УДК 514.18

ТАНГЕНЦИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ КРИВОЙ НА СТОРОНЫ СИМПЛЕКСА

Найдыш А.В. д.т.н.,
Бездитный А.А., к.т.н.,
Мелитопольская школа прикладной геометрии,
Мелитопольский педагогический университет им. Б. Хмельницкого (Украина)

В статье рассматривается способ определения кривой множеством её касательных.

Ключевые слова: тангенциальное отображение, касательная, локальный симплекс, производная кривой.

Постановка проблемы. На пути исследования свойств и способов построения сопровождающих кривых, мы столкнулись с задачей реализации различных способов задания плоских и пространственных кривых линий. Одними из первых рассматриваемых задач стали: задание кривой её тангенциальными отображениями на стороны симплекса и множеством касательных. Первая задача была решена в терминах точечного исчисления - было получено уравнение кривой, заданной её тангенциальными отображениями [1].

Анализ последних исследований и публикаций. В работе [1] рассматривался способ задания кривой при помощи её тангенциальных отображений на стороны симплекса, а работа [2] содержит опорные сведения о производной кривой и способах её задания и построения. Таким образом, располагая уравнениями из этих двух источников, мы можем перейти к определению кривой множеством её касательных.

Формулирование целей статьи. Задать кривую множеством её касательных, а также из полученного уравнения – вернуться к классическому уравнению кривой в точечном представлении.

Основная часть. Пусть в симплексе CAB задана кривая (рис.1):

$$M = (A - C)p + (B - C)q + \mathrm{C}. \qquad (1)$$

Тогда касательную к кривой M, в ее текущей точке, можно определить уравнением:

$$N = (A - C)(p + \dot{p}) + (B - C)(q + \dot{q}) + \mathrm{C}. \qquad (2)$$

Касательная пересекает стороны AC и CB в точках P и Q:

$$P = (A - C)\bar{u} + C;\ Q = (B - C)v + C. \qquad (3)$$

Определим параметры u и v. Так как точки P, Q, N принадлежат одной прямой, то определитель, составленный из коэффициентов при координатах точек симплекса из (2) и (3), будет равен 0:

$$\begin{vmatrix} \bar{u} & 0 & 1 \\ p & q & 1 \\ p+\dot{p} & q+\dot{q} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{u} & 0 & 1 \\ p & q & 1 \\ \dot{p} & \dot{q} & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \bar{u} = \frac{p\dot{q}-q\dot{p}}{\dot{q}};$$

$$\begin{vmatrix} 0 & v & 1 \\ p & q & 1 \\ \dot{p} & \dot{q} & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow v = -\frac{p\dot{q}-q\dot{p}}{\dot{p}}. \qquad (4)$$

Таким образом, мы доказали, что кривая (1), заданная в симплексе CAB, имеет тангенциальное отображение:

$P = (A - C)\left(p - \dot{p}\frac{q}{\dot{q}}\right) + C$ – на стороне AC и

$Q = (B - C)\left(q - \dot{q}\frac{p}{\dot{p}}\right) + C$ – на стороне CB.

Теперь рассмотрим обратную задачу: зададим в симплексе CAB следующие соотношения:

$$\bar{u} = \frac{CP}{CA} = p - \dot{p}\frac{q}{\dot{q}};$$
$$v = \frac{BQ}{BC} = q - \dot{q}\frac{p}{\dot{p}}. \qquad (5)$$

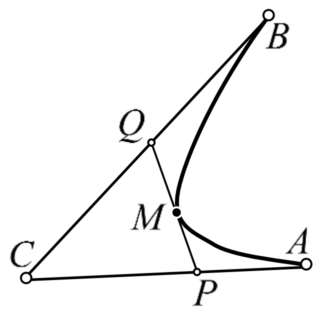

Рис. 1. Касательная к кривой

Принимая P и Q в качестве тангенциальных отображений некоторой кривой, определим уравнение этой кривой:

$$P = (A - C)\frac{f}{\dot{q}} + C, Q = -(B - C)\frac{f}{\dot{p}} + C, \text{где } f = p\dot{q} - q\dot{p}. \qquad (6)$$

Определим отношение $w = \frac{PM}{PQ}$ для определения кривой M. Из [1] известно, что при заданных тангенциальных отображениях P, Q, w выражается соотношением:

$$w = \frac{\dot{u}v}{\dot{u}v + \bar{u}\dot{v}} \quad . \qquad (7)$$

Из (6) определим функции параметров и их производные:

$$\bar{u} = \frac{f}{\dot{q}}; \dot{u} = -\frac{\dot{f}\dot{q} - f\ddot{q}}{\dot{q}^2}; v = -\frac{f}{\dot{p}}; \dot{v} = -\frac{\dot{f}\dot{p} - f\ddot{p}}{\dot{p}^2}. \qquad (8)$$

Подставим (8) в (7) и преобразуем:

$$w = \frac{-\frac{\dot{f}\dot{q} - f\ddot{q}}{\dot{q}^2} \cdot (-\frac{f}{\dot{p}})}{-\frac{\dot{f}\dot{q} - f\ddot{q}}{\dot{q}^2} \cdot (-\frac{f}{\dot{p}}) - \frac{\dot{f}\dot{p} - f\ddot{p}}{\dot{p}^2} \cdot \frac{f}{\dot{q}}} = -\frac{q\dot{p}}{f} = -\frac{q\dot{p}}{p\dot{q} - q\dot{p}}. \qquad (9)$$

Учитывая, что $M = (Q - P)w + P$, после подстановки значений Q, P, w, из (6) и (9) получим:.

$$\begin{aligned} M = &\left(-(B-C)\frac{p\dot{q} - q\dot{p}f}{\dot{p}} + C - (A-C)\frac{p\dot{q} - q\dot{p}}{\dot{q}} - C\right) \times \\ &\times \left(-\frac{q\dot{p}}{p\dot{q} - q\dot{p}}\right) + (A-C)\frac{p\dot{q} - q\dot{p}}{\dot{q}} + C = \\ &= (A-C)p + (B-C)q + C. \end{aligned} \tag{10}$$

Выводы. Таким образом, мы доказали, что тангенциальные отображения (6) однозначно определяют кривую (1). Справедливо прямое и обратное утверждение, что позволяет говорить о том, что получен способ задания одной и той же кривой множеством точек M и множеством касательных PQ. В дальнейшем планируется рассмотреть тангенциальные отображения для частных случаев отдельных кривых, а также перейти к отображениям на грани пространственного симплекса.

Литература

1. Найдыш А.В. Задание кривой её тангенциальными отображениями на стороны симплекса / А.В. Найдыш, А.А. Бездитный // Современные проблемы моделирования: сборник научных трудов / МГПУ им. Б. Хмельницкого. – Мелитополь: Издательство МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2016. – Вып. 5. – с. 84-87.
2. Балюба І.Г. Похідна кривої та прямокутна сітка на поверхні / І.Г. Балюба, І.П. Давиденко // Праці Таврійської державної агротехнологічної академії. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. – Вип.4: Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т19. – с.45-48.

ТАНГЕНЦІАЛЬНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ КРИВОЇ НА СТОРОНИ СИМПЛЕКСА

Найдиш А.В., Бездітний А.О.

У статті розглядається спосіб визначення плоскої кривої її тангенціальними відображеннями.

Ключові слова: тангенціальне відображення, дотична, локальний симплекс, похідна кривої.

TANGENTIAL DISPLAY OF THE CURVE TO THE SIMPLEX

Naydysh A., Bezditniy A.

This article considers the method of determining a curve by the set of its tangents.

Keywords: tangential mapping, tangent, local simplex, derivative of the curve.