Схема пояснення принципу знаходження площини нульових робіт *M*.

4.18.

На цьому рис. 4.18 літерами Q_1, Q_2, Q_3 позначено порожнини Q_i нижче площини нульових робіт *M*, літерами R_1, R_2 позначено місця наявності ґрунту R_j вище площини *M*. Тільки для площини нульових робіт *M* буде зберігатись рівність

$$\sum_{i=1} Q_i = \sum_{j=1} R_j \tag{4.64}$$

У (4.64) верхні обмеження біля знаку $\sum$ не встановлені, тому що наперед невідомо скільки буде порожнин і горбів на земельній ділянці.

Ясна річ, що рівність (4.64) на практиці відбутися не може, тому треба встановити якийсь допуск ε на відхилення у об'ємах від $\sum_{i=1} Q_i$ та від $\sum_{j=1} R_j$, коли буде виконуватись нерівність:

$$\sum_{i=1} Q_i - \sum_{j=1} R_j \le \varepsilon \tag{4.65}$$

Тепер покажемо алгоритм визначення суми об'ємів порожнин $\sum_{i=1} Q_i$ та

суми об’ємів ґрунтів
$\sum_{j=1} R_j$. Ці дві величини визначаються покроково одночасно.

У відповідності до (4.62) маємо:

1) $V_1 = \frac{S_0+S_1}{2} \cdot \Delta h$, тоді, враховуючи (4.63) визначимо сумарний об’єм горбів, що залишилися та порожнин, які з’явилися.

$$\sum_{j=1} R_j = V_{\text{гр}} - \sum_{i=1}^{1} V_i$$

$$\sum_{i=1} Q_i = П_i - \sum_{i=1}^{1} V_i \text{ , де } П_i = S_{ADEF} \cdot \sum_{i=1}^{1} \Delta h_i$$

Порівнюємо

$$\sum_{i=1} Q_i - \sum_{j=1} R_j = q, \text{ якщо } q<\varepsilon_1,$$

додаємо Δh_2 і повторюємо розрахунки на другому кроці.

2) $V_2 = \frac{S_1+S_2}{2} \cdot \Delta h_2$

$$\sum_{j=1} R_j = V_{\text{гр}} - \sum_{i=1}^{2} V_i$$

$$П_2 = S_{ADEF} \cdot \sum_{i=1}^{2} \Delta h_i$$

$$\sum_{i=1} Q_i = П_2 - \sum_{i=1}^{2} V_i$$

$$q = \sum_{i=1} Q_i - \sum_{j=1} R_j .$$

У разі, коли $q<\varepsilon_1$ – аналогічним чином робимо третій крок і т.д. Запишемо m-й крок:

$m)$ $V_m = \frac{S_{m-1}+S_m}{2} \cdot \Delta h_m$

$$\sum_{j=1}^{m} R_j = V_{\text{гр}} - \sum_{i=1}^{m} V_i$$

$$П_m = S_{ADEF} \cdot \sum_{i=1}^{m} \Delta h_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} Q_i = П_m - \sum_{i=1}^{m} V_i$$

$$q = \sum_{i=1}^{m} Q_i - \sum_{j=1}^{m} R_j.$$

Нехай на m-му кроці $q \geq \varepsilon_1$, тоді перевіряємо виконання нерівності:

$$П_m - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{m} V_i + \sum_{j=1}^{m_j} R_j \leq П_m + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.66)$$

Сенс цієї нерівності зобразимо на рис. 4.19.

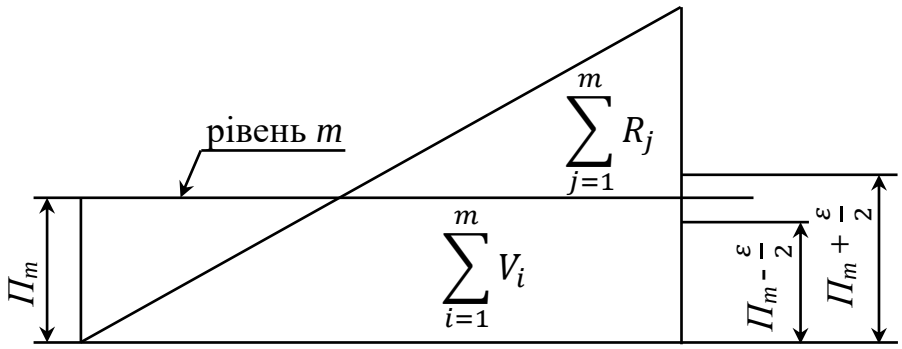


Рис. 4.19. Схема щодо сенсу нерівності (4.66)

У разі коли нерівність не зберігається необхідно зменшувати крок Δh_2. При чому зміну кроку можна робити глобально або локально. Прийняття рішення з цього приводу повинен приймати проектувальник в залежності від наявного у нього досвіду роботи із запропонованим у цьому підрозділі алгоритмом розрахунку положення лінії нульових робіт.

Після зміни кроку необхідно:

1. У відповідності до досліджень у підрозділі 3.1 треба повернутися до вихідної хмари точок, створити, згідно з іншим поділом на рівні, нові дискретно подані горизонталі.

2. У відповідності до досліджень підрозділу 2.3 та розрахункового алгоритму згущення дискретно поданої горизонталі із використанням її супровідних трикутників та супровідної ламаної лінії, який розроблено у підрозділі 3.6, здійснити згущення до необхідної щільності.

3. У відповідності до підрозділу 4.1, визначити кінцеві точки на нових горизонталях, враховуючи раніше встановлені межі промислового майданчика.

4. У відповідності до підрозділу 4.4, визначити для усіх рівнів площі, що обмежені дискретно поданими горизонталями топографічної поверхні.

5. Після цього, виконати розрахунок положення лінії нульових робіт, у відповідності з алгоритмом, розробленим у цьому підрозділі. У результаті запропонованого способу, знайдений рівень m – є проектною відміткою, а горизонталь, що знаходиться на топографічній поверхні у площині на рівні m, є лінією нульових робіт відносно якої розподіляються насипи та виїмки.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

У цьому розділі метою дослідження у четвертому розділі було знаходження проектної відмітки, що є межею між насипами і виїмками. Для досягнення цієї мети були поставлені розв’язанні і наступні задачі.

1. Визначено рівень площини закладення, на підставі якого визначено межі промислового майданчика, для кожної горизонталі, встановлено кінцеві точки, що надало можливість визначити на горизонталях сегменти, які знаходяться у межах промислового майданчика, а не на земельній ділянці у цілому.

2. Запропоновано алгоритм визначення площі сегменту і усієї площі, що обмежена горизонталлю, яка континуально задана точковим рівнянням на топографічній поверхні. Дослідження цього питання є цікавим з точки зору розширення можливостей геометричного апарату точкового БН- числення у процесі моделювання з його використанням.

3. Розроблено, на базі геометричного апарату точкового БН-числення, алгоритм визначення точок дотику прямої до плоскої кривої, що знаходяться у одній площині, що необхідно у подальших дослідженнях щодо визначення проектної відмітки і розширення способів та можливостей точкового БН- числення.

4. Розроблено, з використанням тріангуляції, декілька різних варіантів щодо визначення площі геометричної фігури, яка обмежена замкненою або незамкненою дискретно поданою горизонталлю, що дає можливість зменшувати похибки у розрахунках, підвищувати швидкодію у програмних реалізаціях цих варіантів, та зменшувати витрати обчислювальних ресурсів.

5. Запропоновано методику обчислювання об’єму елементів рельєфу земельної ділянки промислового майданчику, які знаходяться

вище площини закладення. Розроблена методика дозволяє розраховувати об’єми з наперед заданою точністю, розрахована на реалізацію у відповідних інформаційних системах.

6. На базі розв’язання вище наведених задач запропоновано узагальнений спосіб розрахунку положення лінії нульових робіт, що знаходяться на рівні проектної відмітки, який можна застосовувати в усіх існуючих способах вертикального планування земельних ділянок. Запропонований спосіб, розрахований на використання у програмних забезпеченнях відповідних інформаційних систем і побудований на геометричних методах точкового БН-числення, які є розрахунковими і не використовують обчислювальні методи, та дозволяє розв’язання задачі з наперед визначеною точністю. Застосування способу дозволить якісно підвищити розв’язання задачі щодо знаходження лінії нульових робіт, зменшити похибку у проектних розрахунках та значно знизити витрати електронних ресурсів, позбавитися від операцій завезення-вивезення ґрунту у процесі формування реального промислового майданчика, зменшити видатки на виконання земляних робіт.

Матеріали щодо теми цього підрозділу опубліковано у статтях:

39. *Верещага В.М., Павленко О.М.* Геометричній алгоритм визначення точки дотику. / *В.М. Верещага, О.М. Павленко*// Вісник Херсонського національного технічного університету. /XVI Міжнародна конференція по математичному моделюванні, Херсон: ХНТУ, 2015. – с. 539-541.

135. *Павленко О.М.* Умови встановлення кінцевих точок на мапі рельєфу / О.М. Павленко // Инновационные технологии в

кооперативном образовательном процессе / Материалы Международной заочной научно-практической конференции, посвященной 40-летию Саранского кооперативного института (филиала) Российского университета кооперации – Саранск, 2016. – с. 310-316.

139. *Павленко О.М., Верещага В.М.* Визначення площі, обмеженої топографічною замкненою плоскою кривою / Конопацький Є.В., Павленко О.М. // Науковий журнал «Комп'ютерно-інтегровані технлогії: освіта, наука, виробництва». – Випуск №20. – Луцьк, 2015. – с. 119-123.

140. *Павленко О.М.* Визначення площі сегмента, обмеженого дугою кривої / Верещага В.М., Чураков А.Я., Лебідько О.С. // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б.Хмельницького, 2015. - Вип.4., - с. 22-25.

144. *Павленко О.М.* Геометричний алгоритм оптимального кінцевого вертикального планування горизонтальної площини на земельній ділянці за результатами наземного лазерного сканування / Верещага В.М., Бездітний А.О. // Матеріали IV-ї Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вченів "Прикладна геометрія, дизайн, об'єкти інтелектуальної власності та інноваційна студентів та молодих вчених". Випуск 4. - К.: ДІЯ, 2015. – с. 58-59.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ ПО РОБОТІ

1. Виконано аналіз існуючих джерел щодо методів вертикального планування рельєфу та методів прикладної геометрії для дослідження топографічних поверхонь. Зроблено висновки про необхідність розробки нових геометричних методів вертикального планування, орієнтованих на зйомку рельєфу наземним лазерним скануванням та їх використання у геоінформаційних системних і автоматизованих системах проектування. Це підвищить якість та зменшить вартість розв’язання задач вертикального планування рельєфу.

2. Отримав подальший розвиток спосіб супровідних трикутників, шляхом розробки, у термінах точкового БН-числення, алгоритму згущення. Який дозволяє, на основі методології варіативного дискретного геометричного моделювання, згущувати точкові ряди з особливими точками.

3. Розроблено, у термінах БН-числення, спосіб обробки вихідної інформації для задання досліджуваної топографічної поверхні дискретно представленими горизонталями, виконано його алгоритмічну та програмну реалізацію. Це суттєво спростило побудову геометричної моделі рельєфу земельної ділянки. Як наслідок, зменшено витрати на виконання проектних робіт.

4. Запропоновано, у термінах БН-числення, методологію визначення рівня площини закладення. Це дало змогу розробити алгоритми визначення меж промислового майданчика та кінцевих точок на усіх горизонталях рельєфу.

5. На основі тріангуляції геометричних фігур у перерізах на топографічній поверхні, розроблено, у термінах БН-числення,

алгоритми розрахунку площ цих геометричних фігур довільної форми. Це надало можливість зменшувати похибки у розрахунках об’єму ґрунту, підвищувати ефективність відповідного алгоритмічного та програмного забезпечення.

6. На базі розробленої методології обчислення елементарних об’ємів топографічної поверхні, запропоновано і реалізовано (алгоритмічно та програмно) у термінах БН-числення спосіб визначення проектної відмітки та знаходження лінії нульових робіт, із наперед визначеною точністю. Це дозволило зменшити похибку, час, витрати ресурсів при проектуванні. Спосіб орієнтований на застосування у відповідних ГІС. Разом з цим, у термінах БН-числення, було розв’язано низку прикладних задач: визначення кінцевих точок, визначення точки дотику кривої з прямою, знаходження площини нульових робіт та ін.

7. На основі розроблених алгоритмів і способів було сформовано методику облаштування господарських майданчиків, яку було впроваджено при створенні горизонтальної земельної ділянки зі слабо виявленими нерівностями та малим перепадом у рамках науково-виробничої програми для НВК «Роста». Методика геометричного моделювання засобами БН-числення горизонтальних земельних ділянок була впроваджена у виробничий процес ПП «Димура», що створило умови для оптимізації виконання земляних робіт при облаштуванні земельної ділянки сільськогосподарського призначення. Дана методика та її програмна реалізація також були прийняті для впровадження у процес теоретичних розрахунків при створенні промислового майданчика під забудову будівельної організації ТОВ «Укргарден». Результати науково-дослідної роботи з моделювання горизонтальних земельних ділянок використовуються у навчальному

процесі кафедри «Системний аналіз» Мелітопольського інституту державного та муніципального управління з дисциплін «Інженерна графіка» та «Основи програмної інженерії».

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Аушева Н.М., Берлінський Р.Б.* Конструювання криволінійних обводів сегментами кривих п’ятого порядку // Прикл. геометрія і інж. графіка.- К.: КДТУБА, 2001.- Вип.69.- С.131-134.

2. *Ашкеназы В.О.* Алгоритмы построения линий уровня функции двух переменных [Електронний ресурс]. - Режим доступу до книги: http://aszkenazy.narod.ru/isoline_h.htm

3. *Бадаев Ю.И., Ковтун А.М.* Специальные сплайны из полиномов третьей, четвертой и пятой степеней в геометрическом моделировании: Монография.- Одесса: Фенікс, 2011.- 316с.

4. *Бадаєв Ю.І., Ковтун О.М.* Сплайнові векторно-параметричні криві / Прикл. геометрія і інж. графіка.- К.: КДТУБА, 2003.- Вип.72.- С.47-49.

5. *Балюба И.Г.* Теоретические основы точечного исчисления / И.Г. Балюба // Монография. – Макеевка. Донбасский инж.-строит. инст.,1994.– С.32.

6. *Балюба И.Г.* Точечное исчисление − математический аппарат параллельных вычислений для решения задач математического и компьютерного моделирования геометрических форм./ И.Г. Балюба, В.И. Поліщук, Б.Ф. Горягин, Т.П. Малютіна // Материалы международной научной конференции "Моделирование-2008" 14-16 мая 2008 г. Киев, том 2.− с. 286−290. Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины.

7. *Балюба І.Г.* Основи математичного апарату точкового числення / І.Г. Балюба, В.І. Поліщук, Т.П. Малютіна Праці // Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 29. – Мелітополь: ТДАТА, 2005.– С.22-30.

8. *Балюба І.Г.* Функціональна крива в точковому численні Балюби-Найдиша / *І.Г. Балюба, В.М. Верещага, А.В. Найдиш* // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка» . Вип. 89- К.: КНУБА, 2012. – с.65-69.

9. *Балюба И.Г.* Конструктиваня геометрия многообразий на основе точечного исчисления. Автореф. дисс….докт.техн.наук.- К.: КГТУСА, 1995.- 36с.

10. *Бездітний А.О.* Варіативне дискретне геометричне моделювання на основі геометричних співвідношень у точковому численні Балюби-Найдиша: дис. … канд. техн. наук: 05.01.01 / *Андрій Олександрович Бездітний*; Таврійський держ. агротехнол. ун-т. – Мелітополь, 2012. – 155 с.

11. *Бездітний А.О.* Каналові поверхні з прямолінійними напрямними у точковому численні Балюби-Найдиша / А.О. Бездітний // Міжвідомчий науково-технічний збірник / Прикладна геометрія та інженерна графіка. Вип. 89. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Київ: КНУБА, 2012. С.75-78.

12. *Бездітний А.О.* Моделювання каналової поверхні з напрямною дугою обводу / А.О. Бездітний // Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 53. – Мелітополь: ТДАТА, 2012.– С.7-12.

13. *Бездітний А.О.* Функціональна крива відстані – засобами БН-числення /*А.О. Бездітний, А.В. Найдиш* // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці/Таврійський державний технологічний університет – Вип. 4, т. 56. – Мелітополь: ТДАТУ, 2013

14. *Бездітний А.О.* Функціональні криві тригранника Френе, формалізовані засобами точкового числення Балюби-Найдиша /

А.О. Бездітний // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип. 91- К.: КНУБА, 2013. – с. 17- 21.

15. *Бельская С.М.* Рисовка рельефа местности горизонталями: [метод. указания по вып. граф. работы] / С.М. Бельская – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2001. – 12 с.

16. *Беспалов Ю. И.* Исследование точности измерения превышений электронными тахеометрами / *Ю.И. Беспалов, С.Г. Мирошниченко* // Геодезия и картография. - 2009. -N 3. - С.12-13.

17. *Борисенко В.Д., Котляр Д.В.* Геометричне моделювання каналів системи охолодження лопаток осьових турбін. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ, КНУБА, 2011: вип. 88, с. 88-93.

18. *Бронштейн И.Н., Семяндяев К.А..* Справочник по логике для инженеров и учащихся ВУЗов, М., - 1980 – 976 с.

19. *Брысин В.А., Филиппов П.В.* Моделирование каналовых поверхностей с параболическими поперечными сечениями. // Прикладная геометрия и инженерная графика. К., Будівельник, 1992.: вып. 53, с. 23 – 25.

20. *Бумага А.І.* Точкове рівняння дуги параболи другого порядку / *А.І. Бумага* // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Випуск 90.- К.: КНУБА, 2012.- С.49-52.

21. *Бурштинська Х.В.* Моделювання рельєфу земної поверхні із застосуванням колокації / *Х.В. Бурштинська, О.С. Заяць* // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2003. – Вип. 64. – С. 107-113.

22. *Бурштинська Х.В.* Порівняльний аналіз побудови цифрових моделей рельєфу з використанням апроксимаційних функцій / *Х.В. Бурштинська* // Геодезія, картографія і аерофотознімання, - 2001. – вип. 61. – С. 137-148.

23. *Бурштинська Х.В.* Теоретичні та методологічні основи цифрового моделювання рельєфу за фотограмметричними та картометричними даними: дис. … д-ра. техн. наук: 05.24.02 / *Христина Василівна Бурштинська*; Нац. ун-т «Львівська політехніка». – Л., 2003. – 317 с.: іл.

24. *Вальков К.И.* Введение в теорию моделирования / *К.И. Вальков*. – Л.: ЛИСИ, 1973. – 152 с.

25. *Ванін В.В., Вірченко Г.А.* Деякі питання моделювання кривими Безьє третього порядку // Праці Таврійської державної агротехнічної академії.- Мелітополь: ТДАТА, 2004.- Вип.4.- Т.23.- С.57-61.

26. *Варварица А.Г.* Аппроксимация топографической поверхности поверхностью одинакового ската // Прикл. геометрия и инж. Графика.- К.: Будівельник, 1976.- Вып.37.- С.39-43.

27. *Варварица А.Г.* Геометрия траектории сельхозмашин в задачах защиты почв от эрозии // Прикл. геометрия и инж. графика.- К.: Будівельник, 1984.- Вып. 37.- С.71-74.

28. *Варварица А.Г.* Линии ската рельефа в аналитической интерпретации // Прикл. геометрия и инж. Графика.- К.: Будівельник, 1976.- Вып.21.- С.49-53.

29. *Варварица А.Г.* Некоторые вопросы исследования топографических поверхностей применительно к задачам землеустройства: Автореф. дис. … к-та техн. наук: 05.01.01. / КИСИ.- К., 1976.- 17с.

30. *Василевский О.В.* Геометрическое моделирование поверхностей каналов и автоматизация их проектирования. Автореф. дисс. ... канд. техн. наук. –Киев: КИСИ, 1982.: 17 с.

31. Введение в технологию лазерного сканирования. Гис Геострой изыскания [Електронный ресурс].- Режим доступу до книги: http://www.gsi.ru/catalog?id=1.

32. *Верещага В.М.* Дискретно-параметричний метод геометричного моделювання кривих ліній та поверхонь: дис. … док-ра. техн. наук: 05.01.01 / *Віктор Михайлович Верещага*, КДТУБА. – К., 1996. – 320 с.

33. *Верещага В.М.* Криві Найдиша / В.М. Верещага // Праці. Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 51. – Мелітополь: ТДАТА, 2011.– С.16-23.

34. *Верещага В.М.* Оптимізація математичного моделювання на основі геометрії числа. / Перспективні напрями сучасної електроніки, інформаційних і комп'ютерних систем (MEICS-2015). Тези доповідей на Всеукраїнській науково-практичні конференції молодих вчених та студентів: 25-27 листопада 2015., м. Дніпропетровськ / *В.М. Верещага*. – Дніпропетровськ, Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, 2015. – с. 11-12.

35. *Верещага В.М.* Побудова моделі поверхні відображення швидкості потоку води у точковому численні Балюби-Найдиша / *В.М. Верещага, А.В. Найдиш, С.Ю. Радєв* // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2012. – Вип. 89. – С. 300-305.

36. *Верещага В.М.* Побудова поверхонь Найдиша методом плавного перетікання на основі послідовних одновимірних згущень / *В.М. Верещага, А.В. Найдиш, А.О. Бездітний, В.В. Кучеренко* // Праці ТДАТУ. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2011. – Вип. 4, Т. 50. – С. 48-57.

37. *Верещага В.М.* Про умову розташування трьох точок на одній прямій у точковому БН-численні / *В.М. Верещага, А.В. Найдиш, О.М. Павленко*//

38. *Верещага В.М.* Спосіб розростання чарунок / *В.М. Верещага, В.В. Кучеренко, О.М. Павленко* // Матеріали ІІ-ї міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Прикладна геометрія, дизайн та об'єкти інтелектуальної власності». Випуск 2. – К.: Дія, 2013р. – с. 13-17.

39. *Верещага В.М., Павленко О.М.* Геометричній алгоритм визначення точки дотику. / *В.М. Верещага, О.М. Павленко*// Вісник Херсонського національного технічного університету. /XVI Міжнародна конференція по математичному моделюванні, Херсон: ХНТУ, 2015. – с. 539-541.

40. *Верещага В.М.* Геометрическое моделирование кривых линий методами дискретной интерполяции.- Харьков: Полиграфист, 1995.- 170с.

41. *Верещага В.М.* О поле дифпроекций эмпирической кривой В кн.: «Начертательная геометрия и черчение» (межвузовский сборник), Алма-Ата, 1979.- С.63-66

42. *Верещага В.М., Найдыш А.В., Голубцов В.П.* Геометрическое моделирование – основа автоматизированного проектирования противоэрозионных мероприятий. Тезисы Всесоюзной научно-практической конференции «Почвозащитное земледелие с контурно-мелиоративной организацией территории в степной зоне.- Луганск, 1991, т.1.- С.26-28.

43. *Вірченко Г.А.* Проектування плоских обводів з використанням кривих Безьє третього порядку // Прикл. геометрія і інж. графіка.- К.: КДТУБА, 2003.- Вип.72.- С.119-123.

44. *Воронцов О.В.* Дискретне визначення ліній найбільшого скату поверхонь / *О.В. Воронцов* // Прикл. геометрія та інж. графіка. – 2009. – Вип. 82. – С. 185-189.

45. *Воронцов О.В.* Конструирование сетчатых каркасов в задачах отведения поверхностных вод: дис. … канд. техн. наук: 05.01.01 – Прикладная геометрия, инженерная графика / *Олег Викторович Воронцов*, КИСИ. – К., 1992. – 108 с.

46. *Гавриленко Е.А.* Дискретное интерполирование плоских одномерных обводов с закономерным изменением кривизны : Дис... канд. техн. наук: 05.01.01 / *Е.А. Гавриленко* // Таврическая гос. агротехническая академия. — Мелитополь, 2004. — 184с.

47. *Галясовский И.В.* Некоторые геометрические вопросы теории топографических поверхностей при подсчёте объёмов земляных работ: автореф. дис. … канд. техн. наук: 05.01.01 – Прикладная геометрия, инженерная графика / *И.В. Галясовский*, КИСИ. – К., 1963. – 16 с.

48. *Глаголев Н.А.* Проективная геометрия / *Глаголев Н.А*. // Государственное издание «Высшая школа» - Москва, 1963. — С. 174-189.

49. *Глаголев Н.А.* Проективная геометрия / *Глаголев Н.А*. // Государственное издание «Высшая школа» - Москва, 1963. — 344 с.

50. Г*лаголев Н.А.* Проективная геометрия / Н.А. Глаголев // Государственное издание «Высшая школа» - Москва, 1963. – С. 236-244.

51. *Гнатушенко В.В.* Геометричні моделі формування та попередньої обробки цифрових фотограмметричних зображень високого просторового розрізнення: автореф. дис. на здобуття наук.

ступеня доктора техн. наук: 05.01.01 «Прикладна геом., інж. графіка» / *В.В. Гнатушенко*.- К., 2009.- 43с.

52. *Гнатушенко В.В.* Особливості моделювання та попередньої обробки цифрових сканерних знімків високого просторового розрізнення */ В.В. Гнатушенко* // Наукові космічні дослідження: школа-семінар для молодих науковців. — К., 2005. — С. 14-16.

53. *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций. / В.Л. Гончаров // М.: ГИТТЛ, 1954. – 328 с.

54. *Горягин Б.Ф.* Описание некоторых проективных соответствий в точечном исчислении. Специальный коптплексхтыгх чертеж еиъптлекса и его применение. / *Горягин Б.Ф.* //Современные проблемы геометрического моделирования. Материалы Второй украино-российской научно-практической конференции, 24-27 апреля 2007 г. Спец выпуск. — Харьков: ХДУХТ- 2007. — С.145-150.

55. *Гумен Н.С.* Геометрические основы теории многообразий евклидового пространства применительно к геометрическому моделированию многопараметрических систем: автореф. дис. … д-ра техн. наук.: 05.01.01 / *Николай Степанович Гумен*, КПИ – К., 1992. – 53с.

56. Гумен О.М. Моделювання проективних n-просторів багатопараметричних технічних систем: дис. д-ра техн. наук: 05.01.01 / Олена Миколаївна Гумен, НТУУ «КПІ» – Мелітополь, 2011.

57. *Давиденко І.П.* Дуга обводу третього порядку / І.П. Давиденко // Прикладна геометрія та інженерна графіка: праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. – Вип. 4. – Т. 20. – С. 95-97.

58. *Давиденко І.П.* Точкове завдання кривих другого порядку у різноманітній параметризації / І.П. Давиденко // Прикладна геометрія

та інженерна графіка: праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Мелітополь: ТДАТА, 2006. – Вип. 4. – Т. 31. – С. 128-132.

59. *Давиденко І.П.* Конструювання поверхонь просторових форм методом рухомого симплексу: автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.01.01 / *І. П. Давиденко*; Тавр. держ. агротехнол. ун-т. - Мелітополь, 2012. - 23 с.

60. *Джапаридзе И.С.* Начертательная геометрия в свете геометрического моделирования / *И.С. Джапаридзе.* – Тбилиси: Ганатлеба, 1983. – 208 с.

61. *Драганов Б.Х., Круглов М.Г. Обухова В.С.* Конструирование впускных и выпускных каналов двигателей внутреннего сгорания. Киев, Вища школа. 1987.: 175 с.

62. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* методы сплайн – функций. – М.: Наука, 1980. – 352с.

63. *Завьялов Ю.С.*, Леус В.А., Скороспелов В.А. Сплайны в инженерной геометрии.- М.: Машиностроение, 1985.- 224с.

64. *Иванов Г.С.* Конструирование технических поверхностей (математическое моделирование на основе нелинейных преобразований) / *Г.С. Иванов*. – М.: Машиностроение, 1987. – 192 с.

65. *Иванов Г.С., Миролюбова Т.И.* Теоретические предпосылки конструирования осей трубопроводов как одномерных обводов второго порядка гладкости. // Прикладная геометрия и инженерная графика. К.: КНУБА, 2001.: вип. 68, с. 38- 441.

66. *Ильман В.М.* Экстремальные свойства триангуляции Делоне / *В.М. Ильман* // Алгоритмы и программы. Вып.10 (88). – М.: 1988. – с. 57-66.

67. Инженерная геодезия: учеб. для вузов / *Е.Б. Клюшин и др.*, под ред. Д.Ш. Михеева. – 2-е изд. испр. – М.: Высш. шк., 2002.

68. *Карелина И.В., Хлебородова Л.И.* Нивелирование поверхности. Вертикальная планировка строительной площадки: Метод. указ. / Алтайский гос. техн. ун-т им. И.И. Ползунова. – Барнаул: АлтГТУ, 2013. – 26 с.

69. *Карпінський Ю.О.* Скінченноелементні моделі геодезичних вимірів: дис. … д-ра техн. наук: 05.24.01 / *Юрій Олександрович Карпінський*; КНУБА – К., - 2003. – 305 с.

70. *Киргизбаев Т.К., Ященко А.А.* Моделировани топографической поверхности с помощью полиномиальной интерполяции // Прикл. геометрия и инж. Графика.- К.: Будівельник, 1984.- Вып.87.- С.77-79.

71. *Ковалев С.Н.* Дискретные математические модели упругих сетей / *С.Н. Ковалев* // Прикладная геометрия и инженерная графика. – 1981. – Вып. 32. – С. 27-30.

72. *Ковалёв С.Н.* Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций. Дис…д-ра. техн. наук. 05.01.01. / М.: МАИ, 1986.- 348с.

73. *Ковалёв С.Н., Вязанкин В.А.* Пути развития статико-геометрического метода формирования дискретных структур / *С.Н. Ковалёв, В.А. Вязанкин* // Прикладна геометрія та інженерна графіка.- К.: КНУБА, 2009.- Вип.82.- С.16-19.

74. *Ковальов Ю.М.* Геометричне моделювання та оптимізація ергатичних систем на основі теорії самоорганізації С-простору: автореф. дис. … д-ра техн. наук: 05.01.01 / *Юрій Миколайович Ковальов*, КНУБА. – К., 1998. – 32 с.

75. *Ковальов Ю.М.* Прикладна геометрія / Ю.М. Ковальов, В.М. Верещага // Київ, 2012.

76. *Ковальов С.М.* Дискретна інтерполяція нелінійними різницевими операторами / *С.М. Ковальов* // Прикладна геометрія та інженерна графіка.- К.: КНУБА, 2012.- Вип.89.- С.207-211.

77. *Ковальов С.М., Золотова А.В.* Дискретна двовимірна інтерполяція з першим порядком гладкості стикування порцій / *С.М. Ковальов, А.В. Золотова* // Прикладна геометрія та інженерна графіка.- К.: КНУБА, 2011.- Вип.87.- С.164-170.

78. *Кованцов М.І.* Проективна геометрія / М.І. Кованцов // «Вища школа» - Київ, 1969.- 410 с.

79. *Ковтун А.М.* Специальные сплайны из полиномов третьей, четвёртой и пятой степени в геометрическом моделировании: монографія / А.М. Ковтун КНУБА – Київ, 2006. – 25 с.

80. *Кожедуб С. А.* Моделі ерозійно-акумулятивних процесів на основі системного дослідження методів формування топографічних поверхонь: дис.…канд.техн.наук: 05.01.01 / *Сергій Анатолійович Кожедуб*: КНУБА. – К., 2013. – 185 с.

81. *Кожедуб С.А.* Гетерогенна геометрична модель стоку дощових вод / *С.А. Кожедуб* // VIII Всеукраїнська наук.-практ. конф. «Прикладна геометрія, графічні технології та дизайн»: тези доп. – Полтава.: ПолтНТУ ім. Ю.Кондратюка. – 2012. – С.13.

82. *Кожедуб С.А.* Методологічні визначення щодо методів графічного подання цифрових моделей рельєфу / *С.А. Кожедуб* // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Випуск 88.- К.: КНУБА, 2011.- С.165-172.

83. *Козлов А.П.* Геометричне моделювання та аналіз деяких фізичних полів стосовно процесів масопереносу: автореф. дис. … канд. техн. наук: 05.01.01 / *Анатолій Петрович Козлов*; КНУБА. – К., 2003. – 19 с.

84. *Конопацький Є.В.* Дуга просторової кривої 3-го порядку з двома невласними точками / *Є.В. Конопацький, А.І. Бумага*.// Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці ТДАТУ – Вип. 4, т. 56 – Мелітополь, 2013 – с. 88-95.

85. *Конопацький Є.В.* Конструювання плоских і просторових алгебраїчних кривих системою лінійних точкових рівнянь / Є.В. Конопацький, І.Г. Балюба, Ж.В. Старченко // Праці / Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т.17. – Мелітополь: ТДАТА, 2002. - С. 66-67.

86. *Конопацький Є.В.* Геометричне моделювання алгебраїчних кривих та їх використання при конструюванні поверхонь у точковому численні Балюби-Найдиша: автореф. дис. на здоб. наук. ступеня канд. техн. наук: 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / *Є.В. Конопацький*; М-во аграрної політики та продовольства України, Таврійський держ. агротехнологічний ун-т. - Мелітополь, 2012. - 26 с.

87. Конструювання горизонтальної площадки на топографічній поверхні / *Т.П. Малютіна, І.П. Давиденко, Я.А. Кокарєва*. – Макіївка: ДонНАБА, 2010. – 28 с.

88. *Корн Г.А.* Справочник по математике для научных работников и инженеров: [для науч.работник. и инженер.] / *Г.А. Корн, Т.М. Корн* – М.: «Наука», 1978. – 277 с.

89. *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984.–352 с.

90. *Коробочкин М.И.* Проектирование на ЭВМ допустимых топографических поверхностей при минимальных затратах на вертикальную планировку. Изв.вузов «Геодезия и аэрофотосъемка», вып.1, 1966.- С.18-19.

91. *Корчинський В.М.* Інваріантні геометричні моделі ідентифікації та аналізу проекційних зображень: автореф. дис. … д-ра техн. наук: 05.01.01 / *Володимир Михайлович Корчинський*; КНУБА. – К., 1999. – 32 с.

92. *Котов И.И.* Алгоритмы машинной графики / И.И. Котов, В.С. Полозов, Л.В. Широкова – М.: Машиностроение, 1977. – 231 с.

93. *Котов И.И.* Аналитическая геометрия в пространстве и прикладная геометрия поверхностей. – М.: МАИ, 1986. – 272 с.

94. *Котов. И. И.* Геометрические основы ключевых способов построения поверхностей / *И.И. Котов* // Труды ВЗПИ. – 1957. – Вып.10. – С.15-36.

95. *Котов. И. И.* Прикладная геометрия поверхностей / *И.И. Котов, Г.К. Николаевский, Н.Н. Рыжов, И.М. Халдеев* // Вопросы начертательной геометрии и ее приложение. – Х.: ИХУ, 1963. – С.3-10.

96. Краткий конспект по начертательной геометрии / *А.С. Гозулова, Е.А. Сергеева*. – Макеевка: ДонГАСА, 1999. – 70 с.

97. *Кулешов Д.А., Стремников Г.Е.* Инженерная геодезия. М.: Недра, 1996. – 256 с.

98. *Куценко Л.Н.* Теоретические основы и геометрические приложения метода А-отображений: автореф. дис. … док. техн. наук: 05.01.01 / *Леонид Николаевич Куценко*, КИСИ. – К., 1992. – 35 с.

99. *Кучеренко В.В.* Реконструкція способом «Лупа», дискретно представленої поверхні земельної ділянки на основі рівномірної сітки у плані / *В.В. Кучеренко, В.М. Верещага, І.Г. Балюба, Є.В. Конопацький* // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Вип. 4, т. 55. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – с.3-8.

100. *Кучеренко В.В.* Формалізовані геометричні моделі нерегулярної поверхні для гіперкількісної дискретної скінченої множини точок: дис. … канд. техн. наук: 05.01.01 / *Вадим Володимирович Кучеренко*; Дніпр. нац. ун-т. – Дніпропетровськ, 2013. – 187 с.

101. *Кучеренко В.В.* Загальний алгоритм побудови ліній найбільшого нахилу для дискретно представленої поверхні / *В.В. Кучеренко, В.М. Верещага, С.Ю. Радєв* // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет.– Вип. 4, т. 54.– Мелітополь: ТДАТУ, 2012.– с.81-89.

102. *Кучеренко В.В.* Побудова сітки у плані для поверхні, отриманої наземним лазерним скануванням / *В.В. Кучеренко, В.М. Верещага, А.О. Бездітний* // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Випуск 87.- К.: КНУБА, 2011.- С.111-115.

103. *Кучкарова Д.Ф.* Анализ формирования математических моделей топографических поверхностей / *Д.Ф. Кучкарова* // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: 1997. – Вип. 62. – С. 110-114.

104. *Кучкарова Д.Ф.* Геометрические вопросы водоотведения со сложных поверхностей при автоматизированном проектировании: автореф. дис. … канд. техн. наук: 05.01.01 / *Дилларом Файзуллаевна Кучкарова*, КИСИ. – К., 1981. – 16 с.

105. *Кучкарова Д.Ф.* Теория топографических поверхностей и её приложения: дис. … док. техн. наук: 05.01.01 / *Дилларом Файзуллаевна Кучкарова*. – Бухара, 2002. – 314 с.

106. *Кучкарова Д.Ф., Хаитов Б.У.* Вопросы интеграции ГИС технологий в САПР // Проблемы подготовки

высококвалифицированных кадров в производстве сельского и водного хозяйства. Тезы докл. Респ. науч.-практ. конф.- Ташкент, 25-26 ноября 2009.- С.410-413.

107. *Кучкарова Д.Ф., Хаитов Б.У.* Геометрическое моделирование планировки и орошения поверхности почвы на склонных поверхностях // VIII науч.-практ. конф. «Современные проблемы сельського водного хозяйства».- ТИИМ.- Ташкент, 21-22 мая 2009.- С. 797-799.

108. Лабораторный практикум по инженерной геодезии: учеб. пособ. для вузов / *В.Ф. Лукьянов, В.Е. Новак, Н.Н. Борисов и др*. – М.: Недра, 1990.

109. *Лебедев В.А.* Дискретная интерполяция плоских дискретно представленных кривых линий на основе углов сгущения : Дис... канд. техн. наук: 05.01.01 / *В.А. Лебедев*// Таврическая гос. агротехническая академия. — Мелитополь, 2004. — 194с.

110. *Маклеод С*. Используя облака точек // Reporter 63.- С.9-11.

111. *Малютина Т. П., Балюба И. Г*. Определение касательных випуклого плоского обвода в точечном исчислении. / Т.П. Малютина, И.Г. Балюба // Прикладна геометрія та інж. графіка. –К.: КДТУБА, 1996. –Вип.62. –С.57-60.

112. *Малютіна Т.П.* Інтерпретація обчислювальної геометрії плоских фігур у точковому численні: дис. канд. техн. наук: 05.01.01 / Т.П. Малютіна – Макіївка: ДонДАБА, 1998. – 227 с.

113. *Мартин Є.В.* Геометрія комплексного простору стосовно формування областей стійкості та оптимізації параметрів регульованих систем: автореф. дис. … док. техн. наук: 05.01.01 / *Є.В. Мартин*, КНУБА. – К., 2000. – 36 с.

114. Математическая энциклопедия / Гл. Ред. И.М. Виноградов. – М.: Совестская Энциклопедия. Т.4.ОК. – Сло. 1984. 191 стр.]

115. *Мацулевич А.Е.* Аппроксимация дискретно представленных кривых в полярной системе координат по критерию наименьших предельных отклонений : Дис... канд. техн. наук: 05.01.01 / *А.Е. Мацулевич*// Таврическая гос. агротехническая академия. — Мелитополь, 2003. — 155с.

116. *Михайленко В.Е.* О координатных способах конструирования поверхностей / *В.Е. Михайленко, С.Н. Ковалёв* // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 1975. – Вип. 19. – С. 11-14.

117. *Михайленко В.Є., Кучкарова Д.Ф.* Геометричні моделі топографічних поверхонь в задачах проектування // Прикл. геометрия и инж. графика.- К.: КГТУСА, 1997.- Вып.62.- С.53-57.

118. Мобильные сканирующие системы // ГеоПрофи, №2, 2011.- С.45-47.

119. *Найдиш А. В.* Геометричне моделювання дискретних точкових множин на основі перенесення до простору параметрів: автореф. дис. … д-ра техн. наук: 05.01.01 / *Андрій Володимирович Найдиш*, КДТУБА. – К., 1998. – 42 с.

120. *Найдиш В.М.* Дискретна інтерполяція / *В.М. Найдиш*.- Мелітополь, Люкс, 2007.- 250с.

121. Найдиш В.М. Дискретне диференціювання / В.М. Найдиш, В.М. Верещага, А.В. Найдиш.- Мелітополь: Люкс, 2007.- 114с.

122. Найдиш В.М. Основи прикладної дискретної геометрії / В.М. Найдиш, В.М. Верещага, А.В. Найдиш, В.М. Малкіна.- Мелітополь: Люкс, 2007.- 193с.

123. *Найдыш А.В.* Основные направления исследования Мелитопольской школы прикладной геометрии в области развития БН-исчисления / *А.В. Найдыш, В.М. Верещага, И.Г. Балюба* // Прикладна геометрія та інженененерна графіка. Праці/Таврійський державний технологічний університет – Вип. 4, т. 56. – Мелітополь: ТДАТУ, 2013 – с. 139-146.

124. *Найдыш В.М.* Алгебра БН-исчисления / *В.М. Найдыш, И.Г. Балюба, В.М. Верещага* // Міжвідомчий науково-технічний збірник. Вип. 90. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Київ, 2012. – с.210-215.

125. Найдыш В.М. Методы и алгоритмы формирования поверхностей и обводов по заданным дифференциально-геометрическим условиям: Дис. … д-ра техн.наук: 05.01.01 / Владимир Михайлович Найдыш, Мелитополь: МИМСХ, 1982. – 512 с.

126. *Найдыш А.В.* Геометрическое моделирование дискретных точечных множеств на основе перенесения в пространстве параметров: Дис... д-ра техн. наук: 05.01.01 / *А.В. Найдыш* // Таврическая гос. агротехническая академия. - Мелитополь, 1998. - 338с.

127. *Найдыш В.М.* Методы и алгоритмы формирования поверхностей и обводов по заданным дифференциально-геометрическим условиям. Автореф. дис. … докт.техн.наук.- М.: МАИ, 1983.- с.33

128. *Несвідомін В.М.* Комп’ютерні моделі синтетичної геометрії: автореф. дис. … д-ра техн. наук: 05.01.01 / *Віктор Миколайович Несвідомін*; КНУБА. – К., 2008. – 40 с.

129. *Неумывакин А.Ю.* Использование цифровой модели рельефа при проектировании противоэрозионных сооружений. Мелиорация и водное хозяйство, №7, 1989.- С.28-30.

130. *Обухова В.С.* Конструктивно прикладная теория нелинейных осевых отображений и ассоциированных с ними алгебраических поверхностей. Автореф. диссдоктора техн. наук. - Киев, КИСИ, 1991.: 41 с.

131. *Обухова В. С.* Синтетические методы конструирования алгебраических поверхностей высших порядков / *В. С. Обухова* // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1971. – Вып. 12. – С. 16-21.

132. Опыт применения системы наземного лазерного сканирования // ГеоПрофи, №5, 2011.- С.21-23.

133. *Осипов В.А.* Алгоритмы построения многопараметрических плоских обводов. // Кибернетика графики и прикладная геометрия поверхностей. – М.: 1968. – с. 52-59.

134. Основи прикладної геометрії: [навч. посібник] / [*В. М. Найдиш, В. М. Верещага, А.В. Найдиш, В.М. Малкіна*]; під. ред. В.М. Найдиш. – Мелітополь: ВДП «Люкс», 2007. – 193 с.

135. *Павленко О.М.* Умови встановлення кінцевих точок на мапі рельєфу / О.М. Павленко // Инновационные технологии в кооперативном образовательном процессе / Материалы Международной заочной научно-практической конференции, посвященной 40-летию Саранского кооперативного института (филиала) Российского университета кооперации – Саранск, 2016. – с. 310-316.

136. *Павленко О.М.* Дослідження точності процесу згущення кривої складеної форми при реконструкції засобами точкового численні Балюби-Найдиша / О.М.Павленко // Міжвідомчій науково-технічний збірник. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Випуск 91 – К.: КНУБА, 2013. – с. 206-210.

137. *Павленко О.М., Верещага В.М*. Спосіб розростання чарунок / В.М. Верещага, В.В. Кучеренко, О.М. Павленко // Матеріали ІІ-ї міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Прикладна геометрія, дизайн та об'єкти інтелектуальної власності». Випуск 2. – К.: Дія, 2013р. – с. 13-17.

138. *Павленко О.М.* Застосування способу розростання чарунок для реконструкції дискретно представлених поверхонь / О.М. Павленко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. / Праці. Таврійський державний агротехнологічний університет. – Вип. 4, т. 56. – Мелітополь: ТДАТУ, 2013. – с.272-279.

139. *Павленко О.М., Верещага В.М.* Визначення площі, обмеженої топографічною замкненою плоскою кривою / Конопацький Є.В., Павленко О.М. // Науковий журнал «Комп'ютерно-інтегровані технлогії: освіта, наука, виробництва». – Випуск №20. – Луцьк, 2015. – с. 119-123.

140. *Павленко О.М.* Визначення площі сегмента, обмеженого дугою кривої / Верещага В.М., Чураков А.Я., Лебідько О.С. // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б.Хмельницького, 2015. - Вип.4., - с. 22-25.

141. *Павленко О.М.* Спосіб згортання (розгортання) чарунок / Верещага В.М., Адоньєв Є.О., Павленко О.М. // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. А.В. Найдиш. – Мелітополь: Видавництво МДПУ імені Б. Хмельницького, 2016.– Вип. 7. – с. 32-38.

142. *Павленко О.М.* Проективне визначення дуги кривої третього порядку у точковому численні Балюби-Найдиша / О.М. Павленко, А.В. Найдиш, В.М. Верещага, І.Г. Балюба, Є.В. Конопацький// Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний

агротехнологічний університет.– Вип. 4, т. 54.– Мелітополь: ТДАТУ, 2012.– с. 101-109.

143. *Павленко А.М.* Моделирование консольной поверхности типа крыла с переменными профили сечения / А.М. Павленко, А.В. Найдыш, В.М. Верещага, И.Г. Балюба, Е.В. Конопацкий // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет.– Вип. 4, т. 53.– Мелітополь: ТДАТУ, 2012.– с. 115-122.

144. *Павленко О.М.* Геометричний алгоритм оптимального кінцевого вертикального планування горизонтальної площини на земельній ділянці за результатами наземного лазерного сканування / Верещага В.М., Бездітний А.О. // Матеріали IV-ї Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вченів "Прикладна геометрія, дизайн, об'єкти інтелектуальної власності та інноваційна студентів та молодих вчених". Випуск 4. - К.: ДІЯ, 2015. – с. 58-59.

145. *Павленко О.М.* Геометричне представлення властивостей метричного оператора трьох точок прямої / О.М. Павленко // Сучасні проблеми геометричного моделювання: збірник праць XVII Міжнародної науково-практичної конференції. - Мелітополь: вид-во МДПУ ім. Б.Хмельницького, 2015, с.77-81.

146. *Павленко О.М. Верещага В.М.* Згущення дискретно поданої кривої із застосуванням супровідних трикутників. Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ МДПУ ім. Б.Хмельницького; гол. ред. кол. А.В. Найдиш. - Мелітополь: вид-во МДПУ ім. Б.Хмельницького, 2016. – с. 30-37.

147. *Павлов А. В.* К вопросу о построении обводов технических форм с помощью кривых 2-го порядка / *А.В. Павлов* // Прикладная

геометрия и инженерная графика. – К.: КИСИ, 1965. – Вып. 1. – С. 110-118.

148. *Первикова В.Н.* Геометрические основы построения чертежей многомерных фигур в синтетическом и векторном изложении с применением для исследования многокомпонентных систем: автореф. дис. … док. техн. наук / *В.Н. Первикова.* – М., 1974. – 31 с.

149. *Пилипака С. Ф., Хименко І. Ю.* Дослідження траєкторій руху водних потоків по поверхнях різного виду / *С.Ф. Пилипака, І.Ю. Хименко* //Геометричне та комп'ютерне моделювання.: Праці ХДУХТ. - Харків: ХДУХТ, 2005. - Вип. 11. - с. 15-24.

150. *Пилипака С.Ф.* Дослідження геодезичних ліній на поверхні гвинтового коноїда / *С.Ф. Пилипака, Т.В. Гнітецька* // Сучасні проблеми геометричного моделювання. Матеріали міжнародної науково-практичної конференції. – Львів: Національний університет «Львівська політехніка», 2003. –С. 77-80.

151. *Пилипака С.Ф.* Побудова геодезичних ліній на поверхні гіперболічного параболоїда / *С.Ф. Пилипака, Я.С. Кремець* // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. –Том 49. –Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – С. 62–69.

152. *Пилипака С.Ф., Волянський М.С., Хименко І.Ю.* Моделювання ліній найбільшого нахилу поверхні поля для системи точного землеробства / *С.Ф. Пилипака, М.С. Волянський, І.Ю. Хименко* // Прикл. геом. та інж. граф.: Праці ТДАТА.– Мелітополь: ТДАТА, 2004. - Вип.4, т. 23. – С.23-28.

153. *Пилипака Т.С., Бабка В.М., Кремець Я.С.* Особливості геодезичних ліній на поверхнях обертання / Т.*С. Пилипака, В.М. Бабка, Я.С. Кремець* // Міжвузівський збірник "Комп'ютерно-інтегровані

технології: освіта, наука, виробництво ". Випуск №6.— Луцьк, 2011.— с.182-185.

154. *Плоский В. О.* Деякі зауваження щодо впорядкування інструментальних засобів прикладної геометрії. / *В.О. Плоский* // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2012. – Вип. 90. – С. 254-261.

155. *Плоский В.О.* Аналітичний огляд методів геометричного моделювання топографічних поверхонь / *В.О. Плоский, С.А. Кожедуб* // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2008. – Вип. 80. – С. 505-513.

156. *Плоский В.О.* Дослідження методів геометричного моделювання топографічних поверхонь / *В.О. Плоский, С. А. Кожедуб* // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2009. – 22. – С. 11-17.

157. *Плоский В.О.* Поліваріантний спосіб представлення моделей стоку / *В.О. Плоский, С.А. Кожедуб* // Інженерна геодезія. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 56. – С. 237-247.

158. *Подгорный А. Л.* Геометрическое моделирование пространственных конструкций: дисс. … д-ра техн. наук: 05.01.01 / *Алексей Леонтьевич Подгорный*, КИСИ – М., 1975. – 371 с.

159. *Подгорный А. Л.* Ключевые способы задания множеств линий и конструирование поверхностей / *А. Л. Подгорный* // Прикладная геометрия и инженерная графика. – 1969. – Вып.9. – С. 6-20.

160. Проектирование противоэрозионных гидротехнических мероприятий с применением ЭВМ.- К.: Укрземпроект, 1988.- 76с.

161. *Пугачов Є.В.* Дискретне геометричне моделювання скалярних і векторних полів стосовно будівельної світлотехніки: дис.

… д-ра техн. наук: 05.01.01 / *Євген Валентинович Пугачов*, КНУБА. – К., 2001. – 313 с.

162. *Пугачов Є.В.* Визначення контурів плоскої множини точок / *Є.В. Пугачов* // Прикл. геометрія та інж. графіка: між від. наук.-техн. зб.- К.: КНУБА, 1998.- Вип.:63.- С.75-79.

163. *Пугачов Є.В.* Модифікація алгоритму дискретної апроксимації плоских множин точок / *Є.В. Пугачов, В.І. Черняк* // Вісник НУВГП. Збірник наукових праць.- 2007.- Вип.3 (39), частина 2.- С.158-165.

164. *Пустюльга С.І.* Дискретне визначення геометричних об’єктів числовими послідовностями: автореф. дис. … д-ра техн. наук: 05.01.01 / *Сергій Іванович Пустюльга*, КНУБА. – К., 2006. – 38с.

165. *Пустюльга С.І., Самостян В.Р.* Дискретне геометричне моделювання врівноважених замкнутих кривих числовими послідовностями / *С.І. Пустюльга, В.Р. Самостян* // Прикладна геометрія та інженерна графіка.- К.: КНУБА, 2011.- Вип.87.- С.16-19.

166. *Пыхтеева И.В.* Аппроксимация плоских дискретно представленных кривых линий на основе дискретного метода наименьших квадратов : Дис... канд. техн. наук: 05.01.01 / *И.В. Пыхтеева* // Таврическая гос. агротехническая академия. — Мелитополь, 2004. — 181с.

167. *Рахматов Б., Хаитов Б.У., Кучкарова Д.Ф.* Геометьрическое моделирование планировки почвы на склонных поверхностях для сельскохозяйственной мелиорации // XII Международная студенческая найучно-техническая конференция «Графика XXI века»: Тез. Докл.- Севастополь, 2009.- С.70-73.

168. *Роджерс Д.* Математические основы машинной графики. / Д. Роджерс, Дж. Адамс // М.: Мир, 2001.

169. *Рудий Р.М.* Методи дослідження рельєфу земної поверхні: дис. … д-ра. техн. наук: 05.24.02 / *Роман Михайлович Рудий*; Івано-Франківський держ. технічний ун-т нафти і газу. – Івано-Франківськ, 1999. – 375 с.

170. *Рыжов Н. Н.* Каркасная теория задания и конструирования поверхности / *Н.Н. Рыжов* // Труды университета Дружбы народов им. Патриса Лумумбы. – 1967. - №26. – С. 3-17.

171. *Рыжов Н.Н.* Параметрическая геометрия / *Н.Н. Рыжов*. – М.: МАДИ, 1988. – 55 с.

172. *Сазонов К.А.* Графическая диалоговая подсистема ИНТЭАР. РЛФ моделирования на рельефе местности / *[К.А. Сазонов, В.А. Антипова, Т.К. Кригизбаев [и др.]* // Прикл. Геометрия и инж. Графика. – К.: Будівельник, 1986. – Вып. 41. – С. 24-25.

173. *Самостян В.Р.* Вплив геометричних вимог на процеси дискретного моделювання криволінійних об’єктів будівництва: автореф. дис. … канд. техн. наук: 05.01.01 / *В.Р. Самостян*, КНУБА. – К., 2011. – 20 с.

174. *Середович В.А., Комиссаров А.В., Комиссаров Д.В., Широкова Т.А.* Наземное лазерное сканирование.- Новосибирск: СГГА, 2009. - 261 с.

175. *Скворцов А.В.* Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне / *А.В. Скворцов* // Вычислительные методы и программирование. – 2002. – Т.3. – с. 14-39.

176. *Скворцов А.В.* Триангуляция Делоне и её применение. Томск: Изд-во Томского университета, 2002. – 128с.

177. Скидан И. А. Геометрическое моделирование кинематических поверхностей в специальных координатах: автореф.

дис. … д-ра техн. наук: 05.01.01 / Иван Андреевич Скидан; МАДИ. – М., 1989. – 36с.

178. Спиринцев В.В. Дискретная интерполяция дискретно представленных кривых линий на основе заданного закона изменения угловых параметров : дис... канд. техн. наук: 05.01.01 / В.В. Спиринцев//Таврическая гос. агротехническая академия. — Мелитополь, 2006. — 189с.

179. *Спиринцев Д.В.* Дискретная интерполяция на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров: дис. ... канд. техн. наук : 05.01.01 / *Д.В. Спиринцев*; Тавр. гос. агротехнол. ун-т. - Мелитополь, 2010. - 213с.

180. Справочное руководство по черчению/ В.Н. Богданов, И. Ф. Малежик, А.П. Верхола и др. – М.: Машиностроение, 1989. – 864с.]

181. *Стечкин С.Б.,Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике.– М.: Наука, 1976. – 248 с.

182. *Стєганцев Є.В., Стєганцева П.Г.* Інваріанти проективних перетворень: навчальних посібник для індивідуальної та самостійної робіт для студентів III курсу математичного факультету. – Запоріжжя: ЗНУ, 2011 – 85с.

183. *Тинкевіч М.А.* Интерполяционный многочлен Лагранжа / М.А. Тинкевіч // Численные методы анализа. — Кемерово, 2002.

184. *Толок О.В.* Системний аналіз форми рельєфу у задачах поверхневого водовідведення / *О.В. Толок, К.Н. Черниченко* // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 1993. – Вип. 54. – С. 117-121.

185. Точечное исчисление [учебное пособие] / *И.Г. Балюба, В.М. Надыш* [под ред. Верещаги В.М.] // – Мелитополь: Изд-во МГПУ им. Б.Хмельницкого, 2015. – 234 с.

186. Точечное исчисление математический аппарат параллельных вичислений для решения задач математического и компьютерного моделирования геометрических форм. [Балюба И.Г., Полищук В.И., Горягин Б.Ф., МалютинаТ.П.] // Материалы Международной научной конференции «Моделирование — 2008», 14-16 мая 2008 р., г. Киев, Том 2. — С. 286-290. Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины.

187. *Тревого І.* Аналіз технологічних можливостей сучасних наземних лазерних сканерів / *І. Тревого, А. Баландюк, А. Григораш* // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва : збірник наукових праць Зах. геодез. товариства УТГК : до 15-ої річниці професійного свята працівників геології, геодезії і картографії України. / Західне геодезичне товариство України товариства геодезії та картографії, Національний університет "Львівська політехніка" ; головний редактор І. С. Тревого. - Львів : Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2010. - Випуск 1 (19). - 356 с. - С. 170-176.

188. *Тулученко Г.Я.* Геометричне моделювання скалярних полів за методом усереднення адаптивних інваріантних шаблонів: автореф. дис. … док. техн. наук: 05.01.01 / *Галина Яківна Тулученко*; КНУБА. – К., 2008. – 29 с.

189. *Филиппов П.В.* Начертательная геометрия многомерного пространства и ее приложения / *П. В. Филиппов* – Л.: ЛГУ, 1979. – 280с.

190. *Хаитов Б.У.* Геометрическое моделирование рельефа поля для задач мелиорации. Автореф. дис. … к-та техн. наук: 05.01.01 Инженерная геометрия и компьютерная графика.- Ташкент, 2012.- 22с.

191. *Харченко В.П.* Методики эксперементальной оценки навигационных характеристик широкозонных функциональных

дополнений GPS(GNSS) / *В.П. Харченко, А.А. Жалило, В.В. Конин, В.М. Кондратюк* // Аерокосмічні системи моніторингу та керування, Матеріали VI міжнар.наук.-техн.конф.- К., 2004.- С.21.10-21.16.

192. *Хейфец Б.С.* Применение полиномов для математической характеристики сложности рельефа земной поверхности. Изв.вузов «Геодезия и аэрофотосъемка», вып.1, 1958.- с.12-16.

193. *Хименко І.Ю.* Геометричне моделювання рельєфу поля для системи точного землеробства: автореф. дис. … канд. техн. наук: 05.01.01. / *Ірина Юріївна Хименко*; Київ. нац. ун-т будівництва і архітектури. – К., 2005. – 19 с.

194. *Хименко І.Ю.* Геометричне моделювання рельєфу поля для систем точного землеробства: Дис. к-та техн. наук: 05.01.01. / Національний аграрний університет.- К., 2005.- 143с.

195. *Хомченко А.Н., Тулученко Г.Я.* Модифікація сплайнів на основі поліномів С.Н. Берштейна // Праці Таврійської державної агротехнологічної академії.- Мелітополь: ТДАТА, 2004.- Вип.4.- Т.24.- С.57-61.

196. *Черняк В.І.* Дискретна апроксимація неупорядкованих множин точок: дис. ... канд. техн. наук : 05.01.01 / *Черняк Віталій Іванович*; Нац. ун-т вод. госп-ва і природокористування. - Рівне : [б. в.], 2011. – 179с.

197. *Четверухин Н.Ф.* Пути развития прикладной геометрии / *Н.Ф. Четверухин* // Сборник трудов по начертательной геометрии и инженерной графике. – Т., 1967. – С. 5-8.

198. *Щербина В.М.* Геометрическое моделирование спиралеобразных дискретно представленных кривых линий: дис... канд. техн. наук: 05.01.01 / *В.М. Щербина*; Таврическая гос. агротехническая академия. - Мелитополь, 2002. - 190с.

199. Верещага В.М. Спосіб розростання чарунок / В.М. Верещага, В.В. Кучеренко, О.М. Павленко // Матеріали ІІ-ї міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Прикладна геометрія, дизайн та об'єкти інтелектуальної власності». – К.: Дія, 2013. – Випуск 2. – С. 13-17.

200. Верещага, В. М., Адоньєв Є.О., Павленко О.М. Спосіб згортання (розгортання) чарунок. Сучасні проблеми моделювання. 2016. Вип. №. 7. С. 32–38.

201. Верещага В.М., Конопацький Є.В., Павленко О.М. Визначення площі, обмеженої топографічною замкненою плоскою кривою. Науковий журнал: комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво, 2015.

202. Верещага В. М., Конопацький Є. В. Визначення площі, обмеженої топографічною замкненою плоскою кривою //Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництва. – 2015. – №. 20. – С. 119-123.

203. Павленко О. М. Застосування способу розростання чарунок для реконструкції дискретно представлених поверхонь //Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2013. – Т. 2. – №. 16. – С. 34-41.

204. Павленко О. М. Геометричне представлення властивостей метричного оператора трьох точок прямої //Сучасні проблеми геометричного моделювання: зб. пр. XVII Міжнар. наук.-практ. конф. – МДПУ ім. Б. Хмельницького, Мелітополь, 2015. – С. 77-81.

205. Павленко О. М. Згладжування як основний метод аналізу часових рядів //Сучасні проблеми модернізації та структурних трансформацій економіки України і регіонів: матеріали Міжнар. наук.-практ. конф. – Запоріжжя, 2015. – С. 78-85.

206. Павленко О. М., Баркалов С. І. Що таке Microsoft Windows Insider Program та чим вона може бути корисною для ІТ-фахівця та звичайного користувача? //Інформаційні технології в моделюванні: матеріали ІІІ Всеукр. наук.-практ. конф. студентів, аспірантів та молодих вчених. – МНУ імені ВО Сухомлинського, Миколаїв, 2018. – С. 158-162.

207. Павленко О. М. Побудова великих проектів та основні властивості підпрограм в середовищі Object Pascal //Інституціональне перетворення в суспільстві: світовий досвід і українська реальність: матеріали ІХ Міжнар. наук.-практ. конф. – МІДМУ «КПУ», Мелітополь, 2014. – С. 53-56.

208. Павленко О. М. Умова розташування трьох точок на одній прямій у точковому БН-численні //Соціально-економічний розвиток України: сучасність та перспективи: зб. наук. пр. учасників XV Міжнар. наук. конф. молодих учених та студентів. – Мелітополь, 2015. – С. 64-71.

209. Павленко О. М. Застосування інформаційних технологій для реалізації методики аналізу еколого-економічної ефективності природоохоронної діяльності //Екологія-філософія існування людства: зб. наук. пр. ІІ наук.-практ. конф. – Мелітополь, 2015. – С. 23-27.

210. Павленко О. М. Умови встановлення кінцевих точок на мапі рельєфу //Инновационные технологии в кооперативном образовательном процессе: материалы Междунар. заочной науч.-практ. конф., посвященной 40-летию Саранского кооперативного института (филиала) Российского университета кооперации. – Саранск, 2016. – С. 310-316.

211. Павленко О. М. Основні принципи та стандарти побудови локальних обчислювальних мереж //Кооперация в системе общественного воспроизводства. – 2013. – Т. 2. – С. 267-270.

212. Павленко О. М. Геометричне моделювання вертикального планування горизонтальної земельної ділянки засобами точкового БН-числення : дис. – Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького, 2017.

213. Верещага В. М., Адоньєв Є. О., Павленко О. М. Спосіб згортання (розгортання) чарунок //Сучасні проблеми моделювання. – 2016. – №. 7. – С. 32-38.

214. Павленко О. М. Застосування способу розростання чарунок для реконструкції дискретно представлених поверхонь //Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2013. – Т. 2. – №. 16. – С. 34-41.