УДК 514.18

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭВОЛЮТЫ КРИВОЙ В ТОЧЕЧНОМ ИСЧИСЛЕНИИ БАЛЮБЫ-НАЙДЫША

Бездитный А.А., к.т.н.
Найдыш А.В., д.т.н.,
Спиринцев Д.В., к.т.н.,
Пахаренко В.А. д.т.н.
Мелитопольская школа прикладной геометрии
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (Україна)

В статье рассматривается способ задания эволюты кривой через параметры её эвольвенты в терминах точечного исчисления Балюбы-Найдыша (БН-исчислении).

Ключевые слова: эвольвента, эволюта, касательная, локальный симплекс, точечное исчисление Балюбы-Найдыша (БН-исчисление).

Постановка проблемы. На пути исследования свойств плоских кривых в точечном представлении стоит ряд нерешённых задач. К таковым можно отнести и задачу нахождения эволюты кривой по её эвольвенте, которая является классической в дифференциальной геометрии. Эти два сопровождающих друг друга геометрических объекта тесно связаны и учувствуют в описании процессов, которые характеризует кривая.

Анализ последних исследований и публикаций. Исследованием вопросов свойств плоских кривых в точечном представлении занимался Балюба И.Г. в своей докторской диссертации [1] и Давыденко И.П в кандидатской работе [2]. Но подробные исследования построения и свойств эволюты и эвольвенты в рамках геометрического аппарата точечного исчисления не проводились.

Формирование целей статьи. Установить взаимосвязь параметров плоской кривой (эвольвенты) с её эволютой.

Основная часть. Пусть в некотором симплексе *CAB* задана плоская кривая, которая принимается за эвольвенту. Построим сопутствующую ей эволюту.

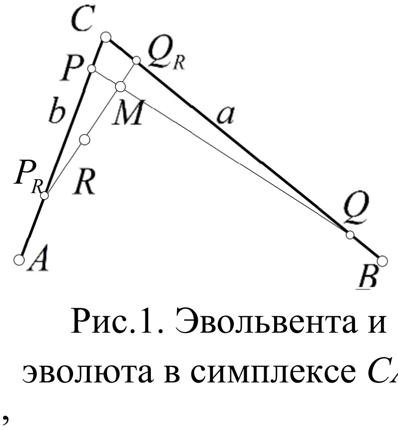

Рис.1. Эвольвента и эволюта в симплексе *CAB*

Определим кривую M в симплексе *CAB:*

$$P=(A-C)\overline{u}+C, Q=(B-C)v+C,$$

$$M=(A-C)\frac{\overline{u}^2\dot{v}}{\dot{u}v+\overline{u}\dot{v}}+(B-C)\frac{v^2\dot{u}}{\dot{u}v+\overline{u}\dot{v}}+C. \qquad (1)$$

Аналогичным образом можно задать эволюту (обозначим как R):

$$P_R = (A-C)\bar{u}_R + C, Q_R = (B-C)v_R + C\ ;$$

$$R = (A-C)\frac{\bar{u}_R^2\dot{v}_R}{\dot{u}_R v_R + \bar{u}_R\dot{v}_R} + (B-C)\frac{v_R^2\dot{u}_R}{\dot{u}_R v_R + \bar{u}_R\dot{v}_R} + C. \quad (2)$$

Определим зависимость параметров сопутствующих кривых M и R:

$$\sum[(A-C)\bar{u} - (B-C)v]\,[(A-C)\bar{u}_R - (B-C)v_R] = b^2\bar{u}_R\bar{u} + \textstyle\sum_{AB}^{C}(\bar{u}v_R + v\bar{u}_R) + a^2 v_R v = 0. \quad (3)$$

Точки P, Q, R принадлежат одной прямой, так что матрица, составленная на основании параметров этих точек, является вырожденной:

$$\begin{vmatrix} \bar{u}_R^2\dot{v}_R & v_R^2\dot{u}_R & \dot{u}_R v_R + \bar{u}_R\dot{v}_R \\ \bar{u} & 0 & 1 \\ 0 & v & 1 \end{vmatrix} = -\bar{u}_R^2\dot{v}_R v - v_R^2\dot{u}_R\bar{u} + \dot{u}_R v_R\bar{u}v + \bar{u}_R\dot{v}_R\bar{u}v = 0\ . \quad (4)$$

Из (3) и (4) получаем систему уравнений для нахождения параметров u_R, v_R:

$$\begin{cases} b^2\bar{u}_R\bar{u} + \sum_{AB}^{C}(\bar{u}v_R + v\bar{u}_R) + a^2 v_R v = 0; \\ -\bar{u}_R^2\dot{v}_R v - v_R^2\dot{u}_R\bar{u} + \dot{u}_R v_R\bar{u}v + \bar{u}_R\dot{v}_R\bar{u}v = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Из первого уравнения (5) получаем:

$$v_R = -\bar{u}_R\frac{b^2\bar{u} + \sum_{AB}^{C} v}{\sum_{AB}^{C}\bar{u} + a^2 v}. \quad (6)$$

Дифференцируем (6) по параметру t, считая u и v функциями от t:

$$\dot{v}_R = \dot{u}_R\frac{b^2\bar{u} + \sum_{AB}^{C} v}{\sum_{AB}^{C}\bar{u} + a^2 v} + \bar{u}_R\frac{(\sum_{AB}^{C} v - b^2\dot{u})(a^2\dot{v} - \sum_{AB}^{C}\dot{u})}{(a^2 v + \sum_{AB}^{C}\bar{u})^2}. \quad (7)$$

Подставим (6) и (7) во второе уравнение из (5):

$$-\bar{u}_R^2(\dot{u}_R\frac{b^2\bar{u} + \sum_{AB}^{C} v}{\sum_{AB}^{C}\bar{u} + a^2 v} + \bar{u}_R\frac{(\sum_{AB}^{C} v - b^2\dot{u})(a^2\dot{v} - \sum_{AB}^{C}\dot{u})}{(a^2 v + \sum_{AB}^{C}\bar{u})^2})v$$
$$- \left(\bar{u}_R\frac{b^2\bar{u} + \sum_{AB}^{C} v}{\sum_{AB}^{C}\bar{u} + a^2 v}\right)^2\dot{u}_R\bar{u} - \dot{u}_R\bar{u}_R\frac{b^2\bar{u} + \sum_{AB}^{C} v}{\sum_{AB}^{C}\bar{u} + a^2 v}\bar{u}v$$
$$+ \bar{u}_R(\dot{u}_R\frac{b^2\bar{u} + \sum_{AB}^{C} v}{\sum_{AB}^{C}\bar{u} + a^2 v}$$
$$+ \bar{u}_R\frac{(\sum_{AB}^{C} v - b^2\dot{u})(a^2\dot{v} - \sum_{AB}^{C}\dot{u})}{(a^2 v + \sum_{AB}^{C}\bar{u})^2})\bar{u}v = 0.$$

После преобразований получим:

$$\dot{u}_R\frac{\bar{u}(b^2\bar{u} + \sum_{AB}^{C} v)^2 - v(b^2\bar{u} + \sum_{AB}^{C} v)(a^2 v + \sum_{AB}^{C}\bar{u})}{\bar{u}v(\sum_{AB}^{C} v - b^2\dot{u})(a^2\dot{v} - \sum_{AB}^{C}\dot{u})} + \frac{\bar{u}_R}{\bar{u}} = 1. \quad (8)$$

Получаем линейное дифференциальное уравнение для определения параметра u_R:

$$\dot{u}_R + \bar{u}_R \frac{1}{\bar{u}} \frac{\bar{u}v(\sum_{AB}^{C} v - b^2\dot{u})(a^2\dot{v} - \sum_{AB}^{C} \dot{u})}{\bar{u}(b^2\bar{u} + \sum_{AB}^{C} v)^2 - v(b^2\bar{u} + \sum_{AB}^{C} v)(a^2 v + \sum_{AB}^{C} \bar{u})}$$
$$= \frac{\bar{u}v(\sum_{AB}^{C} v - b^2\dot{u})(a^2\dot{v} - \sum_{AB}^{C} \dot{u})}{\bar{u}(b^2\bar{u} + \sum_{AB}^{C} v)^2 - v(b^2\bar{u} + \sum_{AB}^{C} v)(a^2 v + \sum_{AB}^{C} \bar{u})}. \quad (9)$$

Выводы. В результате проведённой работы, была определена зависимость между параметрами заданной плоской кривой и её эволютой, выраженная линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Используя результаты этой работы, планируется определение эволюты кривой, заданной в пространственном симплексе.

Литература

1. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия разнообразий в точечном исчислении: автореф. дис. на соискание учен. степени доктора техн. наук: спец: 05.01.01 / И.Г. Балюба. – К.:1995. – 38с.
2. Давыденко И.П. Конструирование поверхностей пространственных форм методом подвижного симплекса: автореф. дис. на соискание учен. степени канд. техн. наук: 05.01.01 / И.П. Давыденко; Тавр. гос. агротехнол. ун-т. – Мелитополь, 2012. – 23 с.

ВИЗНАЧЕННЯ ЕВОЛЮТИ КРИВОЙ У ТОЧКОВОМУ ЧИСЛЕННІ БАЛЮБИ-НАЙДИША

Бездітний А.О., Найдиш А.В., Спірінцев Д.В., Пахаренко В.О.

У статті розглядається спосіб завдання еволюти кривої через параметри її евольвенти в термінах точкового числення Балюба-Найдиш (БН-численні).

Ключові слова: евольвента, еволюта, дотична, локальний симплекс, точкове числення Балюби-Найдиша (БН-числення).

DETERMINATION OF THE EVOLUTE OF A CURVE IN A POINT CALCULATION OF A BALYUBA-NAIDYSH

Bezditniy A., Naidysh A., Spirintsev D., Pakharenko V.

The method of defining the evolute of a curve through the parameters of its evolvent in terms of the Balyuba-Naidysh point calculation (BN-calculus) is considered.

Keywords: involute, evolute, tangent, local simplex, pointwise calculus Balyuba-Naidysh (BN-calculus).