УДК 514.18

Є.А. ГАВРИЛЕНКО, Ю.В. ХОЛОДНЯК
Таврійський державний агротехнологічний університет
А.В. НАЙДИШ
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького

МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ ОБВОДІВ ІЗ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯМ ЗАДАНОЇ ТОЧНОСТІ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Запропоновано метод формування одновимірних обводів, виходячи з заданої точності інтерполяції. Максимальна абсолютна похибка інтерполяції визначається з урахуванням геометричних властивостей вихідної кривої лінії. Розглядається два різновиди похибки. По-перше, похибка, з якою сформована дискретно представлена крива, інтерполююча вихідний точковий ряд, представляє вихідну криву. По-друге, похибка, з якою інтерполююча крива представляє будь-яку криву з заданими характеристиками.

Ключові слова: похибка інтерполяції, упорядкована множина точок, осциляція, монотонна зміна диференціально-геометричних характеристик

Е.А. ГАВРИЛЕНКО, Ю.В. ХОЛОДНЯК
Таврический государственный агротехнологический университет
А.В. НАЙДЫШ
Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ОБВОДОВ С ОБЕСПЕЧЕНИЕМ ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Предлагается метод формирования одномерных обводов исходя из заданной точности интерполяции. Максимальная абсолютная погрешность интерполяции определяется с учетом геометрических свойств исходной кривой линии. Рассматриваются две разновидности погрешности. Во-первых, погрешность, с которой сформированная дискретно представленная кривая, интерполирующая исходный точечный ряд, представляет исходную кривую. Во-вторых, погрешность, с которой интерполирующая кривая представляет любую кривую с заданными геометрическими характеристиками.

Ключевые слова: погрешность интерполяции, упорядоченное множество точок, осцилляция, монотонное изменение дифференциально-геометрических характеристик

E.A. GAVRILENKO, YU.V. KHOLODNYAK
Tavria State Agrotechnological University
A.V. NAYDYSH
Melitopol State Pedagogical University named after Bogdan Khmelnitsky

MODELING OF ONE-DIMENSIONAL CONTOURS WITH ENSURE OF GIVEN ACCURACY OF INTERPOLATION

The purpose of research is to develop a method of forming of one-dimensional contours of with a given accuracy of interpolation. Determination of the accuracy of interpolation is based on the formation of a curve based on known geometric properties. The geometric model is formed on the assumption that if there is a curve without singular points that interpolates the points set, then there are no singular points for the original object. Such points include: inflection points, points of changes of the direction of increase of curvature, torsion, and other. The interpolating curve is formed in the form of a condensed points set consisting of an arbitrarily large number of points, determined on the basis of the possibility of interpolating their curve by a line with given characteristics. The error with which the discretely presented curve represents the original curve is estimated as the region of possible location of all curve lines interpolating the original points set whose properties are identical to those of the original curve. The error in the formation of the interpolating curve is estimated as the region of possible location of the curve which interpolate the thickened points set. The solution of the problem for a plane curve from the condition that there is no oscillation and the condition for a monotone change in the curvature is proposed. The region of the curve, which is determined by the condition of convexity of the curve, is the maximum and is the initial. The imposition of the following conditions: a monotonous change of curvature along the curve and the assignment of fixed positions of tangents and curvature values at the initial points, localizes the area of a possible solution. The developed method can be used to solve problems requiring the determination of the maximum absolute error with which the model represents the original object.

Keywords: interpolation error, ordered set of points, oscillation, monotone change of differential-geometric characteristics.

Постановка проблеми

Геометричне моделювання – один із інструментів дослідження об'єктів, явищ та процесів. Задачею геометричного моделювання є визначення властивостей об'єкта, що моделюється, за допомогою характеристик геометричної моделі. Вихідними даними є геометричні образи, задані множиною точок, розташування яких відображає властивості досліджуваного об'єкта. У вихідних точках можуть бути задані геометричні характеристики дискретно представленого геометричного образу (лінії або поверхні). Вихідні дані можуть бути отримані в результаті розрахунків або проведення замірів на фізичних об'єктах.

Труднощі моделювання дискретно представлених кривих і поверхонь пов'язані з тим, що характеристики кривих відомі тільки у вихідних точках. Характер зміни характеристик між вихідними точками можна визначити виходячи з додаткової інформації щодо властивостей об'єкта, що моделюється.

Одним із методів моделювання на основі дискретних множин є інтерполяція. Задача інтерполяції полягає у відновленні з заданою точністю невідомої функції (кривої) по значенням ординат, заданим на дискретній множині точок [1]. У загальному випадку точно відновити вихідну криву неможливо. Важливим етапом розв'язання задачі є вибір методів інтерполяції, що забезпечують необхідну точність. Розрізняють дві складові виникнення похибки: похибку дискретизації та похибку інтерполяції.

Похибка дискретизації виникає в результаті представлення вихідного об'єкта дискретною множиною точок. Похибка дискретизації є неминучою, не залежить від методу, обраного для подальшої інтерполяції, та не може бути усунута в процесі моделювання. Похибка дискретизації збільшується при невдалому розташуванні вихідних точок на геометричному образі, коли точковий ряд не відображає наявність особливих ділянок (зміна опуклості-увігнутості, зміна ходу та ін.). Дана похибка може бути зменшена в результаті збільшення числа вихідних точок дискретної множини. Збільшення числа вихідних точок збільшує сукупну похибку проведення замірів, об'єм обчислень і може збільшувати обчислювальну похибку. Відстань між вихідними точками (крок дискретизації) доцільно вибирати як можна більшим, але таким, що задовольняє вимогам до точності моделювання. Відомі способи інтерполяції не дозволяють визначити крок дискретизації, виходячи із заданої точності представлення вихідної кривої.

Похибка інтерполяції оцінюється відхиленням моделі від вихідного геометричного образу. При формуванні моделі методами, що характеризуються збіжністю та стійкістю, зменшення кроку дискретизації знижує похибку інтерполяції. Розробка методів інтерполяції, що забезпечують задану точність, є актуальною задачею моделювання.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

На даний момент найбільш розроблені методи інтерполяції на основі аналітично заданих функцій (безперервні методи інтерполяції). До таких методів належать методи глобального моделювання та методи кусково-гладких наближень. Методи глобального моделювання визначають геометричний образ одним рівнянням. Наприклад, у роботах [2–3] обвід описується алгебраїчними поліномами Ерміта та Ньютона.

Точність, з якою сформована модель, представляє вихідний об'єкт, оцінюється як відхилення моделі від відомої функції, що інтерполює той же точковий ряд. Зазначені способи оцінки похибки інтерполяції можуть застосовуватися при розв'язанні тестових прикладів із метою перевірки ефективності методу інтерполяції. При розв'язанні практичних задач більшість інтерполяційних поліномів виявляються нестійкими.

Методи кусково-гладких наближень формують обвід із ділянок аналітично заданих кривих, що стикуються у вихідних точках. У роботі [4] обвід формується ділянками кривих другого порядку, в роботі [5] – кривими Без'є, а в роботі [6] – В-сплайном.

При формуванні обводів методом, запропонованим у роботі [4], виникнення осциляції на ділянках кривих другого порядку неможливе. Основним недоліком методу є порушення регулярності значень кривини в точках стиковки. Цей недолік визначається другим степенем рівняння кривої.

Забезпечити регулярність значень кривини вдовж обводу дозволяє метод, розроблений у роботі [5]. Цей метод передбачає використання кривих Без'є третього або вищих порядків. Основним недоліком формування обводів на основі сплайнів Без'є є те, що вони не забезпечують локальність контролю форми кривої на ділянках обводу.

У роботі [6] розроблено метод формування обводів на основі В-сплайнів. Використання В-сплайну забезпечує максимальну локальність управління формою кривої у порівнянні з іншими відомими методами безперервного геометричного моделювання. Локальність керування формою В-сплайна зменшується при збільшенні степеня рівняння кривої з метою поліпшення якості стиковки ділянок обводу. Запобігання виникнення осциляції при використанні сплайнів Без'є та В-сплайнів забезпечується через контроль форми багатокутника, що задає сплайн.

Для невідомої кривої область можливого розташування може бути визначена тільки на основі передбачуваних властивостей кривої. Такими властивостями можуть бути регулярність і напрям монотонного зростання уздовж ділянок кривої характеристик: кривини, скруту, радіусів стичних сфер, наявність особливих точок.

Мета дослідження

Метою дослідження є розробка методу формування плоского одновимірного обводу із забезпеченням контролю максимальної абсолютної похибки інтерполяції.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати наступні задачі:

– розробити спосіб визначення області можливого розташування монотонної кривої лінії, що інтерполює заданий точковий ряд, виходячи з її характеристик: відсутність осциляції, монотонна зміна значень кривини уздовж кривої;
– розробити спосіб формування одновимірних обводів, що інтерполюють дискретну множину точок та належать заданій області можливого розташування монотонної кривої лінії.

Викладення основного матеріалу дослідження

Формування моделі на основі дискретної множини точок, виходячи із заданої абсолютної похибки інтерполяції, вимагає визначення границь можливого розташування лінійних елементів моделі. Крива, яка формується, представлена упорядкованою множиною точок, що їй належать, та геометричними характеристиками кривої. Ці характеристики необхідно забезпечити в процесі моделювання. Таку криву будемо називати дискретно представленою кривою (ДПК). Крива формується на основі будь-якого точкового ряду по ділянках, уздовж яких можливо забезпечити монотонну зміну значень кривини. Монотонні ділянки стикуються з заданим порядком гладкості.

Крива формується згущенням, що передбачає визначення для вихідного точкового ряду проміжних точок. Точки згущення призначаються всередині області можливого розташування монотонної кривої. У процесі згущень точкового ряду область можливого розташування кривої послідовно локалізується. Після досягнення заданої точності вузли сформованого точкового ряду з'єднуються хордами. Остаточний розв'язок представлено у вигляді супровідної ламаної лінії, що складається з як завгодно великої кількості хорд, відстань від яких до кривої лінії з заданими геометричними характеристиками не перевищує заздалегідь задану скільки завгодно малу величину.

Геометрична модель формується, виходячи з припущення: якщо існує крива лінія без особливих точок, яка інтерполює точковий ряд, то особливі точки відсутні й у вихідного об'єкта. До таких точок відносяться: точки перегину, зміни напряму зростання уздовж кривої значень кривини, скруту та ін.

Вихідний точковий ряд розбивається на ділянки, які можливо інтерполювати кривою лінією, уздовж якої значення геометричних характеристик монотонно зростають або спадають. Визначається область, всередині якої розташовуються всі криві лінії з заданими геометричними властивостями.

Вихідна плоска крива представлена упорядкованою множиною точок, які їй належать. Максимальну абсолютну похибку, з якою крива, що інтерполює точковий ряд, представляє вихідну криву лінію, у першому наближенні визначимо виходячи з умови відсутності осциляції кривих.

Якщо кожні три послідовні вихідні точки розташовані таким чином, що їх обхід здійснюється за стрілкою годинника, то вважаємо, що точковий ряд належить опуклій кривій лінії. Вихідний точковий ряд розбивається на опуклі й увігнуті ділянки та інтерполюється окремо по цим ділянкам. Будь-яка опукла крива лінія, що інтерполює точковий ряд, розташована в межах ланцюга базисних трикутників, обмежених хордою, що з'єднує сусідні вихідні точки, та дотичними до кривої (t_i) у цих точках (рис. 1).

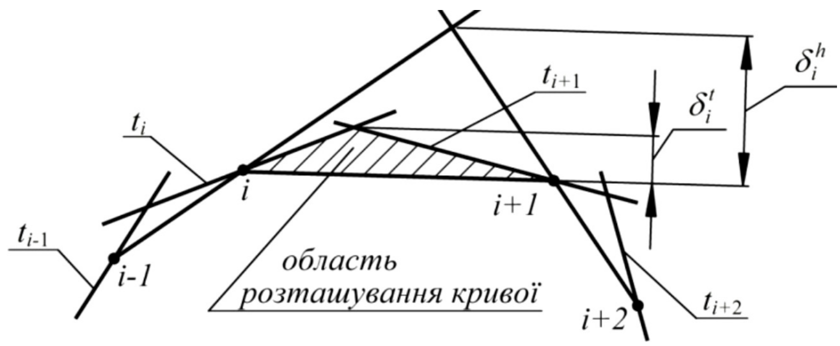

Рис. 1. Область розташування випуклої кривої.

На кожній з ділянок максимальне відхилення інтерполюючої кривої від вихідної не може перевищувати висоту відповідного базисного трикутника (δ_i^t). Це висота трикутника, сторони якого належать прямим, що проходять через три пари послідовних вихідних точок.

Оцінка точності інтерполяції через визначення висоти базисних трикутників можлива при формуванні обводів методами, що забезпечують контроль виникнення осциляції. Це метод кривих другого порядку [4], кривих Без’є [5], В-сплайнів [6], методи дискретної інтерполяції [7–8].

Наступною умовою, що дозволяє зменшити область можливого розташування кривої та підвищити точність інтерполяції, є умова монотонної зміни кривини уздовж кривої. Таку криву назвемо монотонною.

Через кожні три послідовні вихідні точки проводиться коло, яке будемо називати прилягаючим (ПК$_i$). Якщо радіуси прилягаючих кіл монотонно зростають або убувають уздовж точкового ряду, такий точковий ряд можливо інтерполювати кривою лінією з монотонним убуванням або зростанням кривини відповідно. Вихідний точковий ряд розбивається на ділянки з монотонною зміною радіусів прилягаючих кіл та інтерполюється окремо по цим ділянкам монотонними ДПК. Будь-яка монотонна крива лінія, що інтерполює вихідний точковий ряд, розташовується в межах області, обмеженої послідовними прилягаючими колами. Абсолютну похибку інтерполяції можна оцінювати довжиною відрізка $\delta_i^М$ (рис. 2).

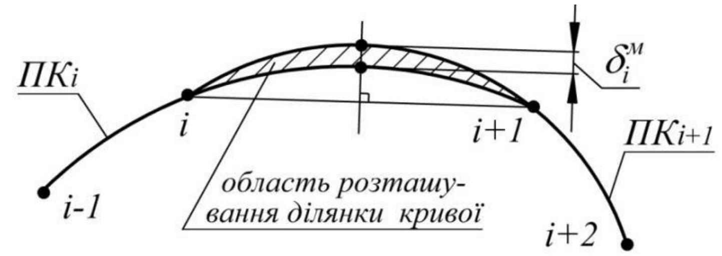

Рис. 2. Область розташування монотонної кривої.

Відрізок належить прямій, яка перпендикулярна хорді [i, i+1] та проходить через середину хорди. Точки, що обмежують відрізок $\delta_i^М$ належать прилягаючим колам, які обмежують область можливого розташування кривої на ділянці.

Положення точок згущення інтерполюючої ДПК визначається, виходячи з умови збереження закономірності зміни радіусів прилягаючих кіл уздовж точкового ряду, який отримується в результаті послідовних згущень. Виконання цієї умови забезпечує:

– відповідність передбачуваних геометричних властивостей вихідної кривої лінії та призначених властивостей інтерполюючої кривої;

– максимальну похибку інтерполяції, значення якої не перевищує розміри області можливого розташування вихідної ДПК.

Точки згущення призначаються на перпендикулярах (n_i) відповідних хорд, що проходять через середини супровідної ламаної лінії. Для ділянки (i...i+1) діапазон можливого розташування точки згущення (Δ_i) – перетин відрізків [A, C] та [B, D], де

– A – точка перетину перпендикуляра n_i та прилягаючого кола, що проходить через точки i–1, i, i+1: $A \equiv n_i \times$ПК(i–1, i, i+1);

– $B \equiv n_i \times ПК(i, i+1, i+2)$;

– $C \equiv n_i \times ПК(i-2, i-1, i)$;

– $D \equiv n_i \times ПК(i+1, i+2, i+3)$.

Призначення точки згущення на ділянці ДПК (i, i+1) призводить до утворення трьох нових прилягаючих кіл та локалізації області можливого розташування кривої на ділянці (i–1...i+2). Точки згущення послідовно призначаються в межах максимальних діапазонів Δ_i. У результаті послідовних згущень отримуємо криву, що інтерполює вихідний точковий ряд із регулярною монотонною зміною значень кривини. У результаті призначення кожної точки згущення отримуємо нову монотонну ДПК, що інтерполює вихідний точковий ряд. При цьому область можливого розташування кривої локалізується та залишається в межах області розташування вихідної кривої.

Наявність області розташування, яка послідовно локалізується, – необхідна умова формування точкового ряду, який з якою завгодно малою абсолютною похибкою представляє монотонну криву лінію. При цьому локалізація області розташування інтерполюючої кривої не дозволяє стверджувати, що точність, з якою вона представляє вихідну криву, збільшується.

Похибку інтерполяції можна зменшити, шляхом зменшення області можливого розташування кривої за рахунок збільшення порядку фіксації обводу, що формується. Усі монотонні криві, що інтерполюють послідовність вузлів, у яких призначено фіксовані положення дотичних (t_i) та значення радіусів кривини (R_i) на ділянці (i...i+1) розташовуються всередині області, обмеженої двома коробовими лініями кіл [8] (рис. 3).

Кожна з границь складається з двох дуг кіл, одне з яких – стичне коло монотонної кривої в точці, що обмежує ділянку, а інше – коло, дотичне до монотонної кривої в іншій точці, що обмежує ділянку. На рис. 3 радіуси стичних кіл позначено як R_i та R_{i+1}.

Відхилення обводу другого порядку фіксації з монотонною зміною кривини від вихідної кривої на ділянці ($i\dots i+1$) не може перевищувати максимальну ширину області можливого розташування кривої – $\delta_i^м$.

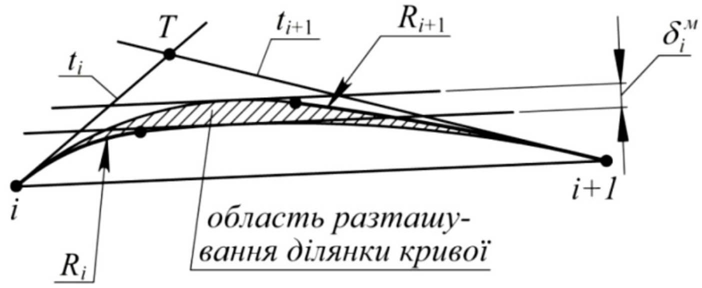

Рис. 3. Область розташування ділянки обводу з монотонною зміною кривини.

Оцінка точності інтерполяції, виходячи з умови зростання або спадання значень кривини уздовж гладкої кривої, можлива при моделюванні обводів методами формування монотонних кривих. Серед відомих – методи, які розроблені в рамках варіативного дискретного геометричного моделювання [7–8].

Висновки

1. Розроблено спосіб визначення області можливого розташування монотонної кривої лінії, що інтерполює заданий точковий ряд. Спосіб оснований на визначенні ділянок точкового ряду, які можливо інтерполювати монотонною кривою лінією – кривою, уздовж якої значення кривини монотонно зростають або убувають. Це дає можливість визначати вихідну криву лінію, як криву з мінімальною кількістю особливих точок – точок перегину та точок зміни напряму зростання кривини. Спосіб дозволяє оцінювати максимальну абсолютну похибку інтерполяції величиною області можливого розташування монотонних кривих ліній. Оцінка точності дискретної інтерполяції на основі монотонної зміни кривини дозволила зменшити абсолютну похибку в 2–3 рази відносно оцінки точності виходячи з умови запобігання осциляції.

2. Розроблено спосіб формування одновимірного обводу, який із заданою точністю представляє монотонну криву лінію. Спосіб дозволяє:

– формувати монотонну дискретно представлену криву, що інтерполює ділянки вихідного точкового ряду, область можливого розташування якої як завгодно мала;

– формувати обвід у вигляді супровідної ламаної лінії, яка з заданою точністю представляє монотонну криву.

Список використаної літератури

1. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: БИНОМ, 2008. – 636 с.
2. Ivan M. A note on the Hermite interpolation / M. Ivan // Numerical Algorithms. – 2015. – Vol. 69, Issue 3. – P. 517-522.
3. Argyros I. K. On the convergence of Newton-like methods restricted domains / I. K. Argyros, S. George // Numerical Algorithms. – 2017. – Vol. 75, Issue 3. – P. 553-567.
4. Li H. Geometric error control in the parabola-blending linear interpolator / H. Li // Journal of Systems Science and Complexity. – 2013. – Vol. 26, Issue 5. – P. 777-798.
5. Shen W. Direction monotonicity for a rational Bézier curve / W. Shen, G. Wang, F. Huang // Applied Mathematics – A Journal of Chinese Universities. – 2016. – Vol. 31, Issue 1. – P.1-20.
6. Volkov Yu. S. Obtaining a banded system of equations in complete spline interpolation problem via B-spline basis / Yu. S. Volkov // Central European Journal of Mathematics. – 2012. – Vol. 10, Issue 1. – P.352-356.
7. Gavrilenko E. A. Discretely geometrical modelling of one-dimensional contours with a regular change of differential-geometric characteristics / E. A. Gavrilenko, Yu. V. Kholodnyak // Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics). – Omsk, 2014. – P. 1-5.
8. Холодняк Ю. В. Формування геометричних характеристик при моделюванні монотонної дискретно представленої кривої / Ю. В. Холодняк, Є. А. Гавриленко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2013. – Вип. 91. – С. 292-296.