УДК 514.18

ДОСЛІДЖЕННЯ КРИВИНАМИ ФАЗОВИХ ТРАЄКТОРІЙ КОЛИВАНЬ ТОЧКИ НА КОЛІ, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

Сухарькова О.І.
Український державний університет залізничного транспорту (м.Харків)
Тел. 067-648-78-99

Анотація **- наведено спосіб визначення критичних значень параметрів диференціального рівняння коливань точки на колі, яке обертається навколо вертикальної осі. Спосіб базується на понятті викривленості фазових траєкторій і враховує зміну знака їх кривини вздовж траєкторій.**

Ключові слова **– фазова траєкторія, критичні значення параметра, коливання точки на колі, викривленість кривої, кривина кривої.**

Постановка проблеми. Вивчення маятникових коливань на якісному рівні доцільно здійснювати методом фазових траєкторій. Традиційний аналіз маятникових коливань складається [1,2] з визначення особливих точок, що відповідають положенням рівноваги коливальної системи, побудови фазових портретів системи зі значеннями керуючого параметра у межах особливих точок, а також визначення сепаратрис, що проходять через особливі точки за допомогою рівняння інтеграла енергії системи, коли кінетична енергія дорівнює нулю. Але для практичних впроваджень необхідні суто інженерні способи обчислення критичних значень керуючого параметра коливань [6,7], врахування якого може поліпшити конструкцію коливальної системи, або запобігти її аварійному стану. Це вказує на актуальність обраної теми досліджень.

Аналіз останніх досліджень. Основи пошуку критичних значень параметрів фазових траєкторій (теорії біфуркацій) закладені А.Пуанкаре й О.М.Ляпуновим, потім ці дослідження були розвинені О.О.Андроновим і учнями [1,2]. У роботах [3,4] наведено огляд різноманітних способів дослідження фазових траєкторій на якісному рівні, звідки слідує висновок про недостатній розвиток графоаналітичних способів пошуку критичних значень параметрів фазових траєкторій для інженерної практики. Графічні способи пошуку критичних значень параметрів фазових траєкторій на основі поля ізоклін доцільно було б доповнити і такими, що базуються на графічному характері викривленості фазової траєкторії, і які визначаються сукупністю значень її кривини вздовж цієї траєкторії.

Формулювання цілей статті. Розробка способу визначення критичних значень параметрів диференціального рівняння коливань точки на колі, що обертається навколо вертикальної осі. Спосіб базується на понятті викривленості фазових траєкторій і враховує зміну знака їх кривини вздовж траєкторій.

Основна частина. Вважатимемо, що рух точки по фазовій траєкторії здійснюється у межах, який визначається границями зміни параметра t часу, а «поворот» вправо або вліво при русі задається різними знаками при значеннях кривини цієї траєкторії.

При пошуку критичних значень параметрів фазових траєкторій головним буде питання визначення кривини фазових траєкторій, для яких у загальному випадку не відомі описи аналітичними формулами. Тому що координати точок на фазовій траєкторії обчислюються переважно чисельними методами після розв'язання диференціального рівняння. Тобто необхідно визначити кривину фазової траєкторії, задану множиною N точок (x_i, y_i) коли i=2..M-1. Керуючий параметр далі позначено як p.

Оберемо на фазовій кривій три сусідні точки (x_{i-1}, y_{i-1}) (x_i, y_i) і (x_{i+1}, y_{i+1}). Для обчислення кривини в точці (x_i, y_i) знайдемо радіус кола r_1, яке проходить через дані три точки:

$$r_i = \frac{\sqrt{B^2 + C^2 - AD}}{A}, \tag{1}$$

де

$$A = x_{i-1}y_i + x_i y_{i+1} + x_{i+1}y_{i-1} - x_{i+1}y_i - x_i y_{i-1} - x_{i-1}y_{i+1};$$

$$B = (y_{i+1}^2 y_i - x_{i+1}^2 y_{i-1} + x_{i+1}^2 y_i - y_{i+1}^2 y_{i-1} - y_i^2 y_{i+1} + y_i^2 y_{i-1} +$$
$$+ x_i^2 y_{i-1} - x_t^2 y_{i+1} - y_{i-1}^2 y_i + y_{i-1}^2 y_{i+1} - x_{i-1}^2 y_i + x_{i-1}^2 y_{i+1})/2;$$

$$C = (y_{i+1}^2 x_{i-1} - y_{i+1}^2 x_i + x_{i+1}^2 x_{i-1} - x_{i+1}^2 x_i + y_i^2 x_{i+1} - y_i^2 x_{i-1} +$$
$$+ x_i^2 x_{i+1} - x_t^2 x_{i-1} + y_{i-1}^2 x_i - y_{i-1}^2 x_{i+1} + x_{i-1}^2 x_i - x_{i-1}^2 x_{i+1})/2;$$

$$D = y_{i+1}^2 x_i y_{i-1} - y_{i+1}^2 x_{i-1} y_i - x_{i+1}^2 x_{i-1} y_i + x_{i+1}^2 x_i y_{i-1} +$$
$$+ y_i^2 x_{i-1} y_{i+1} - y_i^2 x_{i+1} y_{i-1} - x_i^2 x_{i+1} y_{i-1} + x_t^2 x_{i-1} y_{i+1} -$$
$$- y_{i-1}^2 x_{i+1} y_i - y_{i-1}^2 x_i y_{i+1} - x_{i-1}^2 x_i y_{i+1} + x_{i-1}^2 x_{i+1} y_i.$$

Тоді значення кривини у точці (x_i, y_i) буде k=1/r_1. Умова A = 0 визначатиме нульову кривину (коли точки розташовані на прямій).

Наближене обчислення кривини за допомогою радіуса кола, проведеного через три точки, пояснюється тим, що чисельним способом розв'язання диференціального рівняння коливань системи вдалося обчислити лише значення функції та її похідної. А для обчислення [5] кривини плоскої кривої, що задається рівнянням x=x(t), y=y(t), необхідно знати ще і другу похідну:

$$k = \pm \frac{y''x' - x''y'}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}.$$

Крім того, для плоских кривих є можливість розрізняти напрямок обертання дотичної прямої при русі уздовж кривої, тому кривині приписують знак залежно від напрямку цього обертання.

Після визначення кривин для усіх точок на фазовій траєкторії будуємо кусково-лінійний графік функції *k(t)* кривин для певного значення параметра *p* . Площу підграфіка (для початкового значення *p*) визначаємо за допомогою одного з чисельний методів (наприклад, метода Сімпсона). Виконуючи зазначені дії в циклі для інших значень параметра *p,* одержимо наближений графік функції *S(p)*, який складатиметься з лінійних відрізків. Згідно наведеного вище, критичні значення визначатимуться за допомогою вертикальних складових кусково-лінійного графіка функції *S(p).*

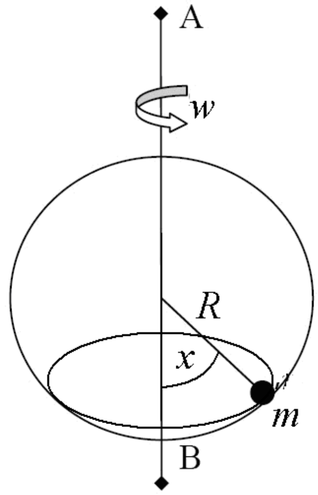


Рис. 1. Схема обертово-коливальної системи.

<u>*Для прикладу*</u>, дослідимо коливання точки маси m, розташованій на колі радіуса R, що рівномірно обертається навколо вертикальної осі AB (рис.1). Тут x(t) - кут відхилення точки від вертикалі, ω - кут повороту кола навколо осі AB. Диференціальні рівняння по координаті x(t) мають [1,2] вигляд:

$$\frac{d}{dt}x(t) = y(t); \quad \frac{d}{dt}y(t) = \omega\left(\cos(x(t)) - \lambda\right)\sin(x(t)), \qquad (2)$$

де $\lambda = \dfrac{g}{R\,\omega^2}$.

В роботах [1] (стор.28) і [2] (стор.129) показано, що фазові портрети обертової системи з описом (2) доцільно будувати для таких трьох варіантів: а) $1 < \lambda < 0$ (рис.2); б) $\lambda = 0$ (рис.3); в) $0 < \lambda < 1$ (рис.4). У цих випадках вони будуть відрізняться на якісному рівні.

З рівнянь (2) можна обчислити особливі точки, що відповідають положенням рівноваги: а) $y_1=0$; $x_1=0$; б) $y_2=0$; $x_2=\pi$; в) $y_3=0$; $x_3=\lambda$.

Інтеграл енергії системи (2) має вигляд:

$$\frac{y^2(t)}{2} - \Omega^2\left(\frac{\sin^2\left(x(t)\right)}{2} + \lambda\cos\left(x(t)\right)\right) = C. \qquad (3)$$

Рівняння сепаратриси можна одержати з виразу для інтеграла енергії системи (3), де константа C визначається з тієї умови, що сепаратриса проходить через особливу точку. При цьому кінетична енергія дорівнює нулю, адже при цьому реалізується положення рівноваги. Звідси одержуємо рівняння двох сепаратрис:

$$\omega^2 = \Omega^2\left[\sin^2\left(x(t)\right) + 2\lambda\left(\cos\left(x(t)\right)+1\right)\right]; \qquad (4)$$

$$\omega^2 = \Omega^2\left[\sin^2\left(x(t)\right) + 2\lambda\left(\cos\left(x(t)\right)-1\right)\right].$$

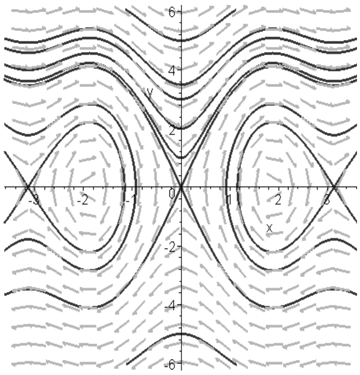


Рис. 2. $-1<\lambda<0$.

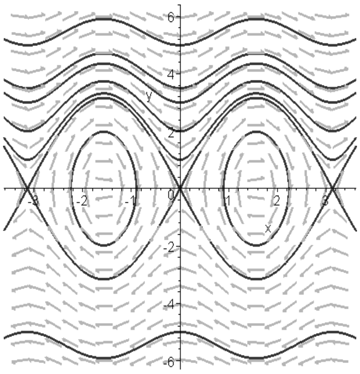


Рис. 3. $\lambda=0$.

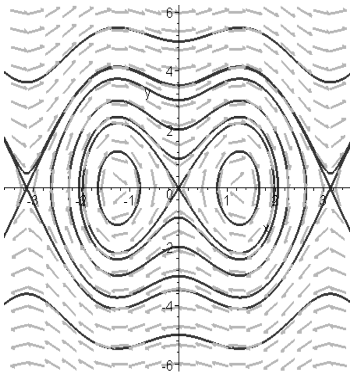


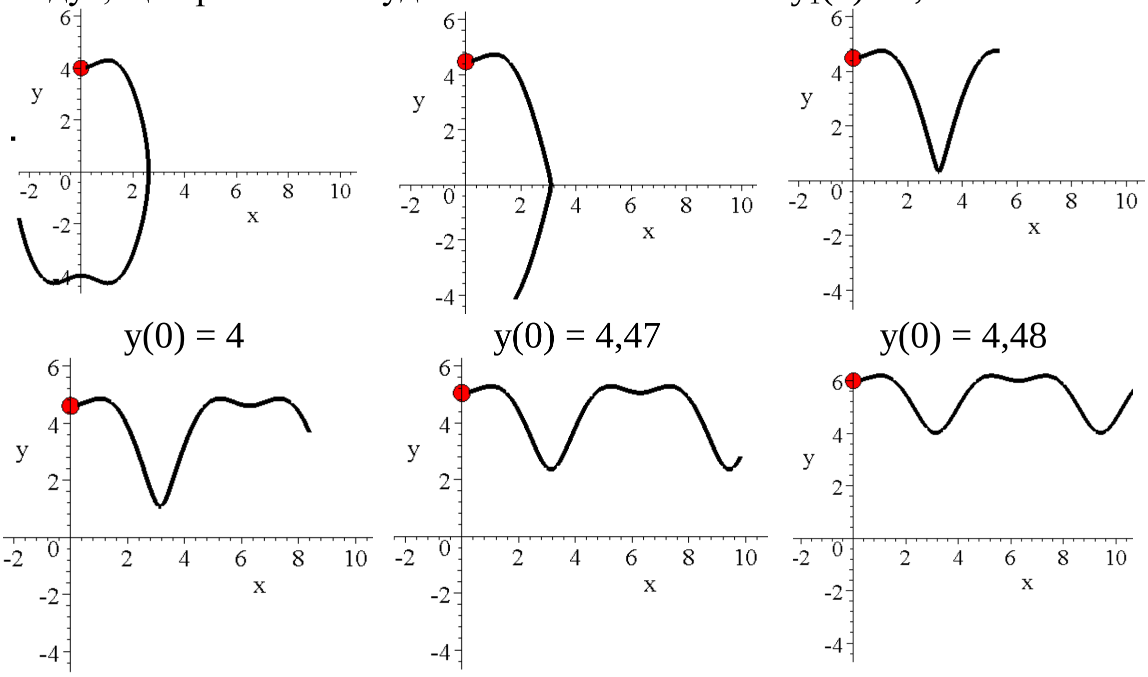
Рис. 4. $0<\lambda<1$.

На рис. 4 за умови 0 < λ < 1, представлені обидві сепаратриси: зовнішня сепаратриса, що проходить через точки (π, 0) і (-π, 0) і оточує внутрішню сеператрису, яка проходить через точку (0,0) і має форму вісімки. На рис.3, коли λ = 0, сепаратриси зливаються. На рис.2, коли –1 < λ < 0, реалізується та ж ситуація, що й на рис. 4, але зображення переміщене уздовж горизонтальної осі θ на π одиниць.

Таким чином, має місце якісна зміна фазового портрета системи при переході параметра λ через нуль. Тобто виникла біфуркація. Можна також показати, що при переході параметра λ через значення λ = ±1 має місце ще одна зміна фазового портрета. Найбільш доцільно це можна виявити, склавши програму побудови анімаційних зображень фазового портрета залежно від зміни керуючого параметра.

На відміну від наведеного вище класичного аналізу [1,2] коливального процесу засобами фазових портретів, у роботі запропоновано аналіз зазначеного на основі викривленості фазових траєкторій з врахуванням зміни знака їх кривини вздовж траєкторій.

Розв'язувати систему диференціальних рівнянь (2) будемо чисельно методом Рунне-Кута з початковими умовами $x(0)$ і $y(0)$ залежно від значення λ. Для тестових обчислень було складено мовою Maple програму розв'язання системи рівнянь (2) і побудови фазового портрета для значення λ = 0,5 з початковими умовами x(0) = 0 і 3,5 < y (0) < 6. На рис. 5 зображено анімаційні кадри зміни фазового портрету, з яких слідує $y_1(0)$ = 4,48. Для підтвердження цього на рис. 6 наведено одержаний графік функції S(p), з якого слідує, що критичним буде наближене значення $y_1(0)$ =4,48.



y(0) = 4,6 y(0) = 5,0 y(0) = 6,0

Рис. 5. Анімаційні кадри зміни фазового портрету залежно від y(0).

На рисунках колом позначається точка, що відповідає початковим умовам. При цьому крок між точками на фазовій кривій обирався Δ = 0,1; кількість точок *M*=1000.

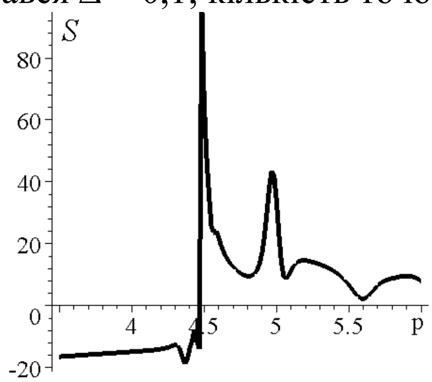


Рис.6.Графік функції S(p); p= y (0).

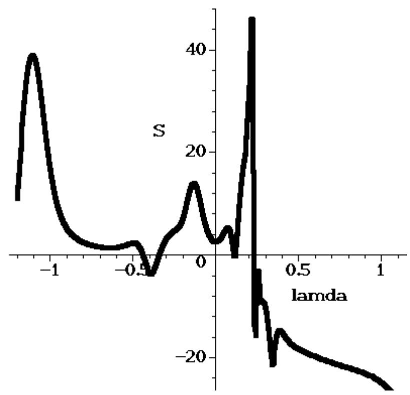
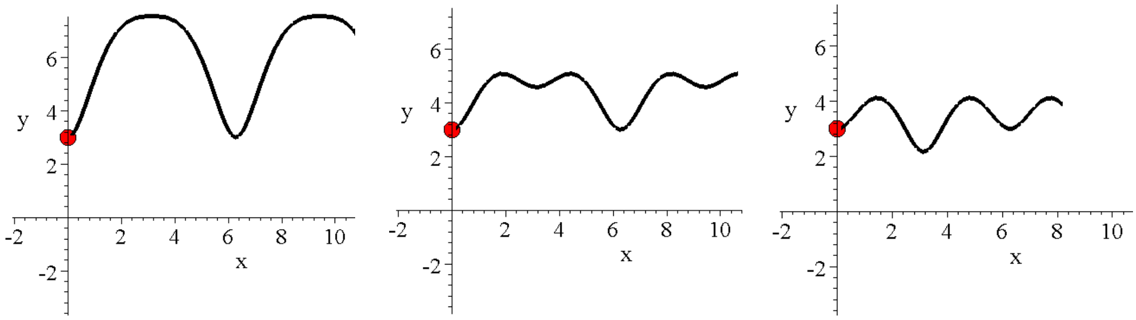


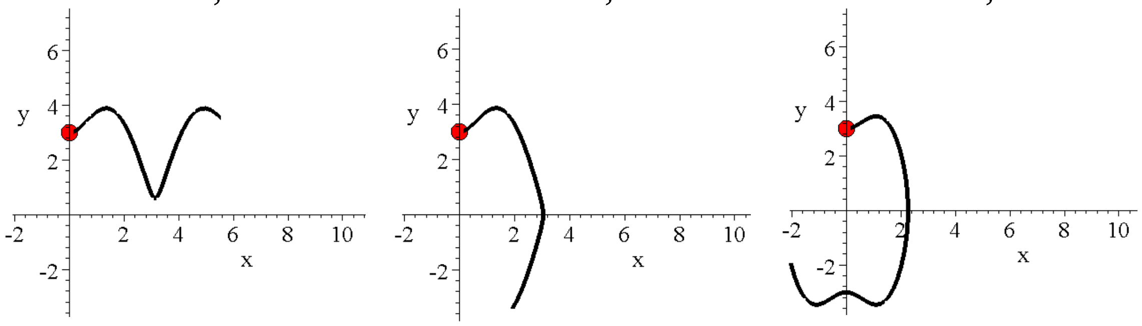
Рис.7. Графік функції S(λ).

Більш цікавим є випадок аналізу коливань за умови змінного параметра λ: 0<λ<6 та початкових умов x(0) = 0 і y(0) = 3. На рис. 7 наведено графік відповідної функції S(λ) зі знайденими критичними значеннями λ_1 =-0,3, λ_2 =0,1 і λ_3 =0,22. На рис. 8 наведено кадри зміни відповідного фазового портрету залежно від значень λ.

Надаючи довільній постійній С в інтегралі збереження енергії різні значення, одержимо множину фазових просторів, які в сукупності утворять фазовий простір консервативної системи другого порядку, що і було розглянуто в даній роботі.



λ= -1,2 λ = -0,3 λ = 0,1



λ = 0,21 λ= 0,22 λ= 0,45

Рис. 6. Анімаційні кадри зміни фазового портрету залежно від λ.

Висновки. Для визначення критичних значень параметра *p* сім’ї фазових траєкторій необхідно знайти координати на осі абсцис вертикальних складових на графіку *S=S(p)* залежності від параметра *p* площі підграфіка кусково-лінійної функції кривини *k(t)*.

Література

1. *Бутенин Н.В.* Введение в теорию нелинейных колебаний / Н.В.Бутенин, Ю.И.Неймарк, Н.Л. Фуфаев - М.: Наука, 1987.-382с.
2. *Андронов А.А.* Теория колебаний / А.А.Андронов, А.А.Витт, С.Э.Хайкин - М., Наука, 1981.- 916 с.
3. *Баутин Н.Н.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н.Баутин, Е.А Леонтович - М.: Наука, 1990. 287с.
4. *Китаев Д.Б.* Развитие качественной теории дифференциальных уравнений в XIX столетии: дис… канд. техн. наук: 07.00.10 / Д.Б. Китаев - М: Институт истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова РАН. – 2011. – 140 с.
5. *Мищенко А.С.* Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии / А.С.Мищенко, Ю.П.Соловьев , А.Т.Фоменко – М: Изд. ФМЛ, 2001. – 352 с.
6. *Бутенин Н.В.* Теория колебаний / Н.В.Бутенин - М.: Высшая школа, 1963. — 187 с.

7. *Шуп Т.* Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство / Т.Шуп - Пер. с англ. - М.: Мир, 1982 -238с.
8. *Бидерман В.Л.* Прикладная теория механических колебаний / В.Л.Бидерман - М.: Высшая школа, 1972. — 416 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВИЗНАМИ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ КОЛЕБАНИЙ ТОЧКИ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ОКРУЖНОСТИ

О.И. Сухарькова

Аннотация **- представлен способ определения критических значений параметров дифференциального уравнения колебаний точки на окружности, которая вращается вокруг вертикальной оси. Способ базируется на понятии искривленности фазовых траекторий и учитывает изменение знака их кривизны вдоль траекторий.**

RESEARCH BY CURVATURES OF PHASE TRAJECTORIES OF VIBRATIONS OF POINT ON THE REVOLVED CIRCUMFERENCE

O. Suharkova

Summary

A method over of determination of critical values of parameters of differential equalization of vibrations of point is brought on a circumference that is revolved about vertical axis. A method is based on the concept of distorted of phase trajectories and takes into account the change of sign of their curvature along trajectories.