УДК 514.18

Д.В. СПІРІНЦЕВ, А.В. НАЙДИШ
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького

ПРЕДСТАВЛЕННЯ ПЛОСКОЇ ДИСКРЕТНОЇ КРИВОЇ

У роботі розглядається різні способи представлення дискретно представленої кривої (*ДПК*).*В якості параметрів моделювання використовуються як лінійні, так і кутові параметри. Наведено параметричне представлення дискретної кривої, а також алгоритм визначення кутових параметрів для неоднозначних ДПК.*

Ключові слова: дискретно представлена крива (*ДПК*)*, дискретний точковий ряд, супровідна ламана лінія, визначення кутових параметрів.*

Д.В. СПИРИНЦЕВ, А.В. НАЙДЫШ
Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЛОСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ КРИВОЙ

В работе рассматриваются различные способы представления дискретно представленной кривой (*ДПК*). *В качестве параметров моделирования используются как линейные, так и угловые параметры. Приведены параметрическое представление дискретной кривой, а также алгоритм определения угловых параметров для неоднозначных ДПК.*

Ключевые слова: дискретно представленная кривая (*ДПК*)*, дискретный точечный ряд, сопроводительная ломаная линия, определение угловых параметров.*

SPIRINTSEV D., NAYDYSH A.
Melitopol State Pedagogical University named after Bogdan Khmelnitsky

REPRESENTATION OF THE PLANE DISCRETE CURVE

Different methods of representing a discretely presented curve (*DPC*) *are considered in this paper. As modeling parameters, both linear and angular parameters are used. The parametric representation of the discrete curve is presented, as well as the algorithm for determining the angular parameters for ambiguous DPC.*

Keywords: discretely presented curve (*DPC*)*, discrete point series, accompanying broken line, determination of angular parameters.*

Постановка проблеми

При моделюванні процесів і явищ використовують експериментальні дані, які, як правило, мають дискретний характер. Тим самим замість деякої неперервної кривої *m*, що відображає неперервну зміну процесу, маємо її дискретний аналог, тобто *дискретно представлену криву* (ДПК). Геометричною основою ДПК є *дискретний точковий ряд* (ДТР), а сама ДПК це ДТР та алгоритм побудови довільних проміжних точок між вузлами відомого ДТР з метою як можна точнішого представлення шуканої неперервної кривої [1]. Данні алгоритми складають основу дискретної інтерполяції, одним з напрямків якої є варіативне дискретне геометричне моделювання (ВДГМ), завданням якого є встановлення взаємозв'язків між різними характеристиками і параметрами модельованого явища шляхом дослідження адекватних геометричних схем і розробки відповідних розрахункових алгоритмів. Однак, перш ніж розробляти адекватні геометричні схеми та розробляти відповідні розрахункові алгоритми, необхідно обрати відповідний спосіб дискретного подання вихідної дискретно представленої кривої, оскільки подальші дослідження та точність отриманих результатів напряму будуть залежати від цього.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В результаті експериментальних досліджень або деяких теоретичних розрахунків отримуємо ДТР. Головним допущенням ДГМ є безпомилковість цих даних. За цих умов характер кривої буде тим краще відслідкований, чим щільнішим буде точковий ряд та чим відповіднішим алгоритму ДГМ буде обрано спосіб представлення ДПК. В Мелітополі, починаючи з 80-х років XX століття в рамках Мелітопольської школи прикладної геометрії було сформувався новий напрямок – дискретне геометричне моделювання (ДГМ), який пізніше було трансформовано в ВДГМ. Актуальність цього обумовлена наявністю певного класу задач, для розв'язання яких не пристосовані відомі неперервні методи традиційного моделювання, але вони успішно розв'язуються методами ВДГМ [1]. У публікаціях [1-4, 6] були висвітлені основні поняття, властивості, геометричні аспекти та загальні напрямки розвитку ВДГМ, однак, проведені у цих роботах дослідження ще мають перспективи подальшого розвитку та потребують систематизації.

Мета дослідження

Розглянути основні способи представлення ДПК та основі лінійних та кутових параметрів як для однозначних так і неоднозначних кривих.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо довільний точковий ряд (рис. 1), точки якого для наочності з'єднані ланками *супровідної ламаної лінії* (СЛЛ) [1]. Її розглядають як досить грубе кусково-лінійне наближення кривої *m*, похибка *Δ* якого оцінюється як максимальне відхилення уздовж осі *Oy* точок кривої *m* від відповідних ланок СЛЛ, та дозволяє оцінити точність методу моделювання, що використовується.

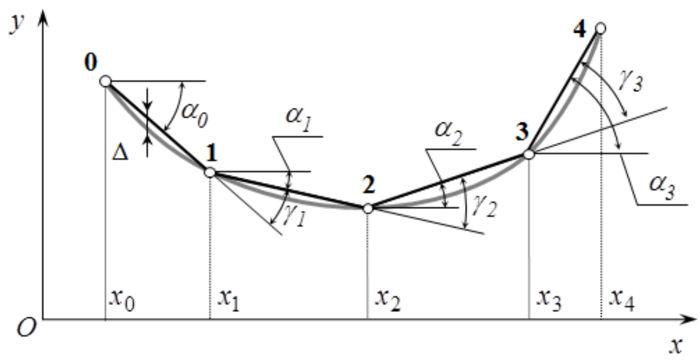


Рис. 1. ДПК з показаними кутовими параметрами.

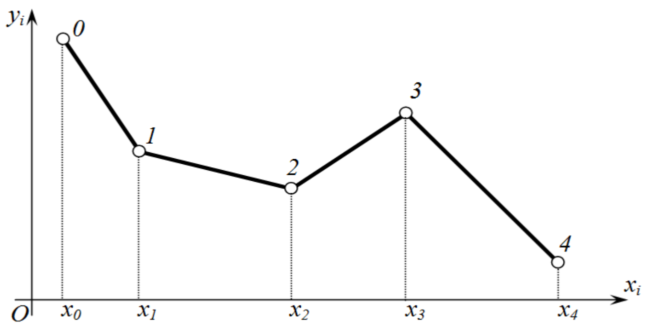
Характеристики довільного ДТР можна поділити на лінійні та кутові. До *лінійних* характеристик в загальному випадку можна віднести координати вихідних точок $-(x_i, y_i), i=\overline{0;n}$, довжини ланок СЛЛ – $l_i, i=\overline{0;n}$, та перевищенням ординат сусідніх точок – $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, i=\overline{0;n-1}$, а у випадку рівномірного їх розташування, ще й крок сітки $h = x_i - x_{i-1} = const, i=\overline{1;n}$. До *кутових* характеристик відносять кути нахилу ланок до осі Ox – α_i, $i=\overline{0{,}3}$ і кути суміжності ланок – γ_i, $i=\overline{1{,}3}$ (рис. 1). Кутові параметри в процесі дискретного геометричного моделювання останнім часом займають все більш лідируючі позиції завдяки притаманним їм наступним властивостям:

- кутові параметри графічної моделі не залежать від масштабу зображення;
- конфігурація і положення ДПК відносно системи координат, зокрема, многозначність її відносно осі *Ox*, не впливає на процес моделювання;
- можливість отримання в багатьох випадках більш простих моделей;
- можливість підвищення точності моделювання і таке інше.

Однак, при цьому це варто зменшувати можливості дискретного геометричного моделювання на основі лінійних параметрів, оскільки в деяких випадках доцільніше використовувати саме їх (різницеві рівняння [1]).

Основним способом завдання дискретної кривої на площині є завдання її точкового ряду значеннями координат її вузлів. Таке завдання аналогічне табличному завданню деякої функції та відповідає природній методиці побудови точок. Крім того даний спосіб завдання дозволяє визначити всі лінійні та кутові параметри вихідної ДПК. На рис. 2 наведено приклад дискретної кривої, заданої даним способом, на якому, для наочності вузли з'єднанні СЛЛ та зображено лише перші 4 точки.

Однак це не єдиний спосіб завдання дискретної кривої. Одними із поширених способів завдання ДПК є: завдання перевищеннями ординат сусідніх точок – $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, i=\overline{0;n-1}$ (рис. 3), та у вигляді кутів α_i нахилу ланок СЛЛ до осі *Ox* (рис. 4). Вочевидь, що для однозначного завдання ДПК за заданими графіками Δy_i (рис. 3) та α_i (рис. 4) треба задати початкову точку (x_0,y_0), *n*ри цьому вважаємо відомими значення абсцис ДТР.



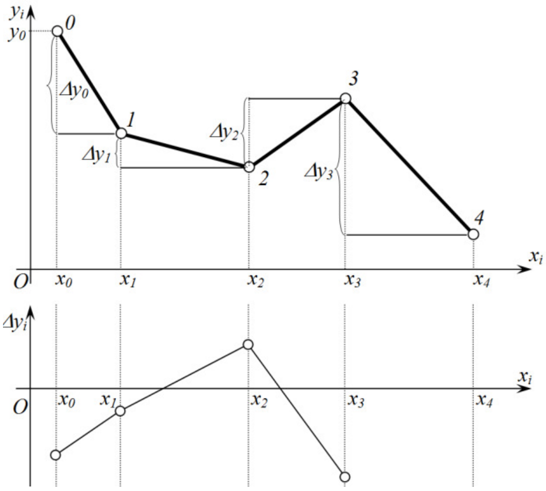
Вхідні данні:

$(x_i, y_i), i=\overline{0;n}$

i	0	1	2	3	...	n
x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Рис. 2. Завдання ДПК значеннями координат вузлів.

Якщо взяти за основу значення кутів суміжності γ_i сусідніх ланок СЛЛ [1]: $\gamma_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}, i = \overline{1; n-1}$, то можна запропонувати ще один спосіб завдання ДПК. При цьому, для однозначного її завдання необхідно завдання двох його сусідніх точок, наприклад *(x_0, y_0)* та *(x_1, y_1)*. Приклад запропонованого способу наведено на рис. 5.

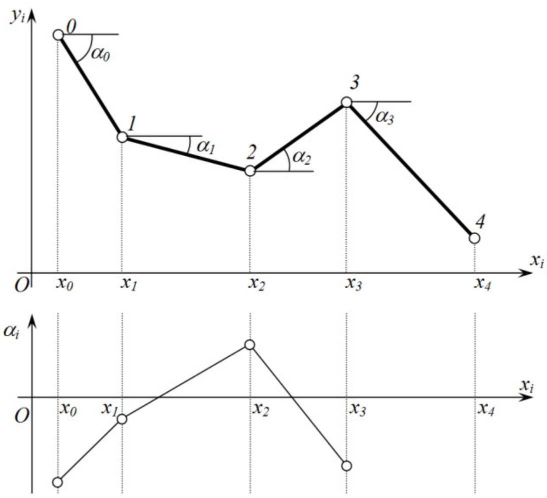


Вхідні данні:

$(x_0, y_0), \{x_i, \Delta y_i\}, i = \overline{0; n-1}$

i	0	1	2	...	$n-1$
x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_{n-1}
Δy_i	Δy_0	Δy_1	Δy_2	...	Δy_{n-1}

Рис.3. Завдання ДПК перевищеннями ординат сусідніх точок.

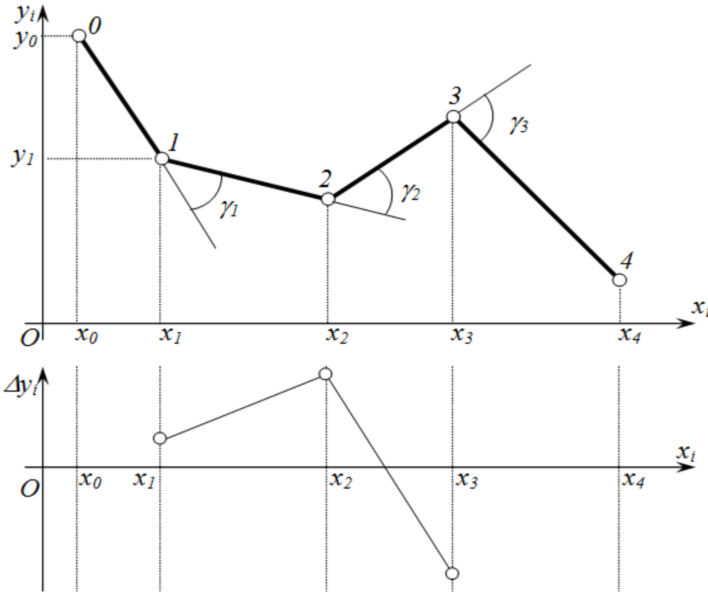


Вхідні данні:

$(x_0, y_0), \{x_i, \alpha_i\}, i = \overline{0; n-1}$

i	0	1	2	...	$n-1$
x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_{n-1}
α_i	α_0	α_1	α_2	...	α_{n-1}

Рис.4. Завдання ДПК кутами нахилу ланок СЛЛ до осі *Ox*.



Вихідні данні:

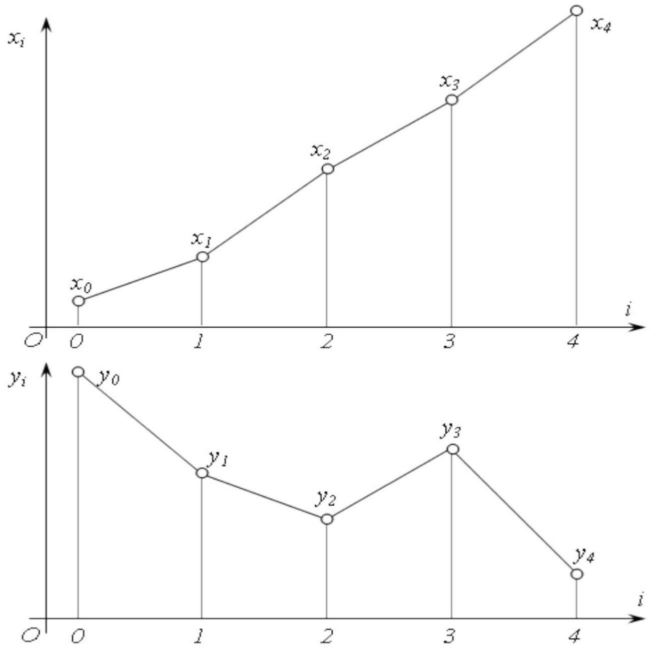
$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \quad \gamma_i, i = \overline{1; n-1}$

i	1	2	3	...	$n-1$
γ_i	γ_0	γ_1	γ_2	...	γ_{n-1}

Рис. 5. Завдання ДПК кутами суміжності.

Крім зазначених способів, також можна завдавати ДПК за допомогою значень довжин ланок СЛЛ. При цьому в якості другого параметра може виступати як перевищення ординат сусідніх точок (Δy_i), кути нахилу ланок СЛЛ до осі Ox (α_i), так і кути суміжності (γ_i). Крім того, для побудови означеним способом ДПК необхідно ще задати початкову точку (x_0, y_0).

Означені способи є досить дієвими при завданні однозначних ДПК. Для багатозначних ДПК вони також придатні, однак, при цьому необхідно або використовувати інші формули визначення характеристик ДТР (див. нижче), або представляти багатозначну ДПК двома однозначними параметричними рядами ($x=f(i)$ та $y=f(i)$) на цілочисловій рівномірній сітці, де в якості параметра виступає номер точки i. На рис. 6 наведено приклад параметрично представленої кривої, яка зображена на рис. 2.



Вихідні данні:

$$x(i), y(i), \quad i = \overline{0;n}$$

i	0	1	2	3	...	n
x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Рис. 6. Параметричне завдання ДПК.

За характером зміни рядів $x(i)$, $y(i)$, $i = \overline{0;n}$ можна судити про опорні точки дискретної кривої. Параметричне представлення кривої дозволяє спростити процес моделювання неоднозначних ДПК як за рахунок рівномірної сітки, так і за рахунок застосування методів моделювання однозначних ДПК. Головною перешкодою при моделюванні багатозначних ДПК є наявність вертикальних дотичних, яким відповідають точки екстремуму графіка $x(i)$. При моделюванні на нерівномірній сітці, у порівнянні з рівномірною, виникають деякі обчислювальні труднощі [1]. Одним із можливих рішень даної задачі є точне аналітичне визначення характеристик ДТР. Розглянемо це питання детальніше.

Як вже було сказано раніше, до *кутових* характеристик відносять кути нахилу ланок до осі Ox – α_i і кути суміжності ланок СЛЛ – γ_i (рис. 1).

Питанням визначення кутових характеристик займалось багато вчених, в тому числі вчені Мелітопольської школи прикладної геометрії [1–4, 6]. Можна кути α_i нахилу ланок супровідної ломаної лінії (СЛЛ) ДПК до осі Ox визначати за вже відомою формулою:

$$\alpha_i = \arcsin \frac{y_{i+1} - y_i}{l_i} = \arcsin \frac{\Delta y_{i+1}}{l_i}. \tag{1}$$

де $l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$ – довжина ланки $(i, i+1)$ СЛЛ, а значення кута суміжності за формулою:

$$\gamma_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}, \ i = \overline{1, n-1}. \tag{2}$$

Запропонована схема є простою та зручною у використанні при визначенні кутів α_i нахилу СЛЛ для однозначних відносно осі Ox ДПК.

Також для визначення кутів α_i, $i = \overline{1, n-1}$ можна використовувати більш складну схему (рис. 7), на якій зображені кути нахилів ланок віднесені до початку координат (т. O)[4]. Використовуючи дану схему кути α_i можна визначити наступним чином:

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha_k = \overline{\alpha} \quad при \quad \Delta x, \Delta y > 0, \\ \alpha_m = \overline{\alpha} \quad при \quad \Delta x > 0, \Delta y < 0, \\ \alpha_p = -90^0 + \overline{\alpha} \quad при \quad \Delta x < 0, \Delta y < 0, \\ \alpha_q = -180^0 + \overline{\alpha} \quad при \quad \Delta x < 0, \Delta y > 0, \end{cases} \tag{3}$$

де $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y = y_{i+1} - y_i$, а значення кутів $\overline{\alpha}$ визначаються за формулою (1).

Наведена схема визначення кутів нахилу α_i ланок СЛЛ ДПК до осі Ox є більш вдосконаленою у порівнянні з (1), але має певні межі застосування (для неоднозначних кривих у випадках коли значення кутів нахилу α_i по модулю не перевищують 270°). Покажемо це на прикладі дискретно представленого точкового ряду, який зображено на рис. 8. Кутовими характеристиками даного ряду є кути нахилу ланок до осі Ox (α_i, $i = \overline{0,6}$) та кути суміжності ланок (γ_i, $i = \overline{0,6}$). Якщо послідовно визначати значення кутів α_i, $i = \overline{0,6}$ згідно зі схемою (3), то для ділянок 0–1, 1–2, 2–3, 3–4, 4–5 ніяких особливостей не буде спостерігатись. Однак, якщо продовжити розрахунки α_i за формулою (3) для ділянок кривої 5–6 та *6–7*, то замість значень кутів нахилу ланок α_5 і α_6 отримаємо значення кутів α_5^* і α_6^* які не є кутами нахилу даних ланок. Отже, використовувати формули (3) для розрахунку кутів нахилу кривих, які мають складну форму, не завжди є можливим.

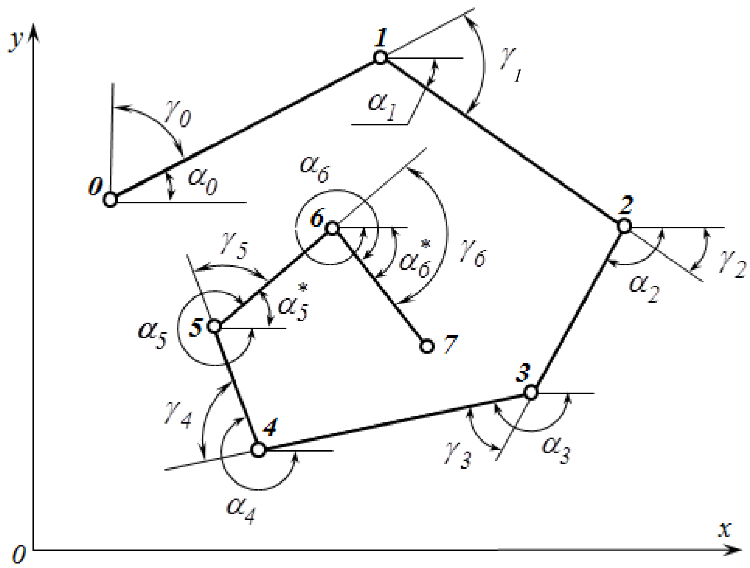


Рис. 8. Кутові параметри СЛЛ ДПК.

Тому запропонуємо наступний спосіб визначення кутових характеристик вихідного точкового ряду. Як відомо [5], кут θ (рис.9,*а*), між прямими $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ і $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$, визначається за формулою:

$$\cos\theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{\left(a_1^2 + b_1^2\right)\cdot\left(a_2^2 + b_2^2\right)}}. \tag{6}$$

Проведемо через три послідовні точки ряду $i-1, i, i+1$ дві умовні прямі *1* і *2* (рис. 9, *б)*. Тоді за формулою (6) також можна визначити кут θ між ними, чисельне значення якого відповідає куту суміжності γ_i в i-ої точці. Так само можна визначати значення кутів суміжності для будь-якої точки $i = \overline{1, n-1}$ заданого ДТР. Тому, при розгляді геометричних характеристик вихідного точкового ряду значення кутів суміжності будемо визначати за формулою:

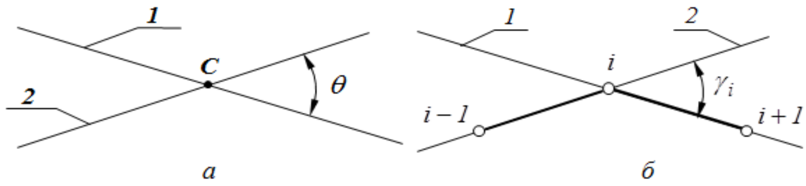


Рис. 9. До визначення кута суміжності ланок СЛЛ ДПК.

$$\gamma_i = \pm\arccos\left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{\left(a_1^2 + b_1^2\right)\cdot\left(a_2^2 + b_2^2\right)}}\right), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{7}$$

де a_1, a_2, b_1, b_2 – коефіцієнти рівнянь прямих, що проходять через розглянуті точки ряду;

$$\begin{matrix} a_1 = y_i - y_{i-1} \\ b_1 = x_{i-1} - x_i \end{matrix}, \quad \begin{matrix} a_2 = y_{i+1} - y_i \\ b_2 = x_i - x_{i+1} \end{matrix}, \tag{8}$$

тут x_{i-1}, y_{i-1}, x_i, y_i і x_{i+1}, y_{i+1} – координати точок $i-1$, i, $i+1$ вихідного точкового ряду.

Визначивши за формулою (9), яка є узагальненням схеми (3), значення кута нахилу першої ланки α_0, і обчисливши значення кутів суміжності γ_i, $i = \overline{1, n-1}$ за формулою (7), в залежності від геометричних характеристик кривої, можна, використовуючи формулу (2), визначити значення інших кутів нахилу ланок α_i, $i = \overline{1, n-1}$ для будь-якого вихідного точкового ряду:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \arcsin \dfrac{y_1 - y_0}{l_0}, \quad \text{якщо} \quad \Delta x_1 = [x_1 - x_0] > 0, \\ \alpha_0 = -180^0 - \arcsin \dfrac{y_1 - y_0}{l_0}, \quad \text{якщо} \quad \Delta x_1 = [x_1 - x_0] < 0. \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \gamma_1 + \alpha_0 \\ &\alpha_2 = \gamma_2 + \alpha_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_{n-1} = \gamma_{n-1} + \alpha_{n-2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким чином, використовуючи формули (7)–(10), можна отримувати значення кутових геометричних характеристик вихідного ДТР, заданого сукупністю точок $(x_i, y_i), i = \overline{0; n}$ в декартовій системі координат.

Отримані формули дозволять задавати ДПК не тільки однозначних, а й неоднозначних ДПК довільної форми, та при цьому не буде необхідності в візуальній корекції кутових характеристик кривої для неоднозначних кривих.

Висновки

В роботі розглянуто основні способи представлення ДПК на основі лінійних та кутових параметрів, які можуть використовуватись як для однозначних так і для неоднозначних кривих. Було запропоновано ефективний спосіб представлення ДПК довільної конфігурації на основі кутових параметрів, необхідних для завдання ДПК. Правильно обраний спосіб представлення ДПК дозволить підвищити точність та спростити процес побудови довільних проміжних точок між вузлами відомого ДТР з метою як можна точнішого представлення шуканої неперервної кривої.

Список використаної літератури

1. Найдиш В.М. Основи прикладної дискретної геометрії / В.М. Найдиш, В.М. Верещага, А.В. Найдиш, В.М. Малкіна. – Мелітополь: ТДАТУ, 2007. – 194 с.
2. Верещага В.М. Дискретно-параметричний метод геометричного моделювання кривих ліній і поверхонь: дис. ... доктора техн. наук: 05.01.01 / Верещага Віктор Михайлович. – Мелітополь, 1996. – 320 с.
3. Щербина В.М. Геометричне моделювання спіралеподібних дискретно представлених кривих ліній: дис. … канддата. техн. наук: 05.01.01 / Щербина Віктор Михайлович.– Мелітополь, 2003. – 192 с.
4. Лебедєв В.О. Дискретна інтерполяція дискретно представлених кривих ліній на основі кутів згущення. автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 / В.О. Лебедєв. – Мелітополь, 2004. – 22 с.
5. Фокс А. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве: Пер. с англ. / А. Фокс, М. Пратт – М.: Мир, 1982. – 304 с.
6. Найдиш В.М. Варіативна схема згущення ДПК на основі кутових параметрів з використанням додаткових умов. / В.М. Найдиш, Д.В. Спірінцев // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Вип. 35.– Мелітополь: ТДАТА, 2007. – С.3-9.