УДК 514.18

ВИКОРИСТАННЯ ДОДАТКОВОЇ УМОВИ γ_{opt} СТОСОВНО ВАРІАТИВНОЇ СХЕМИ ЗГУЩЕННЯ НА ОСНОВІ КУТОВИХ ПАРАМЕТРІВ

Кабанчук С.М.,
Найдиш А.В., д.т.н.,
Спірінцев Д.В., к.т.н.,
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького, (Україна, м. Мелітополь)

Анотація *– пропонується використання додаткової умови* γ^1_{opt} *стосовно нової варіативної схеми згущення дискретно представлених кривих (ДПК) на основі кутових параметрів, що дозволяє розширити можливість управляння формою кривої у процесі геометричного моделювання.*

Ключові слова *– дискретна інтерполяція, варіативне дискретне геометричне моделювання, метод згущення, кутові параметри, додаткова умова.*

Постановка проблеми. Існує широка різноманіть методів дискретного геометричного моделювання [1,2,4-6] які дозволяють вирішувати задачу згущення ДПК довільної форми. Всі вони розрізняються складністю та універсальністю при вирішенні прикладних задач геометричного моделювання. Однак, основними недоліками існуючих методів дискретного геометричного моделювання [1,2,4] є обмежені можливості довільного варіювання формою кривої, що моделюється. Одним із напрямків вдосконалення існуючих методів є використання різноманітних додаткових умов, які дозволять розширити їх можливості в напрямку варіювання формою кривої, що моделюється. Тому дослідження, що проводяться в даному напрямку є актуальними.

Аналіз останніх досліджень. Дослідження методів варіативного дискретного геометричного моделювання (ВДГМ) [1,2,4-6] показали їх ефективність, але поряд з наявними перевагами, розроблені на сьогодні методи ВДГМ, ще мають перспективи подальшого розвитку у напрямку розширення можливостей керування (варіювання) формою кривої, що моделюється. Це можливо, в першу чергу, завдяки збільшенню кількості керуючих параметрів [3].

Формулювання цілей статті. Метою статті є застосування відомої додаткової умови стосовно нової варіативної схеми згущення на основі

кутових параметрів, що дозволить, у порівнянні з існуючими методами, розширити можливість управління формою моделюємої кривої.

Основна частина. Розглянемо фрагмент ДПК довільної конфігурації, заданої координатами $(x_i, y_i), i=\overline{0;n}$, своїх точок у глобальній системі координат (рис.1).

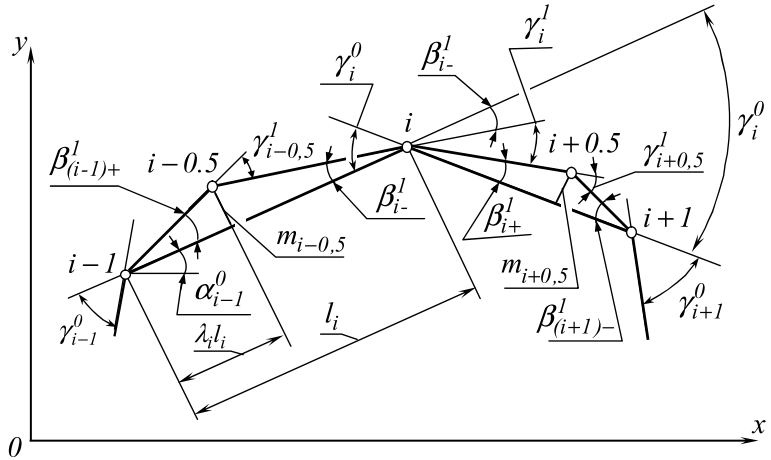

Рис. 1. Загальна кутова схема згущення.

В попередніх дослідженнях [3] було запропоновано наступну варіативну схему згущення на основі кутових параметрів:

$$(1-\eta_{i-1})\gamma^1_{i-0.5}+\gamma^1_i+\eta_i\gamma^1_{i+0.5}=\gamma^0_i, \quad i=\overline{1;n-1}, \tag{1}$$

де γ^0_i, γ^1_i – кути суміжності між ланками СЛЛ до і після першого кроку згущення (індекс угорі) в *i*-му вузлі ДПК;

$\gamma^1_{i+0.5}$ – кут суміжності у точці згущення $i+0.5$;

$\eta \in [0;1]$ – коефіцієнт співвідношення кутових параметрів;

$$\eta_i=\frac{\gamma^0_i}{\gamma^0_i+\gamma^0_{i+1}}, \quad i=\overline{0;n-1}. \tag{2}$$

Моделювання ДПК довільної конфігурації з використанням запропонованої варіативної схеми (1) можливо за рахунок накладання додаткових умов на співвідношення між кутами суміжності, що дозволяють зберігати геометричні властивості вихідної ДПК.

Розглянемо наступну додаткову умову, яка у порівнянні з існуючими схемами надає можливість управління формою згущеної кривої. Це вибір γ^1_{opt} з умов:

$$\gamma^1_{i-0,5} = \frac{1}{2}\gamma^0_{opt}, \quad i = \overline{1,n}, \text{ де } \gamma^0_{opt} = \begin{cases} min\left(\gamma^0_{i-1}, \gamma^0_i\right), \gamma^0_i > 0, \\ (-1)\, min\left(\left|\gamma^0_{i-1}\right|, \left|\gamma^0_i\right|\right), \gamma^0_i < 0, \end{cases} \qquad (3)$$

таким чином, що у точках згущення кут суміжності приймається рівним половині меншого із кутів суміжності ланок СЛЛ вихідної ДПК в сусідніх точках, що примикають до точки згущення.

У роботах [1,2] були вказані основні переваги використання даної додаткової умови – це автоматичне дотримання умови опуклості згущеної ДПК, простота розрахунків, висока точність і т.ін.

Розглянута додаткова умова застосовувалась до схеми побудови точок згущення на серединних перпендикулярах, однак можуть бути використані і в запропонованій нами варіативної схемою згущення. При цьому змінюється геометрична ідея побудови точок згущення, із збереженням всіх переваг.

Розглянемо алгоритм побудови точок згущення при використанні додаткової умови (3) в схемі згущення (1).

Алгоритм розрахунку точок згущення полягає в наступному (в даній роботі буде розглядатись тільки алгоритм для опуклих або увігнутих кривих, що не містять перехідних, прямолінійних ділянок, а також особливих точок):

1. Визначаються геометричні характеристики вихідної ДПК:
   – довжина ланок l_i:

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}, \quad i = \overline{1;n}; \qquad (4)$$

   – кути суміжності γ^0_i у вузлах до згущення:

$$\gamma^0_i = \pm arccos\left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)\cdot(a_2^2 + b_2^2)}}\right), \quad i = \overline{1,n-1}; \qquad (5)$$

   де «+» – для опуклої ДПК ($\gamma^0_i < 0,\ i = \overline{0;n}$);

   «–» – для увігнутої ДПК ($\gamma^0_i > 0,\ i = \overline{0;n}$);

   a_1, a_2, b_1, b_2 – коефіцієнти рівнянь прямих, на яких лежать ланки $(i-1,i)$ та $(i,i+1)$, $i = \overline{1,n-1}$ відповідно;

   $a_1 = y_{i+1} - y_i; \quad b_1 = x_i - x_{i+1}; \quad a_2 = y_i - y_{i-1}; \quad b_2 = x_{i-1} - x_i,$

   де x_{i-1}, y_{i-1}, x_i, y_i и x_{i+1}, y_{i+1} – координати точок $i-1$, i, $i+1$ вихідної ДПК.

   – кути суміжності у першому γ^0_0 та останньому γ^0_n вузлах ланок вихідної ДПК:

   – для незамкненої кривої

$$\gamma^0_0 = \gamma^0_1, \qquad \gamma^0_n = \gamma^0_{n-1}; \qquad (6)$$

   – для замкненої кривої

$$\gamma^0_0 = \gamma^0_n = \pm arccos\left(\frac{((x_1 - x_{n-1})^2 + (y_1 - y_{n-1})^2) - l_1^2 - l_n^2}{2\cdot l_1 \cdot l_n}\right); \qquad (7)$$

   – кут нахилу α_0 першої ланки до осі Ox

$$\begin{cases} \alpha_0 = arcsin\dfrac{y_1 - y_0}{[0,1]}, \quad якщо \quad \Delta x_1 = [x_1 - x_0] > 0, \\ \alpha_0 = -180^0 - arcsin\dfrac{y_1 - y_0}{[0,1]}, \quad якщо \quad \Delta x_1 = [x_1 - x_0] < 0. \end{cases} \qquad (8)$$

   – кути α_i, $i = \overline{1,n-1}$

$$\alpha_i = \gamma_i + \alpha_{i-1}, \qquad i = \overline{1,n-1}. \qquad (9)$$

2. Визначаються значення коефіцієнтів η_i згідно з (2).
3. Розраховуються кути суміжності $\gamma^1_i, i = \overline{1;n-1}$ і $\gamma^1_{i-0,5}, i = \overline{1;n}$ ланок згущеної ДПК.

Значення кутів суміжності у точках згущення $\gamma^1_{i+0.5}$, $i = \overline{0,n-1}$ визначаються згідно виразу (3).

Значення кутів суміжності γ^1_i, $i = \overline{1,n-1}$ в узлових точках ррозраховуються з наступного виразу:

$$\gamma^1_i = \gamma^0_i - (1 - \eta_{i-1})\gamma^1_{i-0,5} - \eta_i \cdot \gamma^1_{i+0,5}, \quad i = \overline{1;n-1}. \qquad (10)$$

Значення кутів суміжності в першому і останньому узлах після згущення для не замкнутої кривої визначаються з по формулам (11)-(12):

$$\gamma^1_0 = \gamma^0_0 - \tfrac{1}{2}\cdot\gamma^1_{0.5}; \qquad (12)$$

$$\gamma^1_n = \gamma^0_n - \tfrac{1}{2}\cdot\gamma^1_{n-0.5}, \qquad (13)$$

для замкнутої кривої з формули (14):

$$\gamma^1_0 = \gamma^1_n = \gamma^0_n - \tfrac{1}{2}\cdot\gamma^1_{n-0.5} - \tfrac{1}{2}\cdot\gamma^1_{0.5}. \qquad (14)$$

4. Розраховуються геометричні характеристики згущеної ДПК.
   – коефіцієнти λ_i (відношення проекцій довжин ланок СЛЛ на відповідні хорди)

$$\lambda_i = \frac{tg[(1-\eta_{i-1})\gamma^1_{i-0,5}]}{tg(\eta_{i-1}\cdot\gamma^1_{i-0,5}) + tg[(1-\eta_{i-1})\gamma^1_{i-0,5}]}, \quad i = \overline{1;n}; \qquad (15)$$

   – перевищення точок згущення над відповідними хордами

$$m^1_{i-0.5} = -l_i \cdot \lambda_i \cdot tg(\eta_{i-1}\cdot\gamma^1_{i-0.5}), \quad i = \overline{1;n}; \qquad (16)$$

– кути нахилу ланок згущеної СЛЛ ДПК до осі Ox

$$\alpha_i^1 = \alpha_i - \eta_i \cdot \gamma_{i+0,5}^1, \qquad i = \overline{0, n-1},; \qquad (17)$$
$$\alpha_{i+0,5}^1 = \alpha_i + (1-\eta_i) \cdot \gamma_{i+0,5}^1, \qquad i = \overline{1; n-1}.$$

– координати точок згущення

$$x_{i-0,5}^1 = x_{i-1} + \sqrt{(l_i \cdot \lambda_i)^2 + (m_{i-0,5})^2} \cdot \cos(\alpha_{i-1}^0 - \eta_{i-1} \cdot \gamma_{i-0,5}^1),$$
$$y_{i-0,5}^1 = y_{i-1} + \sqrt{(l_i \cdot \lambda_i)^2 + (m_{i-0,5})^2} \cdot \sin(\alpha_{i-1}^0 - \eta_{i-1} \cdot \gamma_{i-0,5}^1), \qquad i = \overline{1; n}. \qquad (18)$$

5. Критерієм закінчення згущення є досягнення умови (18) на k-му кроці згущення

$$max\left|\gamma_{i+0,5}^1\right| \le \varepsilon, \quad i = \overline{1; n-1}, \qquad (19)$$

де $\varepsilon \ge 0$ – як завгодно мале наперед задане число.

При необхідності продовження згущення, точки ряду перенумеровуються і розрахунок повторюється. По досягненні цієї умови точки згущеної ДПК з'єднуються відрізками супровідної ломаної лінії (СЛЛ), що і вважається остаточною формою інтерполюючої кривої.

Тестовий приклад (два кроки згущення) з використанням даної додаткової умови наведено на рис. 2.

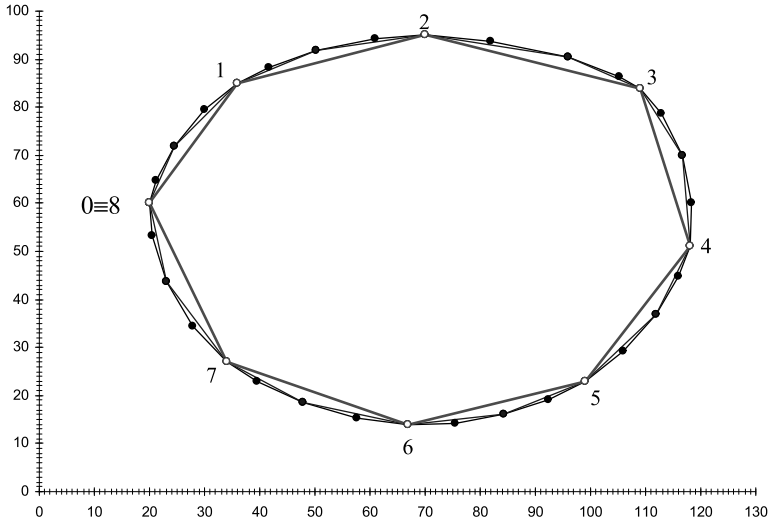

Рис.2. Два кроки згущення тестової ДПК при накладенні додаткової умови γ_{opt}^1:

—○— вихідна ДПК, —●— сгущена ДПК.

Розглянута додаткова умова раніше застосовувались до схеми побудови точок згущення на серединних перпендикулярах відповідних ланок супровідної ломаної лінії ДПК [2]. Використання даної додаткової умови (3) у новій варіативній схемі згущення (1) змінює геометричну ідею побудови точок згущення. При цьому зберігаються всі переваги даного способу, але, у порівнянні зі схемою [2], з'являється можливість керування формою згущеної кривої за рахунок варіювання коефіцієнтом співвідношення кутових параметрів.

Висновки. У статті запропоновано накладання відомої додаткової умови на співвідношення між кутами суміжності стосовно нової варіативної схеми згущення. Це дозволило, у порівнянні з існуючими схемами, підвищити ступінь варіативності отриманого розв'язку. Отримані результати доцільно використовувати при побудові геометричних моделей явищ і процесів з наперед заданими диференційно-геометричними характеристиками, при умові, що значення кутів суміжності вихідної ДПК не сильно відрізняються одне від одного.

Бібліографічний список

1. *Найдиш В.М.* Дискретна інтерполяція [для студентів вищих навчальних закладів I-IV рівнів акредитації] / *В.М. Найдиш*. - Мелітополь: ВДП «Люкс», 2008. – 250 с.

2. *Щербина В.М.* Геометрическое моделирование спиралеобразных дискретно представленных кривых линий: дисс. … к-та. техн. наук: 05.01.01/ *В.М. Щербина*. – Мелитополь, ТГАТА, 2003, – 192с.

3. *Спиринцев Д.В.* Дискретная интерполяция на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров: дисс. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / *Д.В. Спиринцев*. – Мелітополь, ТГАТУ, 2010. – 214 с.

4. *Ковальов С.М.* Прикладна геометрія та інженерна графіка./ *С.М. Ковальов, М.С. Гумен, С.І. Пустюльга [і ін.]* // Спеціальні розділи. Випуск 1. – Луцьк: Редакційно видавничій відділ ЛДТУ, 2006.– 256с.

5. *Лебедєв В.О.* Дискретна інтерполяція дискретно представлених кривих ліній на основі кутів згущення: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / *В.О. Лебедев*. – Мелітополь, ТДАТА. 2004. –22с.