УДК 514.18

ВИЗНАЧЕННЯ ПЛОЩІ СЕГМЕНТУ ТОПОГРАФІЧНОЇ ПОВЕРХНІ

Конопацький Є.В., к.т.н.,
Чернишева О.О.,
Рубцов М.О., к.т.н.
Мелітопольська школа прикладної геометрії
Мелітопольський державний педагогічний університет
ім. Б. Хмельницького (Україна)

В роботі запропоновано спосіб обчислення площі сегменту топографічної поверхні, яка проходить через 16-ть наперед заданих точок у БН-численні, за допомогою поверхневого інтегралу.

Ключові слова: БН-числення, топографічна поверхня, поверхневий інтеграл, площа сегменту поверхні, параметричне рівняння.

Постановка проблеми. Аналітичне і комп'ютерне визначення топографічної поверхні є важливої складової сучасних геоинформационных систем і відноситься до задач визначення цифрових моделей рельєфу місцевості. Для успішного розв'язку таких задач на даний момент використовуються методи дискретної і неперервної геометрії. До дискретних методів розв'язку цієї задачі можна віднести різні способи тріангуляції, прикладом яких може служити тріангуляція Делоне [1, 2]. Відповідно і обчислення площі сегменту топографічної поверхні зводиться до підсумовування площ трикутників, отриманих у результаті тріангуляції. До неперервних методів можна віднести різного роду сплайнові поверхні [3]. Обидві групи методів не позбавлені своїх недоліків, основним з яких є великий об'єм обчислень, необхідний для реконструкції топографічної поверхні на основі дискретного масиву точок з подальшим обчисленням площі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботі [4] було запропоновано спосіб реконструкції сегмента топографічної поверхні за допомогою апроксимації топографічної поверхні поверхнями 2-го порядку, які проходять через 9-ть наперед заданих точок, що дозволяє значно зменшити необхідний об’єм обчислень. Однак питання обчислення площин в роботі [4] досліджено не було. До того ж в роботі [5] було узагальнено, запропонований у [4] спосіб реконструкції топографічної поверхні, що дозволяє використовувати модифіковану дугу кривій Безье 3-го порядку для побудови сегментів топографічної поверхні, які проходять через 16-ть наперед заданих точок. І в роботі [4] і в роботі [5] для розв'язку поставлених задач було обрано математичний апарат БН-числення [6-8], для якого будь-які геометричні об'єкти представляються організованою множиною точок, що ефективно використовується для конструювання геометричних об'єктів з наперед заданими властивостями. Іншою важливою особливістю БН-числення є можливість покоординатного розрахунку, що дозволяє аналітично представити геометричний об'єкт у вигляді системи однотипних параметричних рівнянь. Ця особливість БН-числення використовується автором для визначення площі сегменту топографічної поверхні в проекціях із числовими позначками.

Формулювання цілей статті. Розробити спосіб обчислення площі сегменту топографічної поверхні, яка проходить через 16-ть наперед заданих точок.

Основна частина. В роботі [5] було отримано наступне точкове рівняння сегменту топографічної поверхні, яка проходить через 16-ть наперед заданих точок A_{ij}:

$$M=\left[\begin{array}{l}\left(\left(A_{00}\bar{t}+A_{30}t\right)\frac{2-9\bar{t}t}{2}+\frac{9\bar{t}t\left[A_{10}\left(2-3t\right)+A_{20}\left(3t-1\right)\right]}{2}\right)\bar{\tau}+\\+\left(\left(A_{03}\bar{t}+A_{33}t\right)\frac{2-9\bar{t}t}{2}+\frac{9\bar{t}t\left[A_{13}\left(2-3t\right)+A_{23}\left(3t-1\right)\right]}{2}\right)\tau\end{array}\right]\frac{2-9\bar{\tau}\tau}{2}+$$
$$+\frac{9\bar{\tau}\tau}{2}\left[\begin{array}{l}\left(\left(A_{01}\bar{t}+A_{31}t\right)\frac{2-9\bar{t}t}{2}+\frac{9\bar{t}t\left[A_{11}\left(2-3t\right)+A_{21}\left(3t-1\right)\right]}{2}\right)\left(2-3t\right)+\\+\left(\left(A_{02}\bar{t}+A_{32}t\right)\frac{2-9\bar{t}t}{2}+\frac{9\bar{t}t\left[A_{12}\left(2-3t\right)+A_{22}\left(3t-1\right)\right]}{2}\right)\left(3t-1\right)\end{array}\right]. \quad (1)$$

Переходимо до розгляду проекцій із числовими позначками в глобальній декартовій системі координат OE_1E_2H (рис. 1). Координатну площину Oxy приймаємо за нульову площину, де точкове рівняння (1) із координатами x та y задає замкнену область Ω − закладення (криволінійний чотирикутник, виділений на рисунку 1 більш товстими дугами кривих). Висотні відмітки h_{ij} ототожнимо із координатою z, тобто приймемо $E_3 \equiv H$.

Для визначення площі у сегменту топографічної поверхні потрібно від точкової форми рівняння (1) перейти до параметричної.

$$
\left\{
\begin{aligned}
x = {} & \left[\begin{aligned}
&\left(\left(x_{A_{00}}\bar{t}+x_{A_{30}}t\right)\frac{2-9\bar{t}t}{2}+\frac{9\bar{t}t\left[x_{A_{10}}\left(2-3t\right)+x_{A_{20}}\left(3t-1\right)\right]}{2}\right)\bar{\tau}+\\
&+\left(\left(x_{A_{03}}\bar{t}+x_{A_{33}}t\right)\frac{2-9\bar{t}t}{2}+\frac{9\bar{t}t\left[x_{A_{13}}\left(2-3t\right)+x_{A_{23}}\left(3t-1\right)\right]}{2}\right)\tau
\end{aligned}\right]\frac{2-9\bar{\tau}\tau}{2}+\\
&+\left[\begin{aligned}
&\left(\left(x_{A_{01}}\bar{t}+x_{A_{31}}t\right)\frac{2-9\bar{t}t}{2}+\frac{9\bar{t}t\left[x_{A_{11}}\left(2-3t\right)+x_{A_{21}}\left(3t-1\right)\right]}{2}\right)\left(2-3t\right)+\\
&+\left(\left(x_{A_{02}}\bar{t}+x_{A_{32}}t\right)\frac{2-9\bar{t}t}{2}+\frac{9\bar{t}t\left[x_{A_{12}}\left(2-3t\right)+x_{A_{22}}\left(3t-1\right)\right]}{2}\right)\left(3t-1\right)
\end{aligned}\right]\frac{9\bar{\tau}\tau}{2},\\
y = {} & \left[\begin{aligned}
&\left(\left(y_{A_{00}}\bar{t}+y_{A_{30}}t\right)\frac{2-9\bar{t}t}{2}+\frac{9\bar{t}t\left[y_{A_{10}}\left(2-3t\right)+y_{A_{20}}\left(3t-1\right)\right]}{2}\right)\bar{\tau}+\\
&+\left(\left(y_{A_{03}}\bar{t}+y_{A_{33}}t\right)\frac{2-9\bar{t}t}{2}+\frac{9\bar{t}t\left[y_{A_{13}}\left(2-3t\right)+y_{A_{23}}\left(3t-1\right)\right]}{2}\right)\tau
\end{aligned}\right]\frac{2-9\bar{\tau}\tau}{2}+\\
&+\left[\begin{aligned}
&\left(\left(y_{A_{01}}\bar{t}+y_{A_{31}}t\right)\frac{2-9\bar{t}t}{2}+\frac{9\bar{t}t\left[y_{A_{11}}\left(2-3t\right)+y_{A_{21}}\left(3t-1\right)\right]}{2}\right)\left(2-3t\right)+\\
&+\left(\left(y_{A_{02}}\bar{t}+y_{A_{32}}t\right)\frac{2-9\bar{t}t}{2}+\frac{9\bar{t}t\left[y_{A_{12}}\left(2-3t\right)+y_{A_{22}}\left(3t-1\right)\right]}{2}\right)\left(3t-1\right)
\end{aligned}\right]\frac{9\bar{\tau}\tau}{2},\\
h = {} & \left[\begin{aligned}
&\left(\left(h_{A_{00}}\bar{t}+h_{A_{30}}t\right)\frac{2-9\bar{t}t}{2}+\frac{9\bar{t}t\left[h_{A_{10}}\left(2-3t\right)+h_{A_{20}}\left(3t-1\right)\right]}{2}\right)\bar{\tau}+\\
&+\left(\left(h_{A_{03}}\bar{t}+h_{A_{33}}t\right)\frac{2-9\bar{t}t}{2}+\frac{9\bar{t}t\left[h_{A_{13}}\left(2-3t\right)+h_{A_{23}}\left(3t-1\right)\right]}{2}\right)\tau
\end{aligned}\right]\frac{2-9\bar{\tau}\tau}{2}+\\
&+\left[\begin{aligned}
&\left(\left(h_{A_{01}}\bar{t}+h_{A_{31}}t\right)\frac{2-9\bar{t}t}{2}+\frac{9\bar{t}t\left[h_{A_{11}}\left(2-3t\right)+h_{A_{21}}\left(3t-1\right)\right]}{2}\right)\left(2-3t\right)+\\
&+\left(\left(h_{A_{02}}\bar{t}+h_{A_{32}}t\right)\frac{2-9\bar{t}t}{2}+\frac{9\bar{t}t\left[h_{A_{12}}\left(2-3t\right)+h_{A_{22}}\left(3t-1\right)\right]}{2}\right)\left(3t-1\right)
\end{aligned}\right]\frac{9\bar{\tau}\tau}{2}.
\end{aligned}
\right. \tag{2}
$$

Відповідно до [9], площа сегменту топографічної поверхні визначається за допомогою поверхневого інтегралу:

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{EG-F^{2}}\,dtd\tau, \tag{3}$$

де $E=\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2+\left(h_t'\right)^2$;

$$G = \left(x'_\tau\right)^2 + \left(y'_\tau\right)^2 + \left(h'_\tau\right)^2;$$
$$F = x'_t x'_\tau + y'_t y'_\tau + h'_t h'_\tau.$$

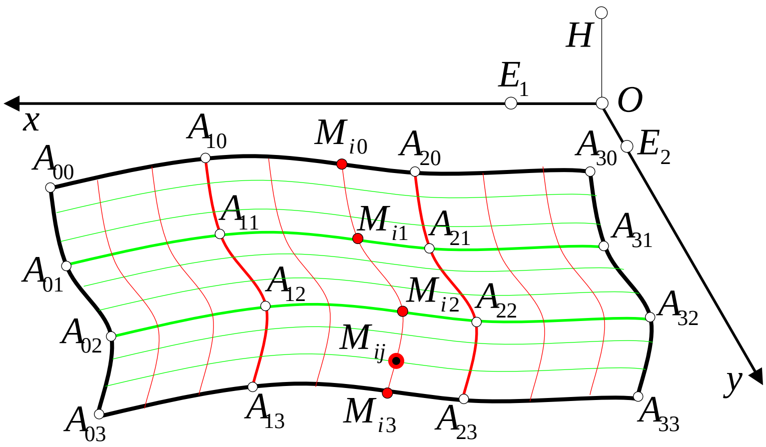

Рис. 1. Сегмент топографічної поверхні у декартовій системі координат

Визначивши коефіцієнти квадратичної форми за допомогою похідних, отриманих із рівняння (2), отримаємо шукану площу відсіку топографічної поверхні. Враховуючи великий обсяг обчислень, для визначення площі раціонально використовувати математичні пакети: Maple, MathCAD та ін.

Висновки. В роботі запропоновано спосіб визначення площі сегменту топографічної поверхні, який дозволяє обчислити площу незакономірної поверхні не за допомогою наближеного способу тріангуляції, який має найбільш поширене практичне впровадження, а за допомогою високоточних методів інтегрального і диференціального числення.

Література

1. Скворцов А. В. Триангуляция Делоне и ее применения / А. В. Скворцов. – Томск: Изд-во Томского Унив., 2002. – 128 с.
2. Tamal K. Dey. Curve and Surface Reconstruction: Algorithms with Mathematical Analysis // Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics / Cambridge University Press New York. – NY, USA, 2006.
3. Квасов Б. И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами / Б. И. Квасов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 360 с.
4. Кучеренко В.В. Формалізовані геометричні моделі нерегулярної поверхні для гіперкількісної дискретної скінченої множини точок: дис. … канд. техн. наук: 05.01.01 / В.В. Кучеренко. – Мелітополь, 2013. – 234 с.

5. Чернышева О.А. Аппроксимация топографической поверхности с помощью дуг кривых, проходящих через наперед заданные точки на основе полиномов Бернштейна / О.А. Чернышева // SCVRT1516 Труды межд. науч. конф. (Царь Град, 21–24 ноября 2016 г.). – Царь Град: МФТИ ИФТИ Протвино, 2016. – С. 134–138.
6. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: дис. … докт. техн. наук: 05.01.01 / И.Г. Балюба. – Макеевка: МИСИ, 1995. – 227 с.
7. Найдыш В.М. Алгебра БН-исчисления / В.М. Найдыш, И.Г. Балюба, В.М. Верещага // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-технічний збірник. – Вип. 90. – К.: КНУБА, 2012. – С.210-215.
8. Балюба И.Г. Точечное исчисление: учебное пособие / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш. – Мелитополь: МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. – 236 с.
9. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов / Н. С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – Т. 2. – 560 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ СЕГМЕНТА ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Конопацкий Е.В., Чернышева О.А., Рубцов Н.А.

В работе предложен способ вычисления площади сегмента топографической поверхности, которая проходит через 16-ть наперед заданных точек в БН-исчислении, с помощью поверхностного интеграла.

Ключевые слова: БН-исчисление, топографическая поверхность, поверхностный интеграл, площадь сегмента поверхности, параметрическое уравнение.

DEFINITION THE AREA OF THE TOPOGRAPHIC SURFACE SEGMENT

Konopatskiy E., Chernysheva O., Pubsov N.

In this paper is proposed the method for calculating the area of the topographic surface segment that passes through 16 pre-defined points in the BN-calculation using the surface integral.

Key words: BN-calculation, topographic surface, surface integral, area of the surface segment, parametric equation.