МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи
УДК 513.514

БАЛЮБА ИВАН ГРИГОРЬЕВИЧ

КОНСТРУИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЕРЕНЕСЕНИЕМ В ПРОСТРАНСТВО ПАРАМЕТРОВ

Специальность 05.01.01 - прикладная геометрия и
инженерная графика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

МОСКВА 1978

Работа выполнена на кафедре начертательной геометрия и технического черчения Мелитопольского института механизации сельского хозяйства.

Научный руководитель - кандидат технических наук,
доцент НАЙДЫШ В.М.

Официальные оппоненты: доктор технических наук,
профессор ФИЛИППОВ П.В.;

кандидат технических наук,
старший научный сотрудник
МАГАУЕНОВ Р.Г.

Ведущее предприятие - указано в решении специализированного совета.

Защита состоится 1978 г. в на заседании специализированного совета К 053.30.07 в Московском Автомобильно-дорожном институте по адресу: 125319, Москва-319, Ленинградский проспект, д. 64 ауд. 42. Справки по телефону 155-03-06. Отзывы присылать в 2 экз. с подписью, заверенной печатью.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.
Автореферат разослан 1978 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
доцент Р.Ф.Гамаюнова

Актуальность проблемы. ХХУ съезд КПСС указал, что «...только на основе ускоренного развития науки и техники могут быть решены конечные задачи революции социальной - построено коммунистической общество». Прогресс в машиностроении, создание новых машин и орудий, автоматизация проектно-конструкторских работ требуют новых исследований в области задания и конструирования поверхностей сложных форм.

В основу исследований настоящей работы положена идея перенесения, впервые высказанная Плюккером и развитая Грассманом и Кэли и заключающаяся в том, что геометрические объекты *3*-пространства рассматриваются в *n*-пространстве их параметров. Указанная идея многократно использовалась многими математиками для исследования поверхностей и более сложных многообразий линий, однако эти исследования велись исключительно аналитически и не были направлены на решение инженерных задач. Наиболее изученными в математике являются линейчатые многообразия, исследование которых в многочисленных работах советских (Нордов А.П., Третьяков В.Д. и др.) и зарубежных (Л.Годо) авторов ведется посредством перенесения на гиперквадрике Плюккера в *5*-мерном проективном пространстве. Однако методы, разрабатываемые указанными выше авторами, не преследуют цель дать алгоритм конструктивной связи между прямыми *3*-пространства и точками гиперквадрики Плюккера и поэтому не могут в достаточной мере удовлетворить требованиям инженерной практики. Указанная связь должна давать возможность в любой момент осуществлять графический переход от точек пространства параметров к линиям *3*-пространства и наоборот. Поэтому в работе линейчатые многообразия рассматриваются не на гиперквадрике Плюккера, а в эвклидовом *4*-пространстве.

Вопросам задания, изображения, автоматического воспроизведения и конструирования поверхностей посвящены фундаментальные исследования Четверухина Н.Ф., Котова М.И., Рыжова Н.Н., Фролова С.А., Бубенникова А.В., Осипова В.А., Павлова А.В., Тевлина А.М., Михайленко В.Е., Подгорного А.Л., а также исследования их многочисленных учеников. Перенесение в пространство параметров позволяет заменить рассмотрение однопараметрического множества образующих поверхности изучением соответствующей линии, что легче, обозримее, имеет более широкий подход. Одна из трудностей на этом пути заключается в оптимальной параметризации геометрических образов. В этой части исследования опираются на основополагающие работы Четверухина Н.Ф., Котова М.И., Рыжова Н.Н. и др. по параметризации и заданию поверхностей и их каркасов.

Вторая трудность заключается в выборе рациональных способов изображения образов многомерного пространства, многообразие которых исследовано и развито в работах Радищева В.П., Бескина Н.М., Филиппова П.В., Первиковой В.Н., Наумович Н.В., Юдицкого М.И. и др. Благодаря указанным выше исследованиям, а также разработке специальных моделей *3*-мерного и многомерного пространств в работах Валькова К.И., Джапаридзе Н.С., Мчедлишвили Е.А., Федорова Е.С. и др. появилась возможность использовать первоначальные идеи Плюккера для выработки новых способов задания и конструирования поверхностей по наперед заданным условиям.

Предлагаемый метод конструирования поверхностей с наперед заданной образующей обладает большой гибкостью, позволяет учитывать многие наперед заданные требования, одинаково просто соединяет в себе графическое и аналитическое решение, уточняет, дополняет, обобщает многие работы данного направления, позволяет достичь общности аналитических решений, алгоритмов и математических формул, что в конечном итоге способствует повышению эффективности проектно-конструкторских работ, т.е. решению актуальной задачи X пятилетки.

Цель и задачи исследования. Установить соответствие между 3 - пространством объектов $Ф^3$ и пространством их параметров $У^n$. Разработать на этой основе способы задания поверхностей с наперед заданной образующей и алгоритм $щ$ перехода от точечного задания объекта к параметрическому и наоборот. Свести конструирование поверхностей к конструированию плоских линий.

Указанные цели исследования предопределяют решение следующих задач:

- установить конструктивную связь между прямыми 3-пространства и точками 4-пространства и разработать на этой основе способы задания линейчатых многообразий, определить существенные свойства линии пространства параметров, задающей поверхность 3-пространства, имеющую определенные дифференциально-геометрические свойства и наперед заданные условия;
- разработать способы задания циклических многообразий плоскости и пространства точечными образами пространства параметров с иллюстрацией выводов на конкретных примерах технических поверхностей;
- исследовать способы задания эллиптических, гиперболических и параболических многообразий в пространстве параметров, а также возможности конструирования поверхностей с указанными образующими;
- разработать задание в пространстве параметров поверхностей, состоящих из плоских и двумерных обводов, исследовать с этой точки зрения существующие и предложить новые способы построения обводов.

Методика проведения исследований. Решение поставленных задач осуществлялось на основании методов начертательной геометрии с использованием аппарата и результатов аналитической, дифференциальной и многомерной геометрии. Основой исследований являлась следующая схема:

1. Введение целесообразной параметризация объекта $Ф$.
2. Установление взаимно однозначного соответствия между 3 - пространством объектов $Ф^3$ и пространством параметров $У^n$.
3. Определение алгоритма $щ$ перехода от параметрического задания объекта $Ф$ к точечному.

Научная новизна результатов исследований. В работе:

- предложен новый метод задания поверхностей с наперед заданной образующей, на основании которого разработан метод их конструирования;
- получено общее соотношение связи 3-пространства объектов и

пространства их параметров;

- разработан новый способ конструирования гиперболы и параболы;
- решен вопрос об аналитическом задании дуги обвода, построенной методом двух отношений.

Практическая ценность. Результаты данной работы позволяют исследования сложных многообразий *3*-пространства заменить исследованием более простых точечных их аналогов. Задачи конструирования поверхностей по наперед заданным условиям сводятся к проведению линий. Полученные уравнения в общем виде позволяют после подстановки конкретных функций иметь уравнение конструируемой поверхности.

Реализация результатов исследования. Решена задача графического и аналитического задания рыхлительной лапы культиватора перенесением в пространство параметров, которое легло в основу расчетов сечений и других характеристик лапы на ЭВМ "Мир-2" в Мелитопольском институте механизация сельского хозяйства. Составлен алгоритм программы для ЭВМ по конструированию поверхности лопатки турбины для Харьковского турбинного завода им. С.М. Кирова, При конструировании поверхности лопатки учтены девять наперед заданных требований. Просчитан конкретный пример поверхности лопатки.

Апробация работы. Основное содержание работы доложено и обсуждено на ежегодных научных конференциях Макеевского инженерно-строительного института (1973-1977); на Московском семинаре "Кибернетика графики", при МАИ (май 1976 г.); на аспирантском семинаре, руководимом проф. Котовым И.И. (октябрь 1976 г»); на научно-технической конференции Мелитопольского института механизации сельского хозяйства (март 1977 г.); на республиканской конференции по прикладной геометрии и инженерной графике (Киев, ноябрь 1976 г.).

Публикации. По теме диссертации авторов опубликовано 3 научных статьи.

Объем работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, списка использованной литературы (55 наименований) и содержит 142 страницы машинописного текста, 25 страниц рисунков, 6 страниц таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Отображение линейчатых образов *3*-пространства в *4*-пространстве параметров

Даны три вида параметризации прямой, выработанных инженерной практикой:

- прямая задается следами $L_{34} \in \Pi_2$, $L_{21} \in \Pi_3$

и точкой соответствия L_{24}. Тогда линия $\varphi \in У^4$ однозначно определяет уравнение линейчатого каркаса поверхности:

$$\frac{x}{y_4} = \frac{\varphi_{14} - y}{\varphi_{14}} = \frac{z - \varphi_{24}}{\varphi_{34} - \varphi_{24}},$$

где x, y, z - текущие координаты точек поверхности;

y_4 - параметр;

$ц_{i4}$ - функции от параметра; проекции линии $ц$.

При исключении параметра y_4 получим уравнение линейчатой поверхности в неявной виде;

- прямая задается следом $L_{34} \in П_2$ и направляющим вектором $n\{y_4, y_1, y_2\}$. Уравнение каркаса имеет вид:

$$\frac{x - y_4}{y_4} = \frac{y}{\varphi_{14}} = \frac{z - \varphi_{34}}{\varphi_{24}}$$

- третья параметризация является комбинацией первых двух.

Уравнение каркаса:

$$\frac{x}{y_4} = \frac{\varphi_{14} - y}{\varphi_{14}} = \frac{z + \varphi_{24} - \varphi_{34}}{\varphi_{24}}$$

Каждая из параметризаций представляет собой обобщение выработанных практикой заданий линейчатой поверхности. Выработаны методические рекомендации выбора оптимальной параметризации при решении конкретных задач, связанных с линейчатыми поверхностями. Все исследования направлены на конструирование и исследование характеристик сконструированных поверхностей. Часто возникает необходимость конструирования поверхностей с наперед заданными характеристиками. Это обусловило определить:

- формулу порядка линейчатой поверхности

$$n = n_2 \left[\max(n_1, n_2, n_3) + 1\right]$$

где n_i - порядок линии $ц_{i4}$ ($i = 1,2,3$);

- условие наличия плоскости параллелизма

$$\begin{vmatrix} y_4 & \varphi_{14} & \varphi_{24} \\ \bar{y}_4 & \bar{y}_1 & \bar{y}_2 \\ \bar{\bar{y}}_4 & \bar{\bar{y}}_1 & \bar{\bar{y}}_2 \end{vmatrix} = 0$$

где y_4 - параметр;

$ц_{14}$, $ц_{24}$ - линии направления линейчатой поверхности;

$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_4, \bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \bar{\bar{y}}_4$ - постоянные числа, выделяющие две образующие поверхности;

- дифференциальное уравнение развертываемости поверхности

$$y_4 \varphi_{14}^{/} \varphi_{34}^{/} - \varphi_{14} \varphi_{34}^{/} + \varphi_{14} \varphi_{24}^{/} - \varphi_{14}^{/} \varphi_{24} = 0$$

где $\varphi_{ij}^{/}$ - производные по параметру y_4;

- условие наличия особых точек на поверхности

$$\begin{cases} y_4(x-y_4)\varphi_{14}^{/}-x\varphi_{14}=0 \\ y_4^2\varphi_{34}^{/}+y_4(x-y_4)\varphi_{24}^{/}-x\varphi_{24}=0 \end{cases}$$

где x - параметр (абсцисса точки);

- уравнение касательной плоскости к линейчатой поверхности

$$\begin{vmatrix} \tilde{x}-x & \tilde{y}y_4^2-y_4(x-y_4)\varphi_{14} & \tilde{z}y_4^2-y_4^2\varphi_{34}-y_4(x-y_4)\varphi_{24} \\ 1 & y_4\varphi_{14} & y_4\varphi_{24} \\ 0 & y_4(x-y_4)\varphi_{14}^{/}-x\varphi_{14} & y_4^2\varphi_{34}^{/}+y_4(x-y_4)\varphi_{24}^{/}-x\varphi_{24} \end{vmatrix}=0$$

где $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$ - текущие координаты точек касательной плоскости;

- коэффициенты первой и второй основных квадратичных форм линейчатой поверхности.

Все задачи конструирования линейчатых поверхностей по наперед заданным условиям сведены к конструированию линий определенных видов. Разработаны алгоритмы такого конструирования.

Так, например, при конструировании развертывающихся поверхностей мы приходим к дифференциальным уравнениям:

- при заданных направляющей $ц_{34}$ и линии направления $ц_{24}$ -

$$\ell n\varphi_{14}=\int\frac{\varphi_{34}^{/}-\varphi_{24}^{/}}{y_4\varphi_{34}^{/}-\varphi_{24}}dy_4$$

- при заданных направляющей $ц_{34}$ и линии направления $ц_{14}$ -

$$\varphi_{24}=e^{\int\bar{\varphi}_{14}dy_4}\left[c-\int(y_4\bar{\varphi}_{14}\varphi_{34}^{/}-\varphi_{34}^{/})e^{\int\bar{\varphi}_{14}dy_4}dy_4\right]$$

- при заданных линиях направления $ц_{14}$, $ц_{24}$ -

$$\varphi_{34}=\int\frac{\varphi_{14}^{/}\varphi_{24}-\varphi_{14}\varphi_{24}^{/}}{y_4\varphi_{14}^{/}-\varphi_{14}}dy_4$$

Отображение линий второго порядка в пространствах параметров

Точкам *3*-пространства ставится в соответствие множество окружностей плоскости. Однопараметрическому множеству окружностей плоскости соответствует линия пространства параметров $У^3$, конгруэнции окружностей - поверхность *3*-пространства параметров. Даны изображения и уравнения этих многообразий.

Эллипсу плоскости соответствует точка *5*-пространства параметров. Вид его параметризации может быть выбран в зависимости от конкретных задач. При получении аналитического алгоритма связи пространств при параметризации эллипса его осями использовано каноническое его уравнение в системе своих осей с последующим преобразованием координат. Этот прием часто будет применяться в последующем, в частности, при параметризации параболы вершиной и фокусом.

Прямая плоскости может определяться точкой плоскости с координатами, равными отрезкам, отсекаемым прямой на осях. Тогда пучку прямых соответствует гипербола, асимптотами которой являются прямые, параллельные осям координат. Это послужило основой для выработки параметризации гиперболы, инвариантной относительно аффинных преобразований. Подобная параметризация может быть использована как составная часть при задании пространственной гиперболы точкой пространства параметров $У^3$. Подобная идея была использована при разработке нового алгоритма построения дуги параболического обвода и на его основе - параболического обвода по различным наперед заданным условиям.

Алгоритм построения двумерного обвода (как будет показано в следующей главе) всецело зависит от алгоритма построения плоского обвода, поэтому представляло интерес использовать уже разработанные алгоритмы построения плоского обвода. Способ двух отношений является одним из лучших среди них, так как интуитивно чувствовалось, что обвод из таких дуг возможно составляет единую кривую неизвестного вида, а это автоматически должно дать обвод любого порядка гладкости. Ответить на эти вопросы можно, получив уравнение дуги кривой. Это побудило искать и найти вид дуги, построенной способом двух отношений. Построенная таким способом кривая представляет собой особую кривую трансцендентного вида, закономерную в смысле графического алгоритма, но не имеющую уравнения.

Как известно, необходимым условием задания дуги обвода является ее касательный треугольник. Отсюда следует, что дуга обвода должна быть не менее чем *4*-параметрической кривой.

Возник вопрос о необходимом условии задания *3*-параметрической дуги окружности. На этой основе получено условие замкнутого обвода из дуг окружностей. Так, замкнутый обвод из дуг окружностей, если он существует, определяется точками сопряжения его дуг. Аналитическое конструктивное доказательство этого утверждения путем выявления второго дополнительного решения привело к необходимости уточнения существующего определения обвода.

Отношение поверхностей в пространствах параметров

Размерность пространства, соответственного пространству кривых K^3, равна размерности пространства K^2 плюс три параметра, определяющие плоскость кривой *К*. Отсюда следует, что окружности *3*-пространства соответствует точка *6*-пространства. Плоскость удобно задать точкой на следе, угловым коэффициентом следа и косинусом угла наклона ее к горизонтальной плоскости проекций. Перенесением в пространство параметров получены общие уравнения поверхностей с круговой, эллиптической, параболической и гиперболической образующей.

При задании циклических поверхностей были рассмотрены примеры поверхностей постоянного и переменного радиуса, в частности, циклида Дюпена. Пространственные эллиптические многообразия рассмотрены на примере софокусных эллиптических орбит спутников Солнца, что позволило снизить до шести мерность пространства параметров.

Показано, что двумерный обвод из *К* *S*-параметрических отсеков однозначно определяется линией (*3к + s + 2*)-мерного пространства параметров и алгоритмом *щ* построения отдельной его дуги ($S \geq 4$). Отсюда следует, что построение двумерного обвода существенно зависит от алгоритма *щ* построения плоского обвода.

На основе ранее полученного алгоритма построения дуги параболы разработан метод пространственной параболической аппроксимации, который был использован при конструировании поверхности лопатки турбины.

Конструирование технических поверхностей перенесением в пространство параметров

Указаны на технических примерах две возможности использования аппарата, разработанного выше.

Первая возможность заключается в задании закономерной поверхности лапы культиватора линией параметров. Это позволяет выделить ее любую окружность (плоскость окружности, центр, радиус и т.д.).
Исключение параметра позволяет получить уравнение этой циклической поверхности в неявном виде, что дает возможность исследовать эту поверхность или выделить любую линию на ней.

Вторая возможность конструирования двумерного обвода осуществлена на примере конструирования поверхности лопатки турбины для Харьковского турбинного завода им. С.М.Кирова. Заводом были предъявлены к поверхности следующие наперед заданные требования:

1. Поверхность должна проходить через три параллельные наперед заданные (проектные) сечения.
2. Каждое из проектных сечений представляет собой обвод из дуг окружностей и прямых.
3. Количество дуг и прямых в каждом сечении может быть различным.
4. Проектные, а также любые промежуточные сечения должны определяться точками сопряжения, центрами и радиусами дуг окружностей.
5. Метод должен дать возможность определять любое сечение конструируемой поверхности, параллельное проектным сечениям.
6. Если какие-либо три соответствующие точки пространства параметров принадлежат прямой, то и любые промежуточные соответствующие точки принадлежат этой прямой.
7. Если одноименные участки соседних проектных сечений представляют собой отрезки прямых, то и в любом сечении между ними соответствующий участок обвода должен оставаться отрезком прямой.
8. Если одноименные участки соседних проектных сечений представляют

собой дуги окружностей одного в того же радиуса, то и в любом сечении между ними соответствующий участок обвода должен оставаться дугой того же радиуса.

9. Радиусы в промежуточных сечениях должны изменяться равномерно без скачков.

Анализ поставленной задачи показал, что ее можно решить перенесением в пространство периметров. Интересно отметить, что существующее на заводе решение этой задачи, удовлетворяющее далеко не всем наперед заданным условиям, включает в себя элементы перенесения в пространство параметров.

Линия *ц* пространства параметров может быть только дугой обвода (в существующем решении она не дуга обвода, а ориентированная парабола).

На основании исследований второй и третьей глав задача была решена с учетом всех заданных и даже ряда дополнительных условий.

ВЫВОДЫ

В работе получены следующие результаты:

1. Исследована возможность конструктивного осуществления идеи перенесения, основанной на рассмотрении объектов *3*-пространства в *n*-пространстве параметров, которыми они определяются. Точке *n*-пространства соответствует объект *3*-пространства как единое целое.

2. В качестве объектов приняты прямая линия, а также кривые второго порядка, рассмотрены множества таких объектов, составляющих поверхность, конгруэнцию и комплекс линий и отображающихся в пространстве параметров линией, поверхностью, *3*-пространством соответственно.

3. Задача конструирования поверхности сведена к проведению линий в пространстве параметров. Получены уравнения линейчатых, циклических, а также поверхностей с параболической, гиперболической образующими в самом общем виде.

4. Получены уравнения, позволяющие определить порядок, а также основные дифференциально-геометрические характеристики линейчатых поверхностей, заданных в пространстве параметров. Определено условие развертываемости линейчатой поверхности, наличия плоскости параллелизма и т.д.

5. На примерах циклиды Дюпена и поверхности лапы культиватора показано конструирование циклических поверхностей линией пространства параметров.

6. Разработаны алгоритмы перехода от точечного задания объектов к их параметрам и наоборот.

7. Рассмотрены, уточнены известные и предложены новые способы построения плоских кривых и их обводов. В частности, доказано, что в результате построений способом двух отношений получается кривая трансцендентного вида, закономерная в смысле графического алгоритма, но не имеющая уравнения.

8. Сконструирована поверхность лопатки турбины по наперед заданным

условиям для Харьковского турбинного завода им. С.М.Кирова, составлен алгоритм программы для расчета на ЭВМ и просчитан контрольный пример.

По теме диссертации автором опубликованы следующие работы:

1. Задание циклических многообразий точечными образами многомерного пространства. Депонирована в ВИНИТИ, № 2673-76 Деп.

2. К вопросу аппроксимации кривых дугами парабол. Тезисы докладов Республиканской конференции по прикладной геометрии и инженерной графике. Киев, "Наукова думка", 1976.

3. Конструирование обводов перенесением в пространство параметров. Депонирована в ВИНИТИ, № 1412-77 Деп.

МАДИ. Л - 40626 от 2 .06.78 г. а.631 т.120