

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ

Киевский ордена Трудового Красного Знамени
инженерно-строительный институт

На правах рукописи



НАЙДЫШ Андрей Владимирович

УДК 515.2:681.3

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
КРИВЫХ ЛИНИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ
МЕТОДОМ АДАПТИВНОЙ
ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Специальность 05.01.01 — Прикладная геометрия
и инженерная графика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Киев — 1992

Диссертационная работа выполнена в Мелитопольском ордена Трудового Красного Знамени институте механизации сельского хозяйства.

Научный руководитель — заслуженный деятель науки Украины, доктор технических наук, профессор Михайленко В. Е.

Официальные оппоненты:

доктор технических наук, профессор Бадаев Ю. И.
кандидат технических наук, доцент Седлецкая Н. И.

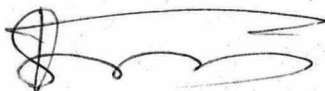
Ведущее предприятие — производственное объединение «АвтоЗАЗ».

Защита состоится 17 июня 1992 г. в 13 часов на заседании специализированного совета Д068.05.03 в Киевском ордена Трудового Красного Знамени инженерно-строительном институте по адресу: 252037, г. Киев, Воздухофлотский проспект, 31.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Киевского ордена Трудового Красного Знамени инженерно-строительного института.

Автореферат разослан « 7 » _____ 5 _____ 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
кандидат технических наук, доцент



В. А. ПЛОСКИЙ

Подписано к печати 4. 05. 92. Объем 1,375 п. л.
Формат 60×84_{1/16}. Заказ 1224. Тираж 100.
Типография ВА ПВО СВ.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Геометрическое моделирование является мощным инструментом решения многих научных и производственных задач, основой создания новых САПР на базе современных ЭВМ. Среди объектов моделирования исключительное место занимают дискретно представленные кривые (ДПК) и поверхности (ДПП); в задачу моделирования которых входит получение расчетных алгоритмов или формул приближения функций.

Основой геометрического моделирования и составления расчетных алгоритмов являются методы прикладной геометрии кривых линий и поверхностей, в разработку которых большой вклад внесли ведущие отечественные ученые Вадаев Ю. И., Иванов Г. С., Ковалев С. Н., Котов И. И., Михайленко В. Е., Надолный В. А., Осипов В. А., Павлов А. В., Подгорный А. Л., Подкорытов А. Н., Полозов В. С., Рыжов Н. Н., Скидан И. А., Тевлин А. М., Филиппов П. В., Якунин В. И. и их ученики, а также зарубежные ученые Безье Р., Гилой В., Кунс С., Ньюмен У., Принс М., Сазерленд А., Фокс А., Форрест А. и другие, интенсивно развивающие методы вычислительной геометрии.

Из множества методов моделирования важная роль принадлежит теории интерполяции, к числу наиболее распространенных функций которой относятся алгебраические, показательные и тригонометрические полиномы, составляющие полную систему функций Чебышева на равномерной сетке узлов, что теоретически позволяет применять их для описания произвольных непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций. Однако заданное множество узлов накладывает такие ограничения, что процесс интерполяции становится неустойчивым, возникают осцилляции, погрешности в несколько раз превышают истинные значения.

В процессе интерполяции участвуют ДПК, с одной стороны, и возможности конкретного интерполяционного аппарата, с другой, на фоне высоких требований к точности и скорости обработки информации. Одной из причин снижения точности является несоответствие дифференциально-геометрических характеристик ДПК и их моделей. В связи с этим актуальной проблемой является подбор такой модели, характеристики которой соответствуют заданной ДПК. Возможно-

сти повышения точности неизмеримо возрастают, если решение искать на множестве указанных полиномов, т.к. каждый из них обладает своими особенностями и их учет при составлении и использовании моделей может повысить устойчивость процесса и снизить осцилляцию решения. В связи с этим возникают 2 проблемы: 1) разработка критериев соответствия ДПК и модели, анализ ДПК и расчет характеристик, по которым происходит сравнение геометрии ДПК и модели; 2) оценка погрешности метода и разработка мер по ее уменьшению. **Цель работы** состоит в разработке, программной реализации и практическом внедрении метода интерполяции, обеспечивающего минимальную погрешность приближения.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

- разработка способа анализа исходных данных с целью установления соответствия геометрии ДПК или ДПП и интерполирующей функции;
- формирование интерполирующего аппарата;
- оценка погрешности интерполяции;
- разработка алгоритмического и программного обеспечения предлагаемого метода;
- практическое внедрение результатов исследований.

Методика исследований. В процессе решения поставленных в работе задач использовались методы начертательной, аналитической и дифференциальной геометрии; теории интерполяции; математического анализа и вычислительных методов.

Научную новизну работы составляет метод адаптивной полиномиальной интерполяции, включающий в себя следующие новые результаты и понятия:

- понятие обобщенных разделенных разностей и способ их расчета;
- интерполяционные формулы на основе обобщенных разделенных разностей;
- понятие обобщенных производных, их формирование и расчет;
- оценка предельной погрешности показательной и тригонометрической интерполяций;
- зависимость погрешности от переноса и сжатия отрезка интерполяции;
- способ адаптивного определения алгебраической производной в

заданной точке ДПК;

- способ адаптивной дискретной полиномиальной интерполяции ДПК;
- обобщенные частные разделенные разности для ДПП;
- формулы двумерной интерполяции ДПП на основе обобщенных частных разделенных разностей.

Практическая ценность работы состоит в повышении точности расчетов, росте производительности труда проектировщика, получении качественно новых проектных решений на основе использования ДПП адаптивной полиномиальной интерполяции.

На защиту выносятся положения, представляющие научную новизну.

Реализация результатов исследований. Результаты исследований в виде ДПП внедрены в лаборатории коренной мелиорации склонов Украинского НИИ защиты почв от эрозии (г. Луганск) при подготовке исходных данных о рельефе местности и решении задач проектирования противозерозионных гидротехнических сооружений; при моделировании топографической поверхности в в/ч З5бЗЗ; в учебном процессе в ХВВКИУ РВ (г. Харьков).

Апробация работы. Основные результаты работы доложены и обсуждены на X Всесоюзном научно-методическом семинаре "Инженерная и машинная графика" в Полтаве в 1991 г., на Всесоюзной конференции "Компьютерная геометрия и графика в инженерном образовании" - "КОГРАФ-91" в Н-Новгороде в 1991 г., на международной конференции в Севастополе в 1991 г., на республиканском научно-практическом семинаре "Компьютерная графическая подготовка специалистов" в Битебске в 1992 г.; на семинаре "Прикладная геометрия и инженерная графика" КИСИ в 1991 г.; на научно-методических конференциях Мелитопольского института механизации сельского хозяйства в 1990, 1991, 1992 г.

Объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы из 194 наименований и приложения. Работа содержит 198 страниц машинописного текста, 59 рисунков и 18 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ

Во введении обоснована актуальность исследования, выполнен

обзор и критический анализ существующих методов моделирования ДПК и ДПП, сформулированы цели и задачи исследования, его научная новизна и практическая ценность.

В первой главе работы рассматриваются разделенные разности (РР), как средство анализа заданной ДПК. Алгебраические разделенные разности k -го порядка для заданного точечного ряда $\{x_i, y_i\}$, $i = \overline{0, m}$ определяются по формуле

$$[x_p \dots x_{p+k}] = \sum_{i=p}^{p+k} \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=p, j \neq i \\ j=p+k}}^{p+k} (x_i - x_j)}, \quad p = \overline{0; m-k}, \quad k = \overline{0; m}, \quad (1)$$

и названы нами алгебраическими потому, что их свойства соответствуют алгебраическим полиномам. Разность m -го порядка для $(m+1)$ заданных точек равна с.а.ршему коэффициенту a_m при x^m в уравнении алгебраического полинома. Если $a_m = 0$, то точки расположены на графике полинома степени $(m-1)$, если разности p -го порядка $(m-1)$ не равны нулю. Не равная нулю разность m -го порядка для $(m+1)$ точек показывает меру их приближения к графику полинома степени $(m-1)$.

Естественно, что не всегда точки ДПК тяготеют к графику алгебраического полинома. Предположим, что точки ДПК расположены на показательном полиноме

$$y = a_0 + a_1 \cdot c_1^x + a_2 \cdot c_2^x + \dots + a_m \cdot c_m^x \quad (2)$$

Введем показательные РР первого порядка $[x_p, x_{p+1}]_{c_i}$

$$[x_p, x_{p+1}]_{c_i} = \frac{y_{p+1} - y_p}{c_i^{x_{p+1}} - c_i^{x_p}}, \quad p = \overline{0; m-1}, \quad (3)$$

геометрическая суть которых на функциональной сетке $c_1^{x_0}, \dots, c_1^{x_m}$ представлена на рис. 1 в сравнении с алгебраическими РР.

В процессе перехода к функциональной сетке ДПК претерпевает деформацию растяжения - сжатия вдоль оси ОХ. Если точки исходной ДПК на равномерной сетке принадлежат полиному $y = a_0 + a_1 c_1^x$, то на сетке $c_1^{x_i}$ произойдет "выравнивание" полинома в прямую (рис. 2) т.е. показательный полином 1-го порядка на заданной сетке перейдет в алгебраический полином 1-го порядка на функциональной сетке.

Для m -й показательной РР на равномерной сетке с шагом h имеем

$$a_m = [x_0 \dots x_m]_{c_1 \dots c_m} = \frac{\sum_{k=0}^m y_k \cdot s_m^{m-k}}{c_m^{x_0} (c_m^h - c_m^0) (c_m^h - c_m^1) \dots (c_m^h - c_m^{m-1})}, \quad (4)$$

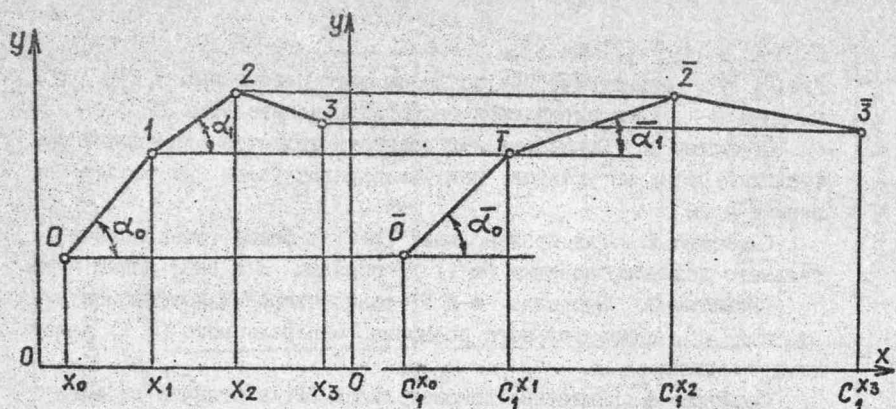


Рис. 1. Геометрический смысл алгебраической и показательной разделенных разностей.

$$[x_0 x_1]_{\alpha} = \operatorname{tg} \alpha_0$$

$$[x_0 x_1]_{c_1} = \operatorname{tg} \bar{\alpha}_0$$

$$[x_1 x_2]_{\alpha} = \operatorname{tg} \alpha_1$$

$$[x_1 x_2]_{c_1} = \operatorname{tg} \bar{\alpha}_1$$

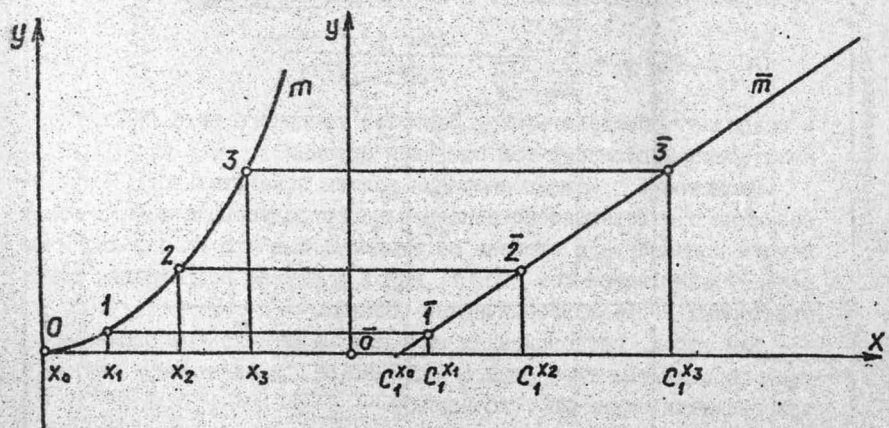


Рис. 2. Выравнивание полинома $y = a_0 + a_1 c_1^x$ на показательной сетке $c_1^{x_i}$, $i = \bar{0}; \bar{3}$.

где S_m^{m-k} - симметрические полиномы от m переменных $1, c_1^h, \dots, c_{m-1}^h$ порядка $m-k$. Рассматриваются свойства показательных РР.

Свойство 1. Показательная равенность является симметрической функцией своих аргументов, так что порядок узлов при расчете не играет роли.

Свойство 2. Для произвольных $(m+1)$ и более точек показательного полинома порядка $(m-1)$ РР порядка n и выше равны нулю.

Свойство 3. Значение m -й РР равно старшему коэффициенту a_m при c_m^h показательного полинома, определяемого $(n+1)$ заданными точками.

Свойство 4. Значение показательной РР, в отличие от алгебраической, зависит от положения отрезка интерполяции на оси ОХ.

Свойство 5. Показательные РР в значительной степени зависят от погрешностей исходных данных.

Свойства показательного полинома зависят от того, какими будут числа c_1, c_2, \dots, c_m . Практический интерес представляют полиномы, у которых $c_j = d^j$ d - неотрицательное, действительное число. В работе рассматриваются степенные показательные полиномы с основанием $d=2$ и экспоненциальные полиномы ($d=e$). Степенная показательная РР m -го порядка имеет вид

$$[x_0 \dots x_m]_d = \sum_{k=0}^m \frac{y_k}{\prod_{j=0, j \neq k}^m (d^{x_k} - d^{x_j})}; \quad (5)$$

и позволяет определять меру близости точечного ряда ДПК к показательному полиному той или иной степени.

Свойство 6. Каждая операция взятия показательной РР при основании d от степенного показательного полинома с тем же основанием понижает его степень на единицу, так что на определенном шаге РР обнуляются (см. рис. 3), как и в случае воздействия алгебраических РР на алгебраический полином.

Для точек, расположенных на графике четного тригонометрического полинома 1-го рода $y = a_j \cdot \cos jx$, предлагаются четные тригонометрические РР 1-го порядка

$$[x_p \ x_{p+1}]_{\cos} = \frac{y_{p+1} - y_p}{\cos x_{p+1} - \cos x_p}, \quad p = 0; m-1 \quad (6)$$

Значение РР равно тангенсу угла наклона звена ломаной точечного

Обобщенные разделенные разности различных ДПК

Графики дискретно представленных кривых

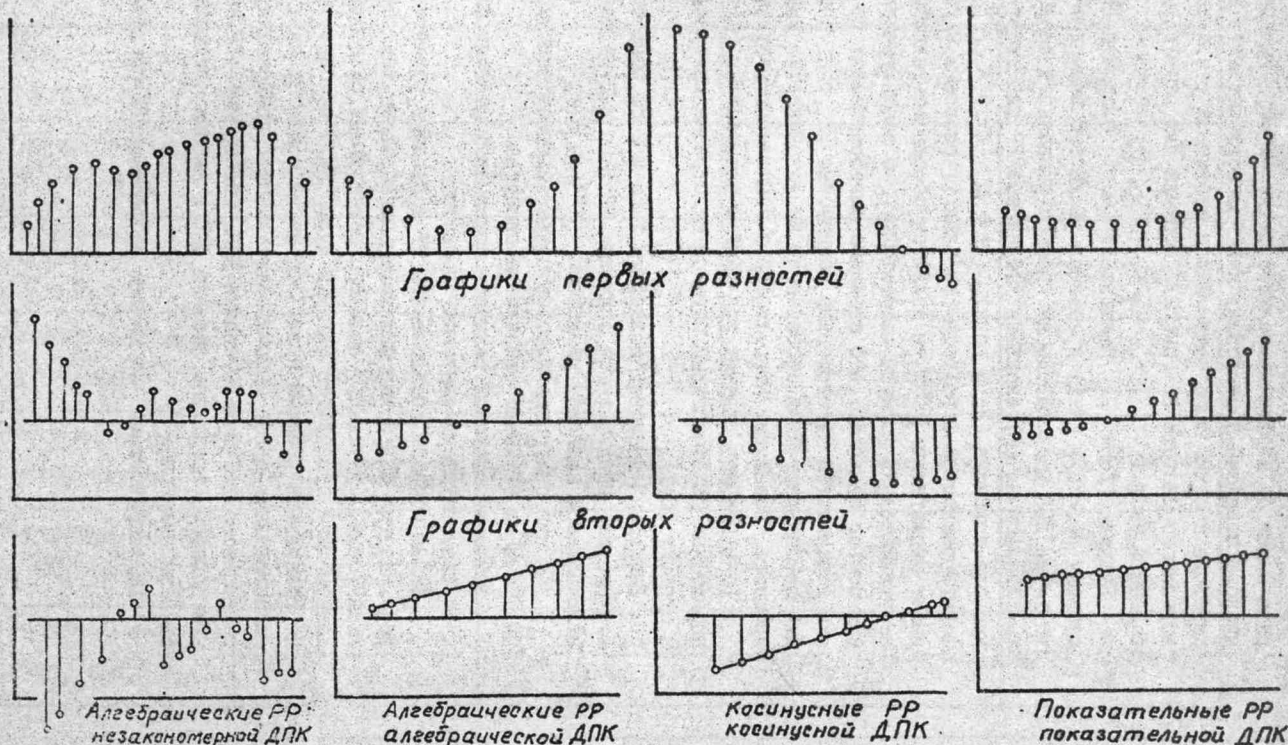


Рис. 3

ряда к оси OX на функциональной сетке $\cos x_i$. Выравнивание косинусного полинома происходит, как "по горизонтали", в процессе перехода к сетке $\cos x_i$, так и "по вертикали", в процессе последовательного расчета РР (рис. 3). Формулы для расчета m -й РР приведены в табл. 1.

Значение m -й РР показывает меру близости ДПК к косинусному полиному ($m-1$)-й степени. Если это значение равно нулю, то точки ДПК расположены на графике указанного полинома.

Аналогично (6) вводятся косинусные РР для степенного косинусного полинома (2-го рода) $y = a_j \cdot \cos^j x$. В отличие от формул разностей 1-го рода (см. табл. 1) разности 2-го рода не имеют множителей 2^{m-1} и являются обобщением алгебраических РР, если вместо x_j в формулы ввести $\cos x_j$. С геометрической точки зрения это не означает, что свойства алгебраических РР автоматически переносятся на степенные косинусные РР, т.к. поведение функции накладывает свои особенности на устойчивость вычислительного процесса, поведение погрешности и осцилляцию результатов.

Во избежание нулевых значений в знаменателе (6) при расчете косинусных РР обязателен переход от отрезка интерполяции $[x_0; x_m]$ к отрезку $[0; 1]$.

Для точек синусных полиномов 1-го и 2-го рода аналогично косинусным, предлагаются синусные РР 1-го и 2-го рода (см. табл. 1), отличающиеся наличием множителя $2^m \cdot \sin x_k$.

Так как синусоида и косинусоида являются конгруэнтными кривыми, то и их РР имеют одинаковые свойства.

Значение синусной разности показывает степень близости ДПК к соответствующему синусному полиному.

Таким образом предложенные РР позволяют расчетным путем определить тип ДПК и вид полинома (алгебраический, показательный, косинусный, синусный), если соответствующие разности на определенном шаге становятся равными нулю. Если ни одна из разностей не становится равной нулю, то из их сопоставления (см. гл. 4) можно сделать вывод о предпочтительности применения того или иного полинома для моделирования ДПК. Обобщенные РР являются, таким образом, средством анализа ДПК и выбора оптимального вида и степени полинома.

Во второй главе на основе обобщенных РР предложены формулы

Таблица 1

N n/p	Вид полинома	Разделенная разность	Интерполяционная ф-ла в ф. Лагранжа	Интерполяционная ф-ла в ф. Ньютона	Остаточный член
1	Алгебраический $y = a_j \cdot x^j$	$PP_a = \sum_{k=0}^m \frac{y_k}{\prod_{j=0, j \neq k}^m x_k - x_j}$	$y = \sum_{k=0}^m y_k \prod_{j=0, j \neq k}^m \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$	$y = y_0 + \sum_{k=0}^m PP_a \cdot \prod_{j=0}^{m-1} (x - x_j)$	$R_a = PP_a \cdot \prod_{j=0}^m (x - x_j)$
2	Показательный $y = a_0 + a_j \cdot e^{x_j}$	$PP_n = \frac{\sum_{k=0}^m y_k \cdot S_m^{m-k}}{C_m^{x_0} (C_m^{n_1}) \dots (C_m^{n_{m-1}})}$	$y = \sum_{k=0}^m y_k \cdot \frac{\Delta^k}{\Delta}$	—	$R_n = PP_n \cdot \frac{\Delta}{\Delta}$
3	Степенной показательный $y = a_j d^{jx}$	$PP_d = \sum_{k=0}^m \frac{y_k}{\prod_{j=0, j \neq k}^m (d^{x_k} - d^{x_j})}$	$y = \sum_{k=0}^m y_k \cdot \prod_{j=0, j \neq k}^m \frac{d^x - d^{x_j}}{d^{x_k} - d^{x_j}}$	$y = y_0 + \sum_{k=0}^m PP_d \cdot \prod_{j=0}^{m-1} (d^x - d^{x_j})$	$R_d = PP_d \cdot \prod_{j=0}^m (d^x - d^{x_j})$
4	Косинусный 1-го рода $y = a_j \cdot \cos jx$	$PP_{\cos 1} = \sum_{k=0}^m \frac{y_k}{2^{m-1} \prod_{j=0, j \neq k}^m (\cos x_k - \cos x_j)}$	$y = \sum_{k=0}^m y_k \cdot \prod_{j=0, j \neq k}^m \frac{\cos x - \cos x_j}{\cos x_k - \cos x_j}$	$y = y_0 + \sum_{k=0}^m PP_{\cos 1} \cdot 2^{m-1} \prod_{j=0}^{m-1} (\cos x - \cos x_j)$	$R_{\cos 1} = PP_{\cos 1} \cdot 2^{m-1} \cdot \prod_{j=0}^m (\cos x - \cos x_j)$
5	Косинусный 2-го рода $y = a_j \cdot \cos^2 x$	$PP_{\cos 2} = \sum_{k=0}^m \frac{y_k}{\prod_{j=0, j \neq k}^m (\cos^2 x_k - \cos^2 x_j)}$	$y = \sum_{k=0}^m y_k \cdot \prod_{j=0, j \neq k}^m \frac{\cos^2 x - \cos^2 x_j}{\cos^2 x_k - \cos^2 x_j}$	$y = y_0 + \sum_{k=0}^m PP_{\cos 2} \cdot \prod_{j=0}^m (\cos^2 x - \cos^2 x_j)$	$R_{\cos 2} = PP_{\cos 2} \cdot \prod_{j=0}^m (\cos^2 x - \cos^2 x_j)$
6	Синусный 1-го рода $y = a_j \cdot \sin jx$	$PP_{\sin 1} = \sum_{k=0}^m \frac{y_k}{2^m \sin x_k \prod_{j=0, j \neq k}^m (\cos x_k - \cos x_j)}$	$y = \sum_{k=0}^m y_k \cdot \frac{\sin x}{\sin x_k} \prod_{j=0, j \neq k}^m \frac{\cos x - \cos x_j}{\cos x_k - \cos x_j}$	$y = y_0 + \sum_{k=0}^m PP_{\sin 1} \cdot 2^m \prod_{j=0}^{m-1} (\cos x - \cos x_j)$	$R_{\sin 1} = PP_{\sin 1} \cdot 2^m \cdot \prod_{j=0}^m (\cos x - \cos x_j)$
7	Синусный 2-го рода $y = a_j \cdot \sin^2 x$	$PP_{\sin 2} = \sum_{k=0}^m \frac{y_k}{\prod_{j=0, j \neq k}^m (\sin^2 x_k - \sin^2 x_j)}$	$y = \sum_{k=0}^m y_k \cdot \prod_{j=0, j \neq k}^m \frac{\sin^2 x - \sin^2 x_j}{\sin^2 x_k - \sin^2 x_j}$	$y = y_0 + \sum_{k=0}^m PP_{\sin 2} \cdot \prod_{j=0}^m (\sin^2 x - \sin^2 x_j)$	$R_{\sin 2} = PP_{\sin 2} \cdot \prod_{j=0}^m (\sin^2 x - \sin^2 x_j)$

полиномиальной интерполяции. За основу взяты известные алгебраические формулы Лагранжа

$$y = \sum_{k=0}^m y_k \cdot \prod_{j=0, j \neq k}^m \frac{x - x_j}{x_k - x_j} + R_a(x) \quad (7)$$

и Ньютона

$$\dot{y} = y_0 + \sum_{k=1}^m [x_0 \dots x_k]_a \cdot \Psi_{ak}(x) + R_a(x) \quad (8)$$

с остаточным членом $R_a(x) = [x_0 \dots x_m]_a \cdot \Psi_{am}(x)$, где $\Psi_{as} = \prod_{j=0}^s (x - x_j)$ - алгебраический фундаментальный полином, $s = \overline{1; m}$

На основе степенных показательных РР предложены для показательных ДПК интерполяционные формулы в форме Лагранжа

$$y = \sum_{k=0}^m y_k \cdot \prod_{j=0, j \neq k}^m \frac{d^x - d^{x_j}}{d^{x_k} - d^{x_j}} + R_d(x) \quad (9)$$

и в форме Ньютона

$$y = y_0 + \sum_{k=1}^m [x_0 \dots x_k]_d \cdot \Psi_{dk}(x) + R_d(x) \quad (10)$$

с остаточным членом

$$R_d(x) = [x_0 \dots x_m]_d \cdot \Psi_{dm}(x); \Psi_{ds}(x) = \prod_{j=0}^s (d^x - d^{x_j}), s = \overline{1; m} \quad (11)$$

Представление формул в форме Ньютона обладает многими вычислительными преимуществами по сравнению с формой Лагранжа.

Аналогичные формулы предложены для тригонометрической интерполяции (см. табл. 1).

Для сравнения различных моделей одной и той же незакономерной ДПК в табл. 2 представлены результаты интерполяции (абсциссы узлов подчеркнуты), откуда видно, что косинусная модель, геометрия которой в наибольшей мере не соответствует ДПК, на отрезке $[0,74; 1,06]$ осциллирует.

В третьей главе предложены обобщенные производные, как предельное значение соответствующей обобщенной РР.

Рассматриваются алгебраические производные, как предел соответствующей алгебраической разности при стягивании определяющих ее точек в одну. Показывается, что последовательное воздействие оператора алгебраической производной на алгебраический

Таблица 2

Ордината Y	Алгебраическая модель	Показательная модель	Косинусная модель	Синусная модель
Абсцисса X				
0,07	30,0000	30,0000	30,0000	30,0000
0,12	54,4000	54,1446	47,6594	54,6728
0,19	78,0000	78,0000	78,0000	77,9999
0,25	90,3970	90,6547	90,8166	90,1502
0,33	98,5650	98,8604	111,3370	98,3049
0,39	100,1990	100,3133	106,3975	99,8967
0,42	100,0000	100,0000	100,0000	100,0003
0,52	96,4269	96,2147	23,8635	96,5754
0,54	95,4340	95,2374	7,4650	95,5679
0,61	91,9996	92,0001	91,9999	92,0001
0,69	89,3160	89,5212	103,7914	89,2079
0,74	88,9989	89,0002	88,9996	89,0001
0,80	90,6187	89,6728	18,1990	91,0386
0,81	91,1413	89,9447	-0,9101	91,6625
0,98	114,6536	97,8222	-434,9464	116,7626
1,05	134,5522	132,8553	-18,0744	137,0328
1,06	137,9998	137,9999	137,9981	138,0004

полином понижает его степень и приводит в конце концов к нулевым значениям. Другие полиномы являются бесконечно дифференцируемыми функциями в смысле алгебраической производной.

Вводится показательная производная y'_n , как предел отношения (3) при $x_{p+1} \rightarrow x_p$. Имк эм

$$y'_n = \frac{y'_a}{\ell_n c_1 \cdot c_1^x} \quad (12)$$

Последовательное воздействие оператора показательной производной на показательный полином понижает его степень и приводит к постоянной

$$y_{c_1 \dots c_m}^{(m)} = a_m \cdot \frac{\ell_n c_m \cdot \ell_n \frac{c_m}{c_1} \cdot \ell_n \frac{c_m}{c_2} \dots \ell_n \frac{c_m}{c_{m-2}}}{\ell_n c_1 \cdot \ell_n \frac{c_2}{c_1} \cdot \ell_n \frac{c_3}{c_2} \dots \ell_n \frac{c_{m-1}}{c_{m-2}}} \quad (13)$$

На следующем шаге $y_{c_1 \dots c_m}^{(m+1)} = 0$. Другие полиномы являются бесконечно дифференцируемыми в смысле производной (12).

Рассматриваются степенные показательные производные по основанию d и, в частности, экспоненциальные производные соответствующих полиномов, а также произвольной непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$.

$$f_{\xi}^{(\kappa)} = \frac{1}{e^{\kappa x}} \left[f^{(\kappa)} - f^{(\kappa-1)} \cdot \sum_{i=1}^{\kappa-1} i + f^{(\kappa-2)} \cdot \sum_{1 \leq i < j}^{\kappa-2} i \cdot j - \right. \\ \left. - f^{(\kappa-3)} \sum_{1 \leq i < j < s} i \cdot j \cdot s + \dots + (-1)^{\kappa-1} \frac{1}{\kappa!} \cdot (\kappa-1)! \right], \quad \kappa = \overline{1; m}. \quad (14)$$

Показательный полином общего вида является конечно дифференцируемой функцией в смысле экспоненциальной производной.

С геометрической точки зрения значение показательной производной по основанию C_1 равно тангенсу угла наклона к оси OX касательной к графику функции на функциональной сетке C_1^x .

Вводится понятие четной тригонометрической (косинусной) производной y'_{\cos} , как предел отношения (6) при $x_{p+1} \rightarrow x_p$,

$$y'_{\cos} = \frac{y'_a}{-\sin x}. \quad (15)$$

Старшая косинусная производная для косинусного полинома 1-го рода равна

$$y'_{\cos}^{(m)} = a_m \cdot m! \cdot 2^m, \quad (16)$$

а для степенного косинусного полинома

$$y'_{\cos}^{(m)} = a_m \cdot m!. \quad (17)$$

Остальные полиномы бесконечно дифференцируемы в смысле производной (15).

Для произвольной функции $f(x)$ косинусные производные можно рассчитать по рекуррентной формуле

$$f'_{\cos}^{(\kappa)} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{d}{dx} (f_{\cos}^{(\kappa-1)}), \quad f_{\cos}^0 = f'_a, \quad \kappa = \overline{1; m}. \quad (18)$$

Вводится понятие нечетной тригонометрической (синусной) производной

$$y'_s = \frac{f'_a}{\cos x} \quad (19)$$

Степенной синусный полином (2-го рода) является конечно дифференцируемой функцией в смысле производной (19), так что

$$y'_s^{(m)} = a_m \cdot m! \quad (20)$$

Остальные полиномы - бесконечно дифференцируемы в смысле (19).

Для произвольной функции $f(x)$

$$f'_s^{(\kappa)} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{d}{dx} (f'_{s}^{(\kappa-1)}), \quad f'_s^0 = f'_a, \quad \kappa = \overline{1; m}. \quad (21)$$

Рассматривается взаимосвязь между обобщенными производными и соответствующими разделенными разностями. Во всех случаях она имеет вид

$$[x_0 \dots x_m] = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}, \quad \xi \in [x_0; x_m], \quad (22)$$

откуда вытекает $[x_0 \dots x_m] = a$ и $f^{(m)}(x) = a_m \cdot m!$ для всех видов степенных полиномов и им соответственных производных.

В четвертой главе рассматривается оценка погрешности интерполяции некоторой функции $f(x)$ предложенными в гл. 2 полиномами $P(x)$. При этом учитывается то, что погрешность $R(x) = f(x) - P(x)$ есть функция от x , поэтому отыскивается предельная ее оценка в предположении, что разделенная разность $[x_0 \dots x_m]$ и фундаментальный полином $\Psi(x)$ принимают свои максимальные по модулю значения.

$$R(x) = f(x) - P(x) = [x_0 \dots x_m] \cdot \Psi(x) \quad (23)$$

Имея в виду, что $f(x)$ - $(m+1)$ раз дифференцируемая функция, $P(x)$ - один из рассматриваемых полиномов степени m , $\Psi(x)$ - соответственный ему полином степени $(m+1)$, и дифференцируя $(m+1)$ раз обе части (23) соответствующей виду полиномов $P(x)$ и $\Psi(x)$ производной, имеем равенство (22). Так как положение точки ξ неизвестно, то вместо $f^{(m)}(\xi)$ берется модуль-максимум M соответствующей старшей производной, т.е. $M = \max_x |f^{(m)}(x)|$. Тогда для всех полиномов предельная оценка $R_m(x)$ равна

$$R_m(x) = \frac{M}{(m+1)!} \cdot \Psi(x) \quad (24)$$

Из (24) следует, что если заданную $f(x)$ представить на соответствующей ей функциональной сетке так, что ее старшая производная, а значит и старшая РР (см. (22)), станет равной нулю то и погрешность интерполяции будет равна нулю. На этом и основан поиск вида функциональной сетки и расчет РР, чтобы узнать порядок полинома $P(x)$ и $\Psi(x)$, при которых $R_m(x) = 0$.

Рассматриваются факторы, влияющие на величину погрешности, из которых главным является несоответствие геометрии ДПК и интерполирующего полинома.

Исследуется возможность уменьшения погрешности интерполяции. Доказано, что перенос и сжатие отрезка интерполяции не влияет на

величину погрешности алгебраической интерполяции, для степенной показательной интерполяции только перенос не влияет на величину погрешности. При сжатии отрезка погрешность показательной интерполяции уменьшается до тех пор, пока не становятся преобладающими погрешности вычислительного характера. При этом за счет изменения значений производных функции ДПК появляется возможность привести в соответствие геометрию преобразованной ДПК и интерполирующего полинома. На рис. 4 показаны графики показательного полинома с основанием 2 до сжатия отрезка (осциллирующая кривая) и после сжатия (штриховая линия), приведенные к одному (сжатому) отрезку.

Влияние сжатия отрезка и масштабирования исходных данных на поведение погрешности тригонометрической интерполяции не имеет четкой тенденции к уменьшению. Доказано, что при этом значение интерполирующей функции в начале отрезка меньше соответствующих значений алгебраической интерполяции, а в конце отрезка - больше, что подтверждается результатами табл. 2. Исследованы ситуации, при которых погрешность показательной и тригонометрической интерполяции может оказаться меньше алгебраической.

Исходя из поведения фундаментальных полиномов, имеющих глобальные экстремумы на первом или последнем участке отрезка, рекомендовано в начале отрезка применять алгебраическую или показательную интерполяцию, а в конце отрезка - синусную (см. табл. 2).

Даются рекомендации по выбору параметров интерполяции. В случае континуального задания кривой - это выбор сетки, вида и степени полинома за счет оптимальной дискретизации, в случае ДПК - это выбор адаптивного полинома, имеющего минимальную по сравнению с другими погрешность, так как сетка и степень полинома предопределены точечным рядом.

В пятой главе рассматривается суть метода адаптивной интерполяции, включающего в себя:

1. Переход от заданного отрезка $[X_0; X_m]$ к отрезку, обеспечивающему минимум погрешности;
2. Анализ ДПК при помощи обобщенных РР;
3. Расчет максимальных значений фундаментальных многочленов по каждому из полиномов;
4. Определение абсолютной величины R-последнего слагаемого в

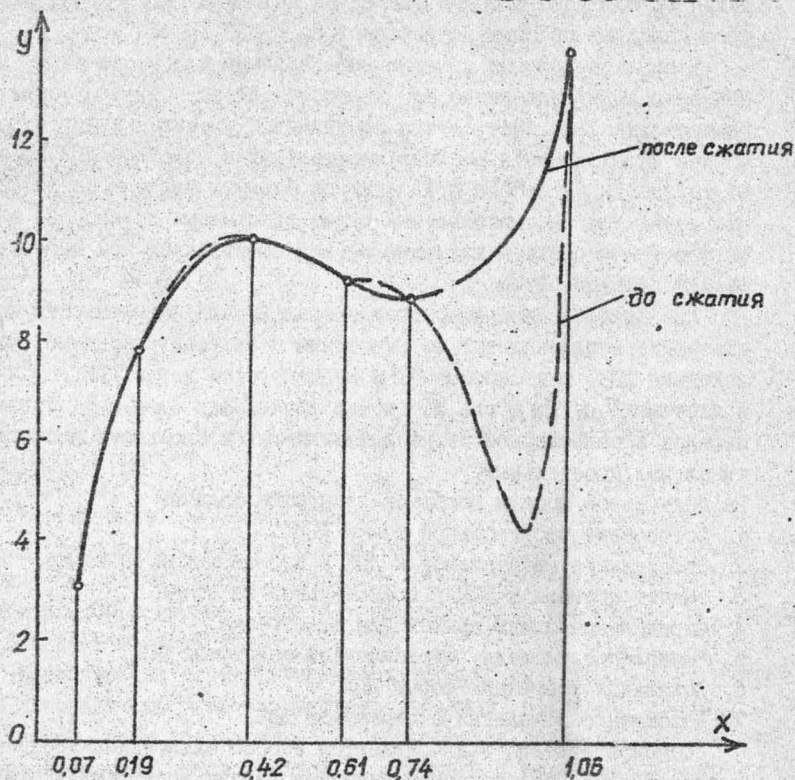


Рис. 4. Сравнение результатов показательной с основанием 2 интерполяции до и после сжатия отрезка интерполяции.

интерполяционных формулах в форме Ньютона и выбор адаптивного полинома по минимальному R .

5. Расчет ДПК и решение прикладной задачи.

Кроме глобальной полиномиальной интерполяции предлагается способ адаптивной дискретной интерполяции, заключающийся в построении точек сгущения на локальном участке на основе адаптивного полинома согласно приведенному выше алгоритму. Формулы для

расчета точек сгущения ДПК выбираются из табл. 1 для соответственного полинома в форме Лагранжа. Методика определения адаптивного полинома программно реализована в ППП "MODEL".

В процессе сжатия отрезка интерполяции или масштабирования ДПК происходит изменение ее дифференциально-геометрических характеристик. За счет этого достигается уменьшение погрешности, но при необходимости расчета касательных к исходной ДПК возникают трудности. В работе предлагаются формулы численного дифференцирования для рассматриваемых видов адаптивных полиномов, а также формулы пересчета значений первой производной при переходе к функциональной сетке.

Исследуется на примере горизонталей рельефа местности моделирование неоднозначных по отношению к аргументу функций, когда исходная ДПК m в системе Oxy моделируется двумя ДПК: m_x и m_y в системах OyN , OxN где N - номер точки. При этом осуществляется переход к равномерной сетке и появляется возможность расчета вертикальных касательных.

На полученной модели решаются следующие задачи:

1. Построение произвольной точки ДПК.
2. Определение касательной к ДПК в произвольной ее точке.
3. Расчет нормали к ДПК в произвольной ее точке.
4. Определение длины кривой или ее отрезка.
5. Вычисление площади, ограниченной замкнутой ДПК.
6. Локальная коррекция формы ДПК.
7. Нахождение локальных экстремумов ДПК.

Основой решения задач является способ адаптивной дискретной интерполяции. Перечисленное множество задач позволяет в автоматизированном режиме определить точки линий водотоков (линий наибольшего ската рельефа местности) и водоразделов (линий наименьшего ската). Методика расчета реализована в ППП "GORIZ" и внедрена в УНИИЗПЭ (г. Луганск) при проектировании противозерозионных гидротехнических сооружений.

При адаптивной дискретной интерполяции точки сгущения имеют погрешность, на 10-20% ниже предельной, что и обеспечивает хорошие результаты. Это обстоятельство используется в радиотелеметрии с целью уменьшения погрешности дискретизации при восстановлении параметра радиотехнического сигнала методом адаптивной

дискретной интерполяции. При этом, не снижая точности восстановления, на основе полинома 3 степени удается снизить частоту опроса и увеличить период дискретизации не менее чем на 12% и тем самым увеличить скорость обработки информации о сигнале, что особенно важно при передаче быстро меняющихся параметров.

Естественным обобщением адаптивного моделирования ДПК на плоскости является моделирование ДПП. Для заданного дискретного упорядоченного точечного каркаса $\{x_i, y_i, z_{ij}\}$, $i = \overline{0, m}, j = \overline{0, n}$, ДПП рассматриваются известные алгебраические двумерные модели в форме Лагранжа

$$Z_a(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n z_{ij} \cdot \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq i}}^m \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq j}}^n \frac{(x - x_i)(y - y_j)}{(x_p - x_i)(y_q - y_j)} \quad (25)$$

и в форме Ньютона

$$Z_a(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n [x_0 \dots x_i; y_0 \dots y_j]_a \cdot \prod_{p=0}^{i-1} (x - x_p) \cdot \prod_{q=0}^{j-1} (y - y_q), \quad (26)$$

где $[x_0 \dots x_i; y_0 \dots y_j]_a$ - частные алгебраические РР.

Рассматривается геометрическая суть частной смешанной РР $\Delta_{xy}^a z_{ij} = [x_i x_{i+1}; y_j y_{j+1}]$. При равенстве ее нулю четыре определяющие ее точки располагаются в одной плоскости, так что для многогранной поверхности из 4-угольных ячеек смешанные РР для каждой ячейки равны нулю.

Базируясь на геометрических представлениях, частные РР можно использовать для геометрического анализа исходных данных. В частности, если все частные РР 2-го порядка равны нулю, то точки каркаса располагаются в одной плоскости. У параболоида 2-го порядка все разности 3-го порядка равны нулю в то время, когда хотя бы одна из РР 2-го порядка не равна нулю. Используя результаты такого анализа, можно решить вопрос о целесообразности применения алгебраического полинома для моделирования заданной ДПП.

Естественно, что по аналогии с ДПК точки ДПП могут не относиться к алгебраическому типу, а представлять собой показательные или тригонометрические поверхности. Для обеспечения возможности их анализа вводятся частные степенные показательные РР с основаниями... d_1 по x и d_2 по y

$$[x_i x_{i+1}; y_j]_{d_1} = \frac{z_{i+1, j} - z_{i, j}}{d_1^{x_{i+1}} - d_1^{x_i}}; [x_i; y_j y_{j+1}]_{d_2} = \frac{z_{i, j+1} - z_{i, j}}{d_2^{y_{j+1}} - d_2^{y_j}}; \quad (27)$$

и т. д. Предлагаются формулы показательной двумерной интерполяции в форме Ньютона, если в (25) и (26) заменить x на d_1^x и y на d_2^y .

На основе частных показательных РР можно осуществить, аналогично частным алгебраическим РР, анализ ДПП с целью дальнейшего моделирования её показательными двумерными моделями. Так, например, для показательного полинома $Z = a_{00} + a_{10}d_1^x + a_{01}d_2^y + a_{11}d_1^x d_2^y + a_{20}d_1^{2x} + a_{02}d_2^{2y}$ частные показательные РР третьего порядка во всех точках каркаса равны нулю, а вторые РР - не равны нулю (рис. 5). Этот анализ можно продолжить для разностей более высокого порядка.

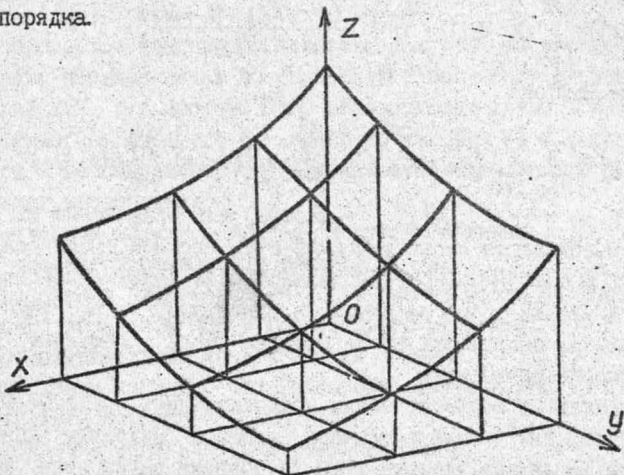


Рис. 5. Каркас ДПП показательного полинома 2-го порядка ($\Delta_{xxx}^{d_1} = \Delta_{xyy}^{d_1 d_2} = \Delta_{xyy}^{d_1 d_2} = \Delta_{yyy}^{d_2} = 0$, $\Delta_{xx}^{d_1} \neq \Delta_{xy}^{d_1 d_2} \neq \Delta_{yy}^{d_2} \neq 0$)

Вводятся понятия четной и нечетной частных тригонометрических разностей, даются способы их расчета и анализ ДПП на их основе с целью установления соответствия геометрии ДПП и модели, в качестве которой предлагаются двумерные четные и нечетные тригонометрические полиномы в форме Лагранжа и в форме Ньютона.

Таким образом введенные 4 типа частных РР позволяют осуществить дискретный анализ ДПП и определить тип интерполирующего полинома, если соответствующие РР становятся равными нулю. Если этого не происходит, то адаптивный полином выбирается по минимуму абсолютной величины алгебраической суммы последних слагаемых в формуле в форме Ньютона, содержащих разности одного и того же порядка.

В процессе дискретного анализа ДПП может оказаться, что одни ее участки лучше рассчитывать по алгоритмам одного полинома, другие - другого полинома, возникают сложности с устойчивостью вычислительного процесса при расчете переходных участков. В работе реализован метод последовательной интерполяции, когда вначале интерполируются строки точечного массива ДПП, а затем столбцы или наоборот. Такая методика позволяет полностью использовать программное обеспечение моделирования ДПК. В рамках предложенной модели решены следующие задачи:

1. Построение произвольной точки ДПП.
2. Определение вектора нормали в произвольной точке ДПП.
3. Построение линии пересечения ДПП плоскостью.
4. Локальная коррекция ДПП.

Адаптивная последовательная интерполяция ДПП, решение указанных задач программно реализованы в ППП RASPOV.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследования, проведенные в рамках диссертационной работы, позволили получить следующие результаты, обладающие научной новизной и практической ценностью.

1. Предложен, исследован и практически внедрен метод адаптивной полиномиальной интерполяции, в рамках которого получены новые теоретические результаты.
2. Введены понятия и предложены способы расчета, исследованы свойства и установлен геометрический смысл обобщенных разделенных разностей, на основании которых осуществляется анализ ДПК и отнесение ее к незакономерному, алгебраическому, показательному, косинусному или синусному типу.
3. На основе указанных обобщенных разделенных разностей полу-

чены интерполяционные формулы, соответствующие отмеченным типам ДПК, в форме Лагранжа и форме Ньютона с остаточными членами.

4. Предложены обобщенные производные, позволяющие произвести оценку предельной погрешности соответствующей интерполяции.

5. Исследовано влияние переноса и сжатия отрезка интерполяции на величину погрешности, позволяющее целенаправленно выбирать параметры интерполяции с целью достижения заданной точности.

6. С целью повышения точности приближения, быстродействия алгоритмов, экономии машинных ресурсов предложен способ адаптивной дискретной интерполяции, органически дополняющий предложенный в работе метод и эффективно осуществляющий локальные приближения.

7. Предложены понятия, способы расчета, исследованы некоторые свойства и геометрический смысл обобщенных частных разделенных разностей, на основе которых осуществляется анализ ДПК и выбор интерполирующего аппарата.

8. Получены формулы двумерной интерполяции в форме Лагранжа и Ньютона на основе обобщенных частных разделенных разностей, на основе которых можно осуществить как глобальную, так и локальную интерполяцию.

9. Решения задач геометрического моделирования на основе предложенного метода адаптивной полиномиальной интерполяции программно реализованы в ППП расчета ДПК и ДПП и внедрены в условиях проектирования противозерозионных гидротехнических сооружений в УНИИЗПЭ (г. Луганск), при моделировании и расчете топографической поверхности (в/ч 35533), в учебном процессе ХВВКУ РВ (г. Харьков).

Предложенный при разработке метода подход позволяет привлечь другие системы функций, получить новые интерполяционные формулы и тем самым расширить спектр решаемых задач и возможности проектировщика.

Основное направление дальнейших исследований - более глубокая и обширная разработка вопросов геометрического моделирования ДПП, расширение круга решаемых задач, совершенствование программного обеспечения их решения.

Основное содержание диссертации изложено в следующих работах:

1. Найдыш А. В. Узагальнені розділені різниці. //Прикл. геом. и

- инж. граф. - К.; Будівельник, 1991, вып. 52, - с. 124-126.
2. Найдыш А. В. Тригонометрические разделенные разности. Мелитоп. ин-т мех. с. х., Мелитополь, 1991, 8 с. (Депонир. в ВИНТИ 25.06.91 N 2697-В 91).
 3. Найдыш А. В. Показательные разделенные разности. Мелитоп. ин-т мех. с. х., Мелитополь, 1991, 10 с. (Депонир. в ВИНТИ 25.06.91 N 2698-В 91).
 4. Найдыш А. В. Повышение точности интерполяции на основе обобщенных разделенных разностей. //Инженерная и машинная графика: Тезисы докл. X Всесоюзного семинара, 5-7 июня 1991 г. - Полтава: ПолтИСИ, 1991, -с. 31.
 5. Найдыш А. В. Основные вопросы адаптивной полиномиальной интерполяции. //Проблемы графической технологии: Тезисы докл. Международного семинара, октябрь 1991 г., - Севастополь: Севастоп. приборостроит. ин-т, 1991, - с.
 6. Найдыш А. В. Программное обеспечение адаптивной полиномиальной интерполяции. //Компьютерная геометрия в инженерном образовании: Тезисы докл. Всесоюз. конф. КОГРАФ-91, октябрь 1991 г., Н-Новгород, 1991; с. 125-126.
 7. Найдыш А. В. Моделирование кривых линий и поверхностей на основе адаптивной полиномиальной интерполяции. //Материалы научно-практического семинара "Компьютерная графическая подготовка специалистов", 11-12 февраля 1992, - Витебск: 1991, с. 66-67.
 8. Найдыш А. В. Обобщенные производные. //Материалы научно-практического семинара "Компьютерная графическая подготовка специалистов", 11-12 февраля 1992, - Витебск: 1991, с. 96.

В роботі розглянуто розв'язання проблеми підвищення точності геометричного моделювання кривих ліній та поверхонь в результаті застосування методу адаптивної поліноміальної інтерполяції, до складу якого входить: аналіз ДПК та ДПП за допомогою узагальнених розділених різниць (РР), вибір адаптивного полінома, оцінка похибки та розрахунок, згідно з відповідною формулою, алгебраїчної, показникової, косинусної чи синусної інтерполяції на основі запропонованих РР. Розроблені алгоритми та програми автоматизованого розрахунку ДПК та ДПП та розв'язання прикладних задач.

