УДК 514.182.7: 519.651

ВАРІАТИВНЕ ДИСКРЕТНЕ ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Найдиш А.В., д.т.н.,
Балюба І.Г., д.т.н.,
Верещага В.М. , д.т.н.,
Спірінцев Д.В., к.т.н.
Мелітопольська школа прикладної геометрії,
Мелітопольський державний педагогічний університет
імені Богдана Хмельницького (Україна)

У роботі дається загальна характеристика варіативного дискретного геометричного моделювання (ВДГМ), як окремого напрямку прикладної геометрії зі своїм теоретичним обґрунтуванням та набором практичних методів і засобів.

Ключові слова: варіативне дискретне геометричне моделювання (ВДГМ), геометричний образ (ГО), дискретна геометрична модель, дискретне геометричне моделювання (ДГМ), дискретно подана крива (ДПК), точність моделювання.

Постановка проблеми. Одним з актуальних на теперішній час видів геометричного моделювання є дискретне геометричне моделювання (ДГМ). Взагалі, можна визначити ДГМ, як напрямок моделювання, де вихідні дані і результати моделювання подані в дискретній формі. При цьому виключається стан аналітичного представлення функцій наближення, що підвищує точність та стійкість обчислювальних процесів.

Дослідження з ДГМ вчених Мелітопольської школи прикладної геометрії охоплюють значний спектр задач моделювання (інтерполяції, апроксимації, диференціювання, інтегрування та ін.), спираючись та розвиваючи власні оригінальні ідеї, що ґрунтуються і ув’язані з загальними положеннями геометричної і математичної теорії і практики моделювання. Всі ці дослідження об’єднує одна фундаментальна ідея - *варіативність*: в результаті моделювання визначається не значення параметру, а інтервал його припустимих значень, з якого і обирається це значення. Варіативність розв’язку є характерною ознакою цих досліджень на відміну від інших відомих [1,2,3] і тому цей напрямок ДГМ названо *варіативним дискретним геометричним моделюванням (ВДГМ)*.

За період з 1995 по т.ч. вчені Мелітопольської школи захистили 3 докторських (Балюба І.Г., Верещага В.М., Найдиш А.В.) та 11 кандидатських дисертацій та плідно продовжують цю роботу, результати якої висвітлені в понад 300 публікаціях у фахових виданнях, що підтверджує наукове та практичне значення цього напрямку ДГМ. Проблема полягає у визначенні та відокремленні ідей та теорії, методів та засобів, теоретичних і прикладних полів досліджень ВДГМ із загального арсеналу ДГМ. Робота у цьому напряму допоможе висвітлити зв'язки між напрямками і методами ДГМ, визначити перспективи та напрями розвитку кожного з них та напряму ДГМ в цілому.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Перші дослідження мелітопольських вчених з теорії та практики ДГМ відносяться до 80-х років 20 століття. Ідеологом та керівником цих досліджень був засновник Мелітопольської школи прикладної геометрії – Найдиш Володимир Михайлович, йому належить більшість плідних ідей, що були втілені у кандидатських та докторських дисертаціях. Починаючи з 90-х років у його публікаціях [4, 7, 9, 10] систематично та поступово викладались результати проведених досліджень з ДГМ (тоді ще не названого ВДГМ), робився порівняльний аналіз розроблених методів, аналізувались перспективи та проблеми подальшого розвитку напрямку [8]. Значна увага приділялась розробці теоретичних основ ДГМ [5], зокрема, проблемам термінології та трактування основних понять. Систематично публікувались оглядові матеріали про стан розробок та загальну структуру напрямку та його складових [7, 9, 10]. Таким чином, на теперішній час можна вважати, що наукова спільнота достатньо ознайомлена з теоретичними доробками та практичними методами напрямку ВДГМ, хоча розвиток напряму продовжується, розробляються нові методи, уточнюється понятійний апарат та термінологія.

Формування цілей статті. Метою статті є систематизація та уточнення змісту, основних положень та особливостей напряму ВДГМ.

Основна частина. ВДГМ – це окремий напрямок ДГМ, у якому результат моделювання обирається з інтервалу припустимих значень у відповідності з задачею.

Зміст ВДГМ – сукупність методів варіативного дискретного отримання розв'язку, що ґрунтуються на дискретному представленні геометричних образів і мають спільну теоретично-методологічну основу, яка включає:

– аксіоми, термінологію, визначення ВДГМ;
– припущення та обмеження ВДГМ;
– формулювання та обґрунтування основних вимог ВДГМ;
– твердження, які є доказовою базою розробки методів ВДГМ;
– питання узгодження теорії ВДГМ і теорії моделювання;
– способи дискретного представлення неперервних ГО та методів

перетворення дискретної інформації для відповідності її до вимог задач моделювання;
- визначення та обґрунтування виду та характеристик моделей ВДГМ з метою їх подальшого використання при моделюванні явищ і процесів;
- методи аналізу геометричних задач ВДГМ, а також вихідної інформації і результатів моделювання з метою установлення адекватності моделі і підвищення точності моделювання;
- загальні положення та алгоритми розв'язання певного класу задач;
- якісні характеристики задач моделювання (збіжність обчислювального процесу, оцінки похибок моделювання, тощо).

Концептуальною основою ВДГМ є варіативність розв'язку, вибір шуканого результату із множини припустимих.

Геометричною основою ВДГМ є побудова смуги припустимих значень;

Обчислювальною основою ВДГМ є розв'язання систем нерівностей.

Розглянемо *основні теоретичні положення ВДГМ*.

Об'єкт дослідження ВДГМ - це дискретно представлений ГО.

ГО – це множина точок, для якої властиві певні метричні, позиційні, дифференціально-геометричні властивості. Ця множина може бути зв'язною - неперервний ГО (крива лінія, поверхня, геометрична фігура ...) або дискретною (графік довільного дискретного процесу, наприклад, графік температур за певні часові проміжки тощо).

ГО є заданим у просторі віднесення, коли є дискретне представлення ГО (геометрична частина визначника) і алгоритм побудови з заданою точністю довільної точки ГО (алгоритмічна частина визначника).

У випадку неперервного ГО ВДГМ розглядає дискретне представленням ГО (дискретизацію) на деякій сітці, а потім для отриманої дискретної множини виконується ВДГМ. Дискретне представлення може бути у вигляді таблиці, дискретного точкового ряду (системи таких рядів для багатовимірних образів), у вигляді деякого різницевого рівняння або системи таких рівнянь. Алгоритм побудови довільної точки ГО випливає із змісту розв'язуваної задачі.

У випадку дискретного ГО проблеми завдання немає, оскільки є дискретна множина точок (таблиця або точковий ряд), який задає дискретний ГО. Завданням ВДГМ може бути перетворення вхідної множини точок у іншу, теж дискретну, на тій же сітці, за певним критерієм моделювання. І у вихідному, і у остаточному вигляді дискретний ГО є заданим.

Обов'язкова *вимога ВДГМ*: дискретна множина точок повинна бути упорядкованою.

Предмет дослідження ВДГМ - співвідношення між елементами дискретного подання ГО або його характеристиками, що визначаються вимогами задачі.

ВДГМ заданого ГО є некоректним (невизначеним) якщо не визначений клас або властивості моделюючих функцій або певний алгоритм ВДГМ. ВДГМ, на відміну від неперервного моделювання, оперує більш широкими властивостями функцій, що виходять за межі певного класу (наприклад: неосцилюючі; з заданими точками перегину; опуклі, тощо). Від цього залежить алгоритм розв'язання задачі. Звуження властивостей дискретних функцій (наприклад, до поліномів), як правило, погіршує результат моделювання, оскільки моделююча функція «нав'язує» розв'язку свої властивості, і можливо, не в кращому сенсі. Завдання алгоритму ВДГМ без орієнтації на певний клас функцій є пріоритетним в ВДГМ (алгоритми згущення, диференціювання і т. ін.).

Головна риса ВДГМ (головна перевага) - цілеспрямований вибір розв'язку із області його припустимих значень (де виконуються умови моделювання), а не його детермінований розрахунок. Ця властивість ВДГМ дає варіативність розв'язку, що дозволяє виконувати додаткові (можливо неформалізовані) умови задачі, проводити локальне моделювання та корекцію розвязку, дає можливість обійти проблему нестійкості різницевих схем. Одна головних вимог неперервного моделювання - єдиність розв'язку, але недотримання цієї умови при ВДГМ дає можливість отримати оптимальний розв'язок, що більш важливе, ніж його єдиність. Приведемо визначення двох значних складових ВДГМ, що будуються на основі цих міркувань.

Дискретне диференціювання – це обчислювальний процес цілеспрямованого вибору значень похідних (із множини припустимих) у вузлах наявної ДПК, виходячи з вимог задач моделювання.

Його відмітні особливості:

– визначення граничних значень похідної в заданому вузлі;
– вибір значення похідної всередині побудованого поля допуску з урахуванням додаткових вимог формоутворення кривої (повнота, симетрія, гладкість і т.п.).

Основні етапи його реалізації:

– визначення диференціально-геометричних характеристик ДПК (опуклість, обмеженість значень старшої похідної і т.п.);
– узгодження критерію і значень точності наближення;
– вибір способу наближення;
– розробка обчислювального алгоритму реалізації способу наближення.

Дискретне інтегрування – це обчислювальний процес визначення (вибору із множини припустимих значень) координат точок первісної ДПК за заданими початковими або граничними умовами у наявному векторному полі, кожна точка якого сформована під дією заданого або тільки представленого (у т.ч. і наявною ДПК) диференціального рівняння, а вектори поля є дотичними до первісної кривої у точках її ДПК.

Точність ВДГМ. У процесі ВДГМ вихідна дискретна інформація перетворюється на дискретну інформацію розв’язку, обминаючи етап її “аналітичної заміни”. Це значно підсилює ДГМ і підвищує його точність. Поняття „точність моделювання” певною мірою невизначене і має якісний характер, що спирається на певні узагальнення і висновки, які можна конкретизувати, якщо є аналітичний опис показника моделювання. Тому в багатьох випадках за основу міркувань береться не похибка, а її оцінка, яка може значно перевищувати величину абсолютної похибки. До визначення оцінки похибки прибігають тоді, коли істинне значення невідоме, як це найчастіше і буває, але відомі властивості модельованої функції (диференційованість, обмеженість старшої похідної тощо).

При використанні ітераційних способів наближень, оцінка похибки можлива за умови збіжності процесу моделювання. Перед тим, як проводити ітерації, необхідно визначити обмеження на параметри моделювання, при яких процес ітерацій є збіжним. Збіжність процесу ітерацій можна довести, якщо відомі геометрична або обчислювальна його схеми. Наприклад, при згущенні опуклого точкового ряду ДПК за методом тотожностей [6] з кожним кроком половинного згущення на рівномірній сітці значення другої скінченої різниці δ_i зменшується приблизно в 4 рази. Що доказує збіжність процесу. Похибка, що має порядок $O\left(h^2\right)$, теж зменшується в 4 рази. Тоді

$$\Delta_s = \left|\bar{\delta}_i - \delta_i^{(s)}\right|, \quad \Delta_{s+1} = \left|\bar{\delta}_i - \delta_i^{(s+1)}\right|, \qquad \Delta_s = 4\Delta_{s+1},$$

$$\Delta_{s+1} \le \frac{1}{3}\left|\delta_i^{(s)} - \delta_i^{(s+1)}\right| .$$

Звідси висновок: якщо в двох послідовних ітераціях у значеннях $\delta_i^{(s)}$ і $\delta_i^{(s+1)}$ однакові k знаків, то всі вони вірні [11]. Таким чином за результатами двох послідовних ітерацій визначається оцінка похибки наближення.

Досвід багаторічних науково-практичних дослідження дозволяє сформулювати *вимоги щодо методів ВДГМ:*

– локальність розрахунків і на цій основі широка корекція результату моделювання, що скорочує час і прискорює отримання бажаного розв'язку;

- запобігання осциляції як самого ГО в процесі моделювання, так і його численних характеристик, у т.ч. похідних, що є основою досягнення високої точності;
- простота обчислювальних алгоритмів, що є запорукою їх стійкості та досягнення високої точності, як за рахунок зменшення та спрощення розрахунків. так і за рахунок роботи самих алгоритмів.

Висновки. Розглянуто загальна характеристика *варіативного дискретного геометричного моделювання*, як окремого напрямку ДГМ, у якому результат моделювання обирається з інтервалу припустимих значень у відповідності з задачею. Зміст та рівень теоретичних досягнень і численність практичних методів дискретного геометричного моделювання, об'єднаних єдиною ідеєю *варіативності* розв'язку, дають значні переваги в досягненні точності та адекватності моделювання. У наступних публікаціях планується розглянути обчислювальні та прикладні особливості напряму ВДГМ.

Література

1. Ковальов С.М. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций: дис. ... докт. техн. Наук / С.М. Ковальов. – Москва, 1986.
2. Грибов С.М. Дискретна геометрія інтерактивного конструювання кінематичних поверхонь на основі скінченних сум: дис. ... докт. техн. Наук / С.М. Грибов. – Київ, 1994.
3. Пугачов Є.В. Дискретне геометричне моделювання скалярних і векторних полів стосовно будівельної світлотехніки: дис. ... докт. техн. Наук / Є.В. Пугачов. – Київ, 2001.
4. Найдыш В.М. Направления развития теории дискретного геометрического моделирования / В.М.Найдыш // Материалы Всеукраинской научно-методической конференции «Геометричне моделювання. Інженерна та комп'ютерна графіка". – Харьков,1993. – С. 7.
5. Найдыш В.М. Теоретические основы дискретного геометрического моделирования / В.М. Найдыш // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К, 1995. – Вып.58. – С.25-29.
6. Найдыш В.М. Перспективы развития геометрического моделирования / В.М.Найдыш // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К, 1996. – Вып.60. – С.15-19.
7. Найдиш В.М. Досвід та перспективи дискретного геометричного моделювання / В.М. Найдыш, А.В. Найдиш // Материалы украино-российской научно-практической конференции «Современные проблемы геометрического моделирования». Спец. вып. – Харьков,

2005. – С.40-45.
8. Найдыш В.М. Актуальные проблемы дискретного геометрического моделирования / В.М. Найдыш // Геометричне та комп'ютерне моделювання / Харківський держ. університет харч. та торгівлі. – Вип.13. – Харків, 2005. – С.7-16.
9. Найдиш В.М. Розвиток Мелітопольської наукової школи з прикладної геометрії / В.М. Найдыш //Сб. тр. VII Международной научно-практической конференции «Современные проблемы геометрического моделирования». – Мелитополь, 2003. – С.3-8.
10. Найдиш В.М. Дискретне геометричне моделювання: сутність, особливості, різновиди / В.М. Найдыш // Праці/Таврійська державна агротехнічна академія. – Вип. 24. – Мелітополь: ТДАТА, 2004. – С.100-105.
11. Волков Е.А. Численные методы / Е.А. Волков. – М.: Наука, 1987. – 248 с.

ВАРИАТИВНОЕ ДИСКРЕТНОЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Найдыш А.В., Балюба И.Г., Верещага В.М., Спиринцев Д.В.

В работе дается общая характеристика вариативного дискретного геометрического моделирования (ВДГМ), как отдельного направления прикладной геометрии со своим теоретическим обоснованием и набором практических методов и средств.

Ключевые слова: вариативное дискретное геометрическое моделирование (ВДГМ), геометрический образ (ГО), дискретная гео-метрических модель, дискретное геометрическое моделирование (ДГМ), дискретно представлена кривая (ДПК), точность моделирования.

VARIATIVE DISCRETE GEOMETRICAL MODELING

Naidysh A., Balyuba I., Vereshchaga V., Spirintsev D.

The paper gives a general description of variational discrete geometric modeling (VDGM) as a separate direction of applied geometry with its theoretical justification and a set of practical methods and tools.

Key words: variational discrete geometric modeling, geometric image, discrete geometric model, discrete geometric modeling, discrete representation of the curve (DPC), accuracy of modeling.