УДК 514.18

А.О. Бездітний, к.т.н.,
А.В. Найдиш, д.т.н.,
В.В. Кучеренко, к.т.н.,
А.І. Літвінов

ДОТИЧНА ПЛОЩИНА ТА НОРМАЛЬ ДО ПОВЕРХНІ ЗАСОБАМИ ТОЧКОВОГО БН -ЧИСЛЕННЯ

Мелітопольська школа прикладної геометрії
Мелітопольський державний педагогічний університет
ім. Б. Хмельницького, Україна

У роботі запропоновано спосіб визначення нормалі та дотичної площини до регулярної поверхні, визначеної засобами точкового БН – числення у просторовому симплексі.

Постановка проблеми. Питанню побудови нормалі до регулярної поверхні та дотичної площини, що проходить через точку, у якій нормаль перетинає досліджувану поверхню, присвячено багато досліджень та наукових праць. Оскільки подальші розробки заплановано присвятити моделюванню фізичних процесів за допомогою функціональних кривих та поверхонь у точковому БН-численні [1], то ми неодмінно зіштовхнемося з проблемою побудови нормалі та дотичної площини до поверхні. Також ці дані потрібні для дослідження гладкості поверхні як однієї з обов'язкових ознак.

Аналіз останніх досліджень. У точковому БН –численні подібні дослідження ще не проводилися. Щодо класичних способів визначення нормалі та дотичної площини до поверхні, то найбільш повну відповідь на ці питання дає диференційна геометрія [2] через те, що всі досліджувані там поверхні підпорядковані вимогам, пов'язаним з можливістю застосування методів диференційного числення (однією з таких вимог є існування дотичної площини у кожній точці поверхні для забезпечення її гладкості). Теоретичною базою для побудови нормалі та дотичної площини є розробки Балюби І.Г. [3,4].

Формування цілей статті. Використовуючи геометро – математичний апарат точкового БН –числення, побудувати дотичну площину та нормаль до поверхні, заданій у просторовому симплексі.

Основна частина. По-перше, визначимо точкове рівняння регулярної поверхні, що досліджується, у симплексі $DABC$:

$$M = (A-D)p(u,v)+(B-D)q(u,v)+(C-D)r(u,v)+D, \qquad (1)$$

де параметри u і v визначають функції p та q простих відношень трьох точок прямої в явній або неявній формах. Якщо u та v залежать від параметра t, то на поверхні M виділяється криволінійна координатна сітка (рис. 1).

При $v = \kappa_1 = const$ на поверхні (1) виділяється крива M:

$$M(u) = (A-D)p(u,k_1) + (B-D)q(u,k_1) + (C-D)r(u,k_1) + D, \qquad (2)$$

де u – змінний параметр, що у симплексі $DABC$ геометрично представляє просте відношення трьох точок прямої.

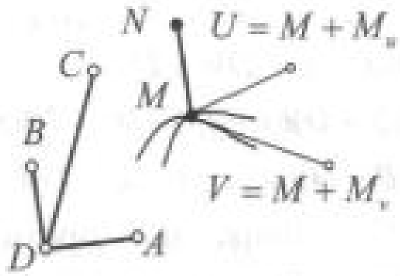

Рис. 1. Поверхня M, що задана у просторовому симплексі $DABC$

При $u = \kappa_2 = const$ на поверхні (1) виділяється інша крива:

$$M(v) = (A-D)p(k_2,v) + (B-D)q(k_2,v) + (C-D)r(k_2,v) + D, \qquad (3)$$

де v – змінний параметр, що у симплексі $DABC$ геометрично представляє просте відношення трьох точок прямої.

Перетин координатних ліній (2) та (3) фіксує точку K на поверхні (1):

$$K = (A-D)p(k_2,k_1) + (B-D)q(k_2,k_1) + (C-D)r(k_2,k_1) + D. \qquad (4)$$

Якщо вершини симплекса $DABC$ задані в прямокутній декартовій системі координат $OE_1E_2E_3$:

$$D(x_D, y_D, z_D),\ A(x_A, y_A, z_A),\ B(x_B, y_B, z_B),\ C(x_C, y_C, z_C).$$

Поверхня (1) може бути задана системою трьох рівнянь у координатній формі:

$$\begin{cases} x = (x_A - x_D)p(u,v) + (x_B - x_D)q(u,v) + (x_C - x_D)r(u,v) + x_D, \\ y = (y_A - y_D)p(u,v) + (x_B - x_D)q(u,v) + (x_C - x_D)r(u,v) + x_D, \\ z = (x_A - x_D)p(u,v) + (x_B - x_D)q(u,v) + (x_C - x_D)r(u,v) + x_D. \end{cases} \qquad (5)$$

У точковому БН –численні завдання поверхні або кривої лінії системою рівнянь по кожній координаті окремо рівносильно її параметричному представленню. Тому, використовуючи вигляд (5) досліджуваних об'єктів, ми можемо використовувати у точковому БН –численні всі здобутки диференційної геометрії для дослідження та конструювання багатопараметричних явищ та процесів.

Перейдемо до визначення дотичної площини та нормалі. Будь –яка площина визначається двома прямими, що перетинаються. Якщо ці прямі дотикаються до ліній, що належать регулярній поверхні, то вони утворюють дотичну площину до цієї поверхні (рис. 1). Як наслідок, дотична площина у поточній точці M поверхні, визначається трьома точками:

$$\begin{cases} M = (A-D)p + (B-D)q + (C-D)r + D \\ U = (A-D)(p+p_u) + (B-D)(q+q_u) + (C-D)(r+r_u) + D, \\ V = (A-D)(p+p_v) + (B-D)(q+q_v) + (C-D)(r+r_v) + D \end{cases} \quad (6)$$

де p,q,r відповідають [1], [3]. Лінія, що проходить через точку M перпендикулярно дотичній площині, буде нормаллю до поверхні (рис.1), у якої точка $N \neq M$ і однозначно визначає нормаль MN. У симплексі $DABC$ точка N задається точковим рівнянням:

$$N = (A-D)p_N + (B-D)q_N + (C-D)r_N + D; \quad (7)$$

Метричні оператори трьох точок $\sum_{UN}^{M}$ та $\sum_{VN}^{M}$ дорівнюють нулю через те, що трикутники ΔMUN та ΔMVN – прямокутні. Розглянемо систему із рівнянь цих двох операторів у розгорнутому вигляді, якій задовольняють параметри точки N:

$$\begin{cases} \sum_{UN}^{M} = \sum (U-M)(N-M) = 0; \\ \sum_{VN}^{M} = \sum (V-M)(N-M) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Зробимо підстановку M,U,V з формули (6) та N з формули (7) у (8). Після перетворень, зважаючи, що $(A-D)^2 = a^2, (B-D)^2 = b^2$, $(C-D)^2 = c^2$ – отримаємо:

$$\begin{aligned} &[(a^2 p_u + \textstyle\sum_{AB}^{D} q_u + \sum_{AC}^{D} r_u)(p_N - p) + (\sum_{AB}^{D} p_u + b^2 q_u + \\ &+ \textstyle\sum_{BC}^{D} r_u)(q_N - q) + (\sum_{AC}^{D} p_u + \sum_{CB}^{D} q_u + c^2 r_u)(r_N - r)] = 0; \\ &[(a^2 p_v + \textstyle\sum_{AB}^{D} q_v + \sum_{AC}^{D} r_v)(p_N - p) + (\sum_{AB}^{D} p_v + b^2 q_v + \\ &+ \textstyle\sum_{BC}^{D} r_v)(q_N - q) + (\sum_{AC}^{D} p_v + \sum_{CB}^{D} q_v + c^2 r_v)(r_N - r)] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Спростимо вираз (9), прийнявши наступні умовні позначення:

$$a_u = a^2 p_u + \sum {}_{AB}^{D} q_u + \sum {}_{AC}^{D} r_u,\ b_u = \sum {}_{AB}^{D} p_u + b^2 q_u + \sum {}_{BC}^{D} r_u,$$

$$c_u = \sum {}_{AC}^{D} p_u + \sum {}_{CB}^{D} q_u + c^2 r_u;$$

$$a_v = a^2 p_v + \sum {}_{AB}^{D} q_v + \sum {}_{AC}^{D} r_v,\ b_v = \sum {}_{AB}^{D} p_u + b^2 q_v + \sum {}_{BC}^{D} r_v,$$

$$c_v = \sum {}_{AC}^{D} p_v + \sum {}_{CB}^{D} q_v + c^2 r_v;$$

Після спрощень формула (9) прийме наступний вигляд:

$$\begin{cases} a_u p_N + b_u q_N = a_u p + b_u q + c_u (r - r_N) \\ a_v p_N + b_v q_N = a_v p + b_v q + c_v (r - r_N) \end{cases}, \tag{10}$$

Розв'язавши (8), маємо значення коефіцієнтів для знаходження точки N:

$$\begin{aligned} p_N &= \frac{(a_u b_v - a_v b_u) p + (c_u b_v - c_v b_u)(r - r_N)}{a_u b_v - a_v b_u} = \\ &= p + \frac{c_u b_v - c_v b_u}{a_u b_v - a_v b_u}(r - r_N); \\ q_N &= \frac{(a_u b_v - a_v b_u) q + (a_u c_v - a_v c_u)(r - r_N)}{a_u b_v - a_v b_u} = \\ &= q + \frac{a_u c_v - a_v c_u}{a_u b_v - a_v b_u}(r - r_N). \end{aligned} \tag{11}$$

Висновки. Таким чином, використовуючи точкове БН- числення та здобутки диференціальної геометрії, було визначено рівняння дотичної площини (6) до регулярної поверхні (5), заданої у точковому численні та нормаль до точки дотику (7) разом з її коефіцієнтами (11). Отримання цих рівнянь є одним з багатьох кроків, що дозволять нам почати дослідження багатопараметричних процесів засобами точкового БН –числення із використанням функціональних кривих та поверхонь. Однією з перспектив цього напрямку досліджень є вихід у точковому БН- численні на класи задач, що сьогодні можуть бути розв'язані виключно засобами диференційної геометрії.

Література

1. *Балюба І.Г.* Функціональна крива в точковому численні Балюби-Найдиша / *Балюба І.Г., Верещага В.М., Найдиш А.В.* // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Випуск 89.- К.: КНУБА, 2012.- С.65-69.

2. *Погорелов А. И.* Дифференциальная геометрия— 6-е издание. — М.: Наука, 1974.

3. *Балюба И.Г.* Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: Дис. … д-ра техн.. наука: 05.01.01 – Мелитополь, 1995. – 227с.

4. *Балюба И.Г.* Теоретические основы точечного исчисления / *И.Г. Балюба* // Монография. – Макеевка. Донбасский инж.-строит. инст.,1994.– С.32.

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ СРЕДСТВАМИ ТОЧЕЧНОМ БН -ИСЧИСЛЕНИИ

А.А. Бездитный, А.В. Найдыш, В.В. Кучеренко, А.И. Литвинов

В работе предложен способ определения нормали и касательной плоскости к регулярной поверхности, заданной средствами точечного БН - исчисления в пространственном симплексе.

TANGENT PLANE AND THE NORMAL TO THE SURFACE IN BN -CALCULATION

Andrey A. Bezditniy, Andrey V. Naydysh, Vadim V. Kycherenko, Anton I. Litvinov

In this article we propose method regular surface's tangent plane and normal determining given by means of the BN -calculation in the spatial simplex.