

УДК 514.18

В.В. СПІРІНЦЕВ<sup>1</sup>, О.В. СПІРІНЦЕВА<sup>2</sup>, В.О. ЛЕБЕДЕВ<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Таврійський державний агротехнологічний університет

<sup>2</sup> Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

<sup>3</sup> Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького

## ДИСКРЕТНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПРЯМОЛІНІЙНИХ ДІЛЯНОК ДПК НА ОСНОВІ АДАПТИВНОГО СПОСОБУ

*В роботі пропонується розв'язання задачі дискретної інтерполяції ДПК, що має прямолінійні ділянки, на основі запропонованого раніше адаптивного способу при різних варіантах завдання вихідних умов. При цьому зберігається прямолінійність ділянок вихідної ДПК.*

*Ключові слова: дискретно представлена крива, прямолінійна ділянка, адаптивний спосіб*

V.V.SPIRINTSEV<sup>1</sup>, O.V.SPIRINTSEVA<sup>2</sup>, V.O. LEBEDEV<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Tavia State Agrotechnological University

<sup>2</sup> Dnepropetrovsk National University named after Oles Honchar

<sup>3</sup> Melitopol State Pedagogical University named after Bogdan Khmeltsky

## DISCRETE INTERPOLATION OF DSC RECTILINEAR SITES BY ADAPTIVE WAY

### Annotation

*Discrete interpolation (condensation) flat discretely presented curve (DSC) of any configuration including ambiguous in relation to axis  $Ox$ , can be most effectively carried out on the basis of angular parameters. The methods developed in this direction are focused on a local condensation of each link of an accompanying broken line (ABL) of DSC with the coordination of the specified parameters values in knots of DSC. Thus, there is a necessity for such methods of interpolation development which would allow to solve effectively the task of rectilinear sites of DSC condensation.*

*While practical modeling we often meet initial data presented like dot numbers with rectilinear sites which during interpolating should remain rectilinear, i.e. condensation points should lay on one straight line. Application of continuous interpolation methods does not allow to solve such task as thus it is impossible to avoid to oscillation and also sharp falling of accuracy is observed. In work the decision of discrete interpolation of DSC task which has rectilinear sites is given on the basis of adaptive way offered before at various variants of initial conditions.*

*Condensation of DSC with rectilinear sites includes two stages: convex sites condensation with maintenance of the set order of their approach to a rectilinear site and a consecutive condensation of rectilinear site links. The offered algorithms effectively carry out the specified calculations and constructions.*

*Keywords: discretely presented curve, a rectilinear site, adaptive way.*

**Постановка проблеми.** Дискретна інтерполяція (згущення) плоских дискретно представлених кривих (ДПК) довільної конфігурації, в тому числі і неоднозначних по відношенню до осі  $Ox$ , найбільш ефективно може бути здійснена на основі куткових параметрів. Розроблені в цьому напрямку методи орієнтовані на локальне згущення кожної з ланок супроводжуючої ламаної лінії (СЛЛ) ДПК з погодженням значень вказаних параметрів у вузлах ДПК.

При практичному моделюванні інколи трапляються вихідні дані у вигляді точкових рядів з прямолінійними ділянками. Особливість процесу інтерполяції вказаних ділянок полягає в тому, що при згущенні дані ділянки повинні залишатися прямолінійними (точки згущення повинні розташовуватися на одній прямій). Застосування неперервних методів інтерполяції не дозволяє ефективно розв'язувати поставлене завдання. Це пов'язано з тим, що дані методи не в змозі забезпечити відсутність осциляції, у зв'язку з чим неможливо гарантувати забезпечення необхідної точності моделювання. Таким чином виникає необхідність в розробці таких методів інтерполяції, що дозволили би ефективно розв'язати поставлене завдання згущення прямолінійних ділянок ДПК.

**Аналіз останніх досліджень.** Вперше на необхідність розв'язку даного питання звернув увагу Верещага В.М. [1]. В подальших дослідженнях, проведених Щербіною В.М. [2], Лебедєвим В.О. [3], Сосновських Д.О. [4], Спірінцевим Д.В. [5], Спірінцевим В.В. [6] було досить ефективно розв'язано задачу дискретної інтерполяції прямолінійних ділянок ДПК, з урахуванням розроблених авторами методів. В даній роботі пропонуємо застосувати запропонований нами в роботі [7] адаптивний спосіб для здійснення завдання дискретної інтерполяції ДПК, що має прямолінійні ділянки.

**Формулювання цілей статті.** Метою статті є висвітлення результатів дослідження застосування адаптивного способу дискретної інтерполяції для розв'язання поставленої задачі.

**Основна частина.** При практичному моделюванні нерідкі ситуації, коли вихідна ДПК має прямолінійні ділянки. Однак, не завжди вихідні дані вмщують інформацію щодо прямолінійності тієї чи

іншої ділянки ДПК. Тому доцільним було розглянути два варіанти завдання: прямолінійність ділянки визначена у вихідних даних; вихідні дані не визначають прямолінійність ділянки.

**Розглянемо розв'язання першого варіанту завдання** (прямолінійність ділянки визначена у вихідних даних).

Розглянемо фрагмент ДПК, заданої координатами  $(x_i, y_i), i = \overline{0; n}$ , своїх точок у глобальній системі координат (рис.1). Цей фрагмент складається з двох опуклих ділянок  $(i-1, i), (i+3, i+4)$  і прямолінійної  $(i, \dots, i+3)$ . На прямолінійній ділянці розташовані вузли  $i+1$  та  $i+2$ , які розбивають її на три ланки  $(i, i+1), (i+1, i+2), (i+2, i+3)$ . Кути суміжності в загальних вузлах  $i+1$  і  $i+2$  для даних ланок дорівнюють нулю ( $\gamma_{i+1}^0 = 0, \gamma_{i+2}^0 = 0$ ). У вузлах  $i$  і  $i+3$  здійснюється стикування опуклих ділянок  $(i-1, i)$  і  $(i+3, i+4)$  із прямолінійною  $(i, \dots, i+3)$ .

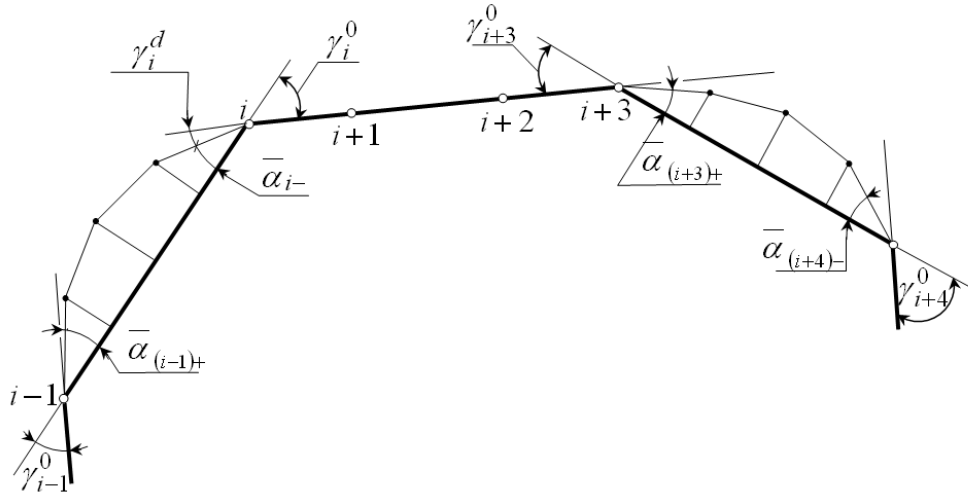


Рис. 1. Схема згущення ДПК, що має прямолінійну ділянку

Для розв'язання поставленого завдання необхідно:

1) забезпечити стикування опуклих ділянок  $(i-1, i)$  і  $(i+3, i+4)$  з прямолінійною  $(i, \dots, i+3)$  при заданому порядку наближення, що дозволить зробити регульовану амплітуду стрибкоподібної зміни кривини в точці стику;

2) здійснити локальне згущення ланок  $(i, i+1), (i+1, i+2), (i+2, i+3)$ , що лежать на прямолінійній ділянці  $(i, \dots, i+3)$  використовуючи алгоритм розробленого нами адаптивного способу. Причому, точки згущення повинні розташовуватися на прямолінійній ділянці в межах зазначених ланок.

Розглянемо локальне згущення ланки  $(i-1, i)$  ДПК (рис.2) згідно з основним алгоритмом адаптивного способу [7]. Розіб'ємо ланку  $(i-1, i)$ , довжина якої  $l$ , на  $n$  рівних частин (в нашому випадку  $n=4$ ), що утворюють рівномірну сітку з кроком  $h$ , і на цій сітці побудуємо точки згущення. Розв'язання поставленої задачі пропонується здійснити наступним чином:

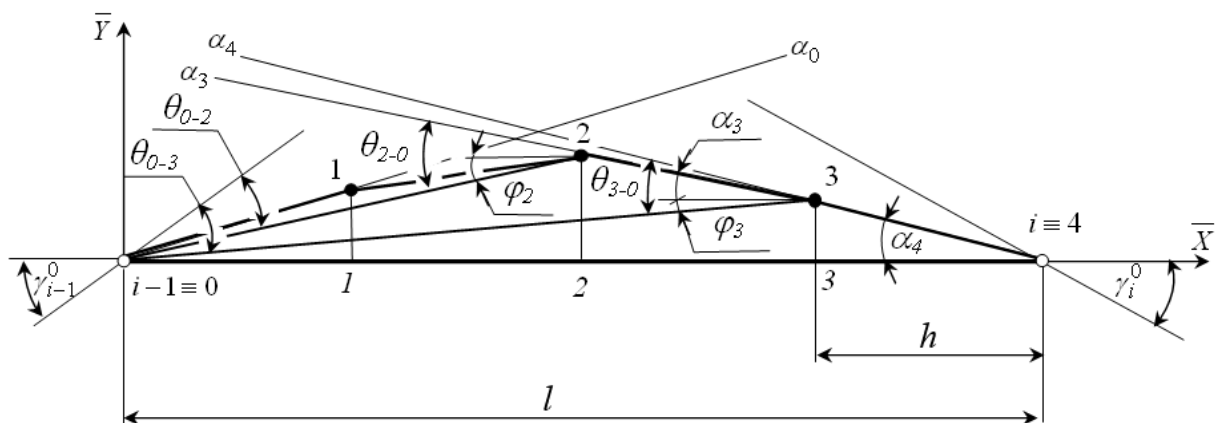


Рис. 2. Локальне згущення ланки ДПК на основі адаптивного способу

1) Порівнюємо кути суміжності  $\gamma_{i-1}^0$  і  $\gamma_i^0$  (рис.2) у вузлах  $i-1$  і  $i$ , відповідно. Виявляємо менший з них. З боку меншого кута, згідно з рис.2  $-\gamma_i^0$ , проводимо промінь  $\alpha_4$  під кутом  $\alpha_4 = \arctg(p_4 \cdot \tg \gamma_i^0)$  до вихідної ланки  $(i-1, i)$ , де  $p_d = 1 - (1 - \mu)^{\ln d / \ln 2}$  – деякий коефіцієнт керування згущеної СЛЛ ДПК, що залежить від числа розподілів ланки  $d$  при згущенні (на першому кроці  $d=n$ , в нашому випадку  $d=4$ ; на наступному кроці  $d=n-1$  і т.д.) та коефіцієнту згущення  $\mu=0,25$  [3]. В результаті перетину даного променя  $\alpha_4$  з лінією зв'язку  $\bar{x}=3$  одержуємо точку згущення т.3, ордината якої:  $\bar{y}_3 = \bar{h} \cdot \tg \alpha_4$ . Далі з'єднуємо отриману точку згущення т.3 з вузловою т.0 хордою 0-3, що

утворює з вихідною ланкою  $(i-1, i)$  кут  $\varphi_3$ :  $\varphi_3 = \arctg\left(\frac{\bar{y}_3}{l-\bar{h}}\right)$ ;

2) Порівнюємо отримані кути  $\theta_{3-0}$  і  $\theta_{0-3}$ , де  $\theta_{3-0}$  – кут, що утворює хорда 0-3 і промінь  $\alpha_4$ :  $\theta_{3-0} = \alpha_4 + \varphi_3$ ;  $\theta_{0-3}$  – кут, що утворює хорда 0-3 і попередня ланка  $(i-2, i-1)$ ,  $\theta_{0-3} = \gamma_{i-1}^0 - \varphi_3$ . В результаті порівняння даних кутів  $\theta_{3-0}$  і  $\theta_{0-3}$  виявляємо менший з них. В нашому випадку, згідно з рис.2  $\theta_{3-0} < \theta_{0-3}$ . Продовжуємо згущати з боку меншого кута  $\theta_{3-0}$  згідно з пунктом 1): проводимо промінь  $\alpha_3$  з отриманої раніше точки згущення т.3 під кутом  $\alpha_3 = \arctg(p_3 \cdot \tg \alpha_{i+1})$  до вихідної ланки  $(i, i+1)$ , де  $p_3$  – деякий коефіцієнт керування при  $d=3$ . В результаті перетину даного променя  $\alpha_3$  з лінією зв'язку  $\bar{x}=2$  одержуємо точку згущення т.2. З'єднуємо отриману точку згущення т.2 з вузловою т.0 хордою 0-2, що утворює з вихідною ланкою  $(i-1, i)$  кут  $\varphi_2$ :  $\varphi_2 = \arctg\left(\frac{\bar{y}_2}{l-2\bar{h}}\right)$ , де  $\bar{y}_2 = y_3 + \bar{h} \cdot \tg \alpha_3$  – ордината точки згущення т.2. Повертаємося до початку пункту 2), тобто порівнюємо отримані кути  $\theta_{2-0}$  і  $\theta_{0-2}$ , де  $\theta_{2-0}$  – кут, що утворює хорда 0-2 і промінь  $\alpha_3$ ,  $\theta_{2-0} = \alpha_3 + \varphi_2$ ;  $\theta_{0-2}$  – кут утворений між хордою 0-2 і ланкою  $(i-2, i-1)$ ,  $\theta_{0-2} = \gamma_{i-1}^0 - \varphi_2$ . Виявляємо менший з них, і продовжуємо процес згущення, згідно викладеної методики, поки не отримаємо усі точки згущення та не сформуємо згущену СЛЛ ДПК.

В результаті локального згущення даної ланки  $(i-1, i)$  на основі алгоритму адаптивного способу [7] була сформована згущена СЛЛ, що у вузлі стику  $i$  утворює кут суміжності  $\gamma_i^d$  (див. рис.1), де  $d$  – відповідає кроку ланки (числу розподілів ланки при згущенні). Відповідно до рис. 1 кут суміжності  $\gamma_i^d$ :

$$\gamma_i^d = \gamma_i^0 - \bar{\alpha}_{i-}, \quad (1)$$

де  $\bar{\alpha}_{i-}$  – кут нахилу останньої ланки згущеної СЛЛ до ланки  $(i-1, i)$ ,  $\bar{\alpha}_{i-} = \arctg(p_d \cdot \tg \gamma_i^0)$ ;

$p_d = 1 - (1 - \mu)^{\ln d / \ln 2}$ , при  $d=n$  – деякий коефіцієнт керування згущеної СЛЛ ДПК.

Порядок наближення [8]  $\eta^d$  криволінійної ділянки до прямолінійної в деякому вузлі  $i$  будемо розглядати, як відношення кута суміжності  $\gamma_i^d$ , утвореного останньою ланкою згущеної СЛЛ ділянки  $(i-1, i)$  у даному вузлі, до кута суміжності  $\gamma_i^0$  вихідної ДПК:

$$\eta^d = \frac{\gamma_i^d}{\gamma_i^0} \leq \varepsilon, \quad (2)$$

де  $\varepsilon$  – як завгодно мале число,  $\varepsilon > 0$ .

Виразимо величину кута  $\bar{\alpha}_{i-}$  після підстановки значення  $\gamma_i^d$  із (1) в (2):

$$\bar{\alpha}_{i-} = \gamma_i^0 - \eta^d \cdot \gamma_i^0 = \arctg(p_d \cdot \tg \gamma_i^0), \quad (3)$$

Вираз (3) можна привести до наступного вигляду:

$$\tg(\gamma_i^0 - \eta^d \cdot \gamma_i^0) = p_d \cdot \tg \gamma_i^0, \quad (4)$$

Виразимо значення  $p_d$  з (4), враховуючи те, що  $tg(\gamma_i^0 - \eta^d \cdot \gamma_i^0) = \frac{tg\gamma_i^0 - tg(\eta^d \cdot \gamma_i^0)}{1 + tg\gamma_i^0 \cdot tg(\eta^d \cdot \gamma_i^0)}$

$$p_d = \frac{tg\gamma_i^0 - tg(\eta^d \cdot \gamma_i^0)}{tg\gamma_i^0 \cdot [1 + tg\gamma_i^0 \cdot tg(\eta^d \cdot \gamma_i^0)]}, \quad (5)$$

Виразимо величину числа розподілів  $d$  розглянутої ланки  $(i-1, i)$  ДПК при якому буде досягнутий зазначений порядок наближення, попередньо задавши  $\eta^d = \varepsilon$

$$d = E\left\{ e^{\frac{\ln 2 \cdot \ln \left[ 1 - \frac{tg\gamma_i^0 - tg(\varepsilon \cdot \gamma_i^0)}{tg\gamma_i^0 \cdot (1 + tg\gamma_i^0 \cdot tg(\varepsilon \cdot \gamma_i^0))} \right]}{\ln(1-\mu)}} \right\} + 1, \quad (6)$$

де  $E\{\cdot\}$  – ціла частина від виразу в дужках.

Враховуючи отримане значення числа розподілів  $d$  ланки (6) визначаємо скориговане значення коефіцієнта  $p_d$  та координат точок згущення (згідно алгоритма адаптивного способу [7]) ланки  $(i-1, i)$  ДПК, що примикає до прямолінійної ділянки, забезпечуючи при цьому заданий порядок наближення  $\varepsilon$ .

Стикування опуклої ділянки  $(i+3, i+4)$  і прямолінійної  $(i, \dots, i+3)$  із заданим порядком наближення необхідно здійснювати аналогічним образом.

Розглянемо прямолінійну ділянку  $(i, \dots, i+3)$  рис.1. Оскільки дана ділянка розбита на три ланки  $(i, i+1)$ ,  $(i+1, i+2)$ ,  $(i+2, i+3)$ , то завдання локального згущення прямолінійної ділянки будемо здійснювати в 3 етапи:

- 1) згущення ланки  $(i, i+1)$ , де кути суміжності:  $\gamma_{i+1}^0 = 0$ ,  $\gamma_i^0 \neq 0$ ;
- 2) згущення ланки  $(i+1, i+2)$ , де кути суміжності:  $\gamma_{i+1}^0 = 0$ ,  $\gamma_{i+2}^0 = 0$ ;
- 3) згущення ланки  $(i+2, i+3)$ , де кути суміжності у вузлах:  $\gamma_{i+2}^0 = 0$ ,  $\gamma_{i+3}^0 \neq 0$ .

Основною особливістю адаптивного способу дискретної інтерполяції є те, що процес згущення здійснюється в одному напрямку (від меншого кута до більшого), інакше можлива поява осциляції. В нашому випадку, при згущенні ланок  $(i, i+1)$ ,  $(i+1, i+2)$ ,  $(i+2, i+3)$ , що розташовуються на прямолінійній ділянці, процес згущення здійснюється в наступних напрямках: від кута  $\gamma_{i+1}^0 = 0$  до кута  $\gamma_i^0 > \gamma_{i+1}^0$ ; від кута  $\gamma_{i+2}^0 = 0$  до кута  $\gamma_{i+3}^0 > \gamma_{i+2}^0$ ; від кута  $\gamma_{i+1}^0 = 0$ , до кута  $\gamma_{i+2}^0 = 0$ . Враховуючи основний алгоритм адаптивного способу, можна побачити, що всі точки згущення будуть розташовуватися на одній прямій лінії.

**Розглянемо розв'язання другого варіанту завдання** (вихідні дані не визначають прямолінійність ділянки).

У випадку, коли вихідні дані не вміщують інформації стосовно прямолінійності ділянки  $(i, \dots, i+3)$ , працює основний алгоритм адаптивного способу. В даному випадку відпадає необхідність забезпечення стикування опуклих ділянок  $(i-1, i)$  і  $(i+3, i+4)$  з прямолінійною  $(i, \dots, i+3)$  при заданому порядку наближення.

**Висновки та перспективи подальших досліджень.** В результаті проведених досліджень було розв'язано задачу згущення ДПК, що має прямолінійні ділянки на основі розробленого адаптивного способу дискретної інтерполяції при різних варіантах завдання вихідних умов. Згущення ДПК з прямолінійними ділянками включає два етапи: згущення опуклих ділянок  $(i-1, i)$  і  $(i+3, i+4)$ , згідно з запропонованою в роботі [7] методикою, з забезпеченням заданого порядку їх наближення до прямолінійної ділянки  $(i, \dots, i+3)$  та послідовне згущення ланок прямолінійної ділянки. Запропоновані алгоритми ефективно виконують вказані розрахунки та побудови. Задачею подальших досліджень є систематизація та узагальнення отриманих результатів для формування загального обчислювального алгоритму адаптивного методу дискретної інтерполяції, з метою подальшого розвитку напрямку дискретної інтерполяції плоских ДПК довільної конфігурації в декартовій системі координат, що враховує кутові параметри цієї ДПК. Використання отриманих результатів на практиці доцільно при побудові геометричних моделей явищ і процесів з наперед заданими диференційно-геометричними характеристиками.

**Література**

1. Верещага В.М. Дискретное моделирование замкнутых кривых / В.М. Верещага, В.М. Щербина // Мелитопольский институт механизации сельского хозяйства. – Мелитополь, 1994. Деп. в ГНТБ Украины 20.04.94г., № 803–Ук 94.
2. Щербина В.М. Геометрическое моделирование спиралеобразных дискретно представленных кривых линий: дис. к-та. техн. наук/ В.М. Щербина – Мелитополь, ТГАТА, 2003, – 192с.
3. Лебедев В.О. Згущення ДПК з прямолінійними ділянками/ В.О. Лебедев// Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К: КНУБА, 2004. – Вип. 74. – С. 184 – 188.
4. Малкіна В.М. Побудова згущеної ДПК з прямолінійною ділянкою методом введення додаткових рівнянь в систему основних тотожностей згущення / В.М.Малкіна, Д.О. Сосновських // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Мелітополь:ТДАТА, 2007. Вип. 4, Т.35.–С.
5. Спірінцев Д.В. Згущення прямолінійних ділянок ДПК на основі варіативного формування різницевої схем кутових параметрів / Д.В. Спірінцев // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2008. Вип. 4, Т.39. – С.155-161.
6. Спірінцев В.В. Згущення прямолінійних ділянок ДПК на основі заданого закону зміни кутових параметрів / В.В. Спірінцев // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2009. Вип. 4, Т.42. – С.65-72.
7. Найдіш В.М. Адаптивна схема локального згущення точкового ряду з заданими у вузлах дотичними/ В.М.Найдіш, В.В.Спірінцев // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3(44). – Дніпропетровськ, 2006.–С.49-56.
8. Математическая энциклопедия / Гл. ред.: И.М. Виноградов. – М.: Советская энциклопедия. Т.4 Ок–Сло., 1984. – 1216 с.