УДК 514.18

ПОЛІНОМІАЛЬНА КРИВА ТРЕТЬОГО СТЕПЕНЯ ІЗ УПРАВЛЯЮЧИМИ ТОЧКАМИ, ЩО НАЛЕЖАТЬ КРИВІЙ

Ковтун О.М., к.т.н.
Одеська національна морська академія
Тел. 096-531-40-43

***Анотація* – в роботі пропонується спосіб розрахунку сегментів кубічної кривої із управляючими точками, що інцидентні кривій та наведено тестовий приклад.**

***Ключові слова* - поліном в формі Лагранжа, сегмент поліноміальної кривої, управляючі точки, точки що «інцидентні кривій».**

Постановка проблеми. Для моделювання гладких кривих, поверхонь і тіл у конструюванні машинобудівних агрегатів широко застосовується спосіб подання векторно-параметричних кривих у формі Фергюсона та Бернштейна-Безьє або за допомогою раціональних векторно-параметричних функцій [1]. Та, коли є необхідність працювати тільки з точками на кривій, ці способи не зовсім зручні, оскільки каркасні серединні точки у формі Бернштейна-Безьє не лежать на первинно-заданому точковому каркасі й у кінцевому вигляді не знаходяться на вихідній кривій. Також бувають випадки, коли не зовсім зручно працювати з кривими у формі Фергюсона через необхідність розрахування похідних у вузлових точках. Це особливо стосується методу деформації довільної форми (так званий метод FFD – Free Form Deformation [2]).

Аналіз останніх досліджень. Доволі великий клас ліній можна побудувати за сукупністю точок. Такі лінії називають точково-заданими. Це ломана лінія та різні сплайни: кубічний сплайн, сплайн у формі Ерміта, сплайн на базі поліному Лагранжа, у формі Ньютона тощо. У загальному вигляді задача зводиться до конструювання інтерполяційної кривої. У працях [1-3] доволі повно висвітлено розвиток існуючих алгоритмів конструювання гладких обводів. У статті подано алгоритм будування сегментів кубічної кривої із управляючими точками, що інцидентні (належать) кривій, застосовуючи поліноміальну інтерполяцію за Лагранжем, що є удосконаленням існуючого апарата геометричного моделювання.

Формулювання цілей статті. Можна запропонувати подання векторно-параметричної кривої у такому вигляді, при якому каркасні точки будуть належати первинному точковому ряду і лежати на вихідній кривій, і провести дослідження властивостей такого подання. Для дослідження такого способу застосуємо формулу Лагранжа для поліноміальної інтерполяції.

Основна частина. Розглянемо поліноміальну криву n-го ступеня із управляючими точками, що належать кривій.

Візьмемо $N+1$ точок: $0(x_0,y_0)$, $1(x_1,y_1)$,…, $N(x_N,y_N)$. Для отримання поліноміальної формули застосуємо поліноміальну інтерполяцію за Лагранжем [3] у залежності $y=y(x)$. Призначимо параметр $u = (x-x_0)/(x_N-x_0)$ (рис. 1). Отримаємо:

$$\begin{aligned} y &= y_0 \frac{(u-u_1)(u-u_2)...(u-u_i)...(u-u_N)}{(u_0-u_1)(u_0-u_2)...(u_0-u_i)...(u_0-u_N)} + \\ &+ y_1 \frac{(u-u_0)(u-u_2)...(u-u_i)...(u-u_N)}{(u_1-u_0)(u_1-u_2)...(u_1-u_i)...(u_1-u_N)} + \\ &+ ... + y_N \frac{(u-u_0)(u-u_1)...(u-u_{(N-1)})}{(u_N-u_0)(u_N-u_1)...(u_N-u_{(N-1)})} = \\ &= \sum_{i=0}^{N} [y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N} \frac{(u-u_j)}{(u_i-u_j)}]. \end{aligned} \qquad (1)$$

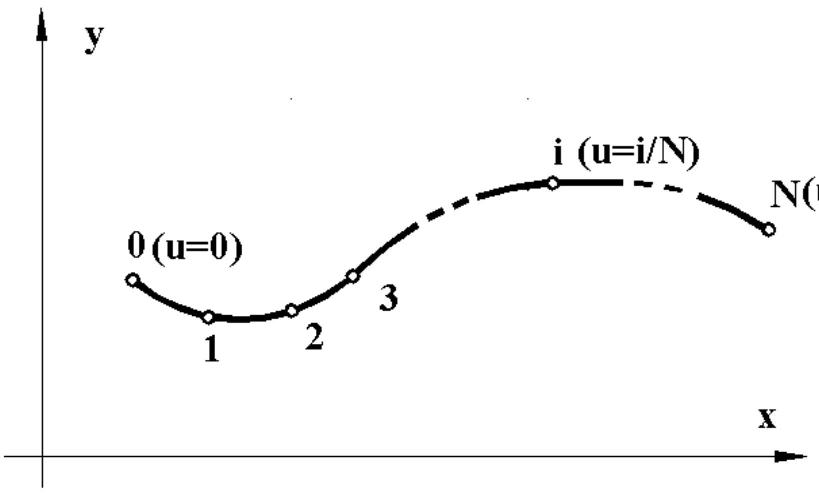

Рис. 1. Сегмент поліноміальної кривої n-го степеня.

Якщо взяти рівномірне розташування точок, то $u_0=0$, $u_N=1$, $u_i=i/N$, а формула (1) матиме вигляд:

$$y = \sum_{i=0}^{N} [y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N} \frac{(u-j/N)}{(i/N-j/N)}] = \sum_{i=0}^{N} [y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N} \frac{(Nu-j)}{(i-j)}]. \qquad (2)$$

Таким чином формули (1) та (2) визначають поліноміальну криву із точками, що належать кривій.

Розглянемо поліноміальну криву третього ступеня із управляючими точками, що належать кривій.

Візьмемо чотири точки *0(*x_0*,*y_0*), 1(*x_1*,*y_1*), 2(*x_2*,*y_2*), 3(*x_3*,*y_3*)*. Для отримання кубічної формули застосуємо (1). Маємо запис сегмента поліноміальної кривої

$$y = y_0\frac{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}{(u_0-u_1)(u_0-u_2)(u_0-u_3)} + y_1\frac{(u-u_0)(u-u_2)(u-u_3)}{(u_1-u_0)(u_1-u_2)(u_1-u_3)} + \\ + y_2\frac{(u-u_0)(u-u_1)(u-u_3)}{(u_2-u_0)(u_2-u_1)(u_2-u_3)} + y_3\frac{(u-u_0)(u-u_1)(u-u_2)}{(u_3-u_0)(u_3-u_1)(u_3-u_2)}. \tag{3}$$

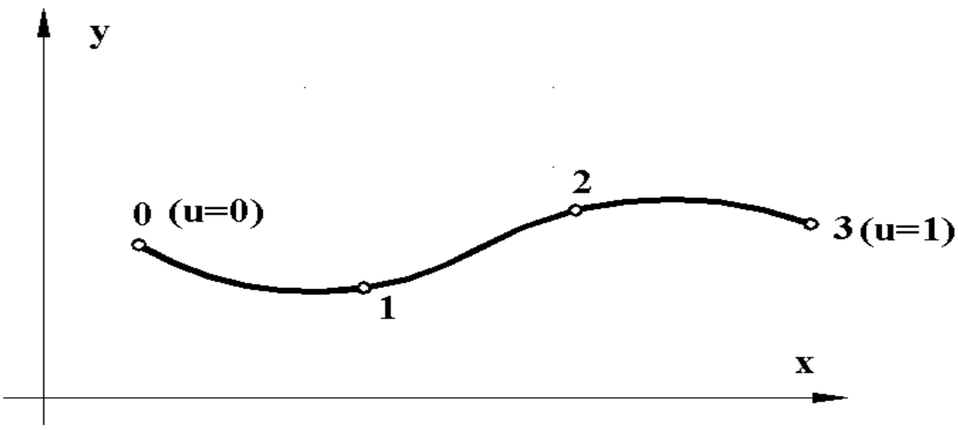

Рис. 2. Сегмент поліноміальної кривої 3-го степеня.

Підставимо конкретні значення параметра *u*. Призначимо в цих точках значення параметра *u:* $u_0=0$, $u_1=1/3$, $u_2=2/3$, $u_3=1$, що буде відповідати рівномірному розташуванню точок. Отримаємо:

$$y = y_0\frac{(u-1/3)(u-2/3)(u-1)}{(0-1/3)(0-2/3)(0-1)} + y_1\frac{(u-0)(u-2/3)(u-1)}{(1/3-0)(1/3-2/3)(1/3-1)} + \\ + y_2\frac{(u-0)(u-1/3)(u-1)}{(2/3-0)(2/3-1/3)(2/3-1)} + y_3\frac{(u-0)(u-1/3)(u-2/3)}{(1-0)(1-1/3)(1-2/3)} = \\ = \frac{9}{2}[-y_0(u^3-2u^2+\frac{11}{9}u-\frac{2}{9}) + 3y_1(u^3-\frac{5}{3}u^2+\frac{2}{3}u) - \\ -3y_2(u^3-\frac{4}{3}u^2+\frac{1}{3}u) + y_3(u^3-u^2+\frac{2}{9}) = \\ = y_0 + (-\frac{11}{2}y_0 + 9y_1 - \frac{9}{2}y_2 + y_3)u + (9y_0 - \frac{45}{2}y_1 + 18y_2 - \frac{9}{2}y_3)u^2 + \\ +(-\frac{9}{2}y_0 + \frac{27}{2}y_1 - \frac{27}{2}y_2 + \frac{9}{2}y_3)u^3. \tag{4}$$

Також криву (4) після перетворення коефіцієнтів можна записати ще й у такому вигляді:

$$y = \frac{9}{2}[y_0(1-u)(\frac{2}{3}-u)(\frac{1}{3}-u) + 3y_1(1-u)(\frac{2}{3}-u)u + 3y_2(1-u)(u-\frac{1}{3})u +$$
$$+ y_3(u-\frac{2}{3})(u-\frac{1}{3})u]. \qquad (5)$$

Таким чином усі чотири точки лежать на кривій у межах $0 \le u \le 1$. У даному випадку призначене конкретне значення параметра u у кожній точці, що відповідає рівномірному розташуванню.

Перепишемо (3) у матричному вигляді:

$$y = [y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3] \begin{bmatrix} \alpha_0(u) \\ \alpha_1(u) \\ \alpha_2(u) \\ \alpha_3(u) \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

де

$$\alpha_0(u) = \frac{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}{(u_0-u_1)(u_0-u_2)(u_0-u_3)},$$
$$\alpha_1(u) = \frac{(u-u_0)(u-u_2)(u-u_3)}{(u_1-u_0)(u_1-u_2)(u_1-u_3)},$$
$$\alpha_2(u) = \frac{(u-u_0)(u-u_1)(u-u_3)}{(u_2-u_0)(u_2-u_1)(u_2-u_3)},$$
$$\alpha_3(u) = \frac{(u-u_0)(u-u_1)(u-u_2)}{(u_3-u_0)(u_3-u_1)(u_3-u_2)},$$
$$u_i = \frac{x - x_0}{x_3 - x_0}.$$

Тестовий приклад подано на рис. 3. Програма реалізована мовою AutoLisp.

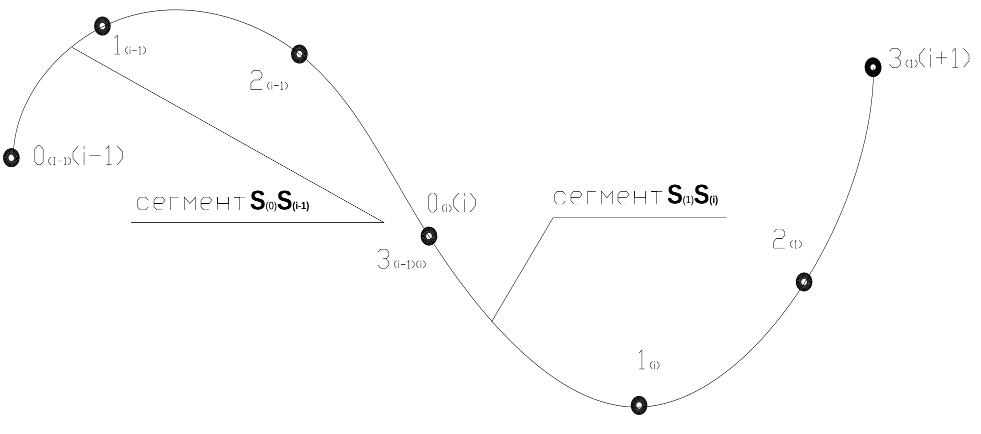

Рис. 3. Тестовий приклад сегментів кубічної кривої із управляючими точками, що інцидентні кривій.

На основі таких кривих можна будувати сплайни за управляючими точками, що інцидентні кривій.

Висновки. Сплайни третього степеня із управляючими точками, інцидентними кривій, дають змогу довільно корегувати форму кривій за вимогою користувача програмного продукту. Також управляючі точки належать кривій, що значно спрощує процес конструювання. Наявні недоліки існуючих видів сплайнів (зокрема кубічних) та велика потреба промисловості у нових видах гладких кривих вимагає подальших досліджень видів сплайнів, розглянутих у статті.

Література

1. *Якунин В.И.* Геометрические основы автоматизированного проектирования технических поверхностей. / В.И. Якунин – М.: Маи, 1080.–86 с.
2. *Alan Watt*. 3D Computer Graphics. Third Edition/ Addison-Wesley, 2000.-570 p.
3. *Завьялов Ю.С.* Методы сплайн - функций./ Ю.С. Завьялов - М.:Наука, 1980. – 246 с.

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ КРИВАЯ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ С УПРАВЛЯЮЩИМИ ТОЧКАМИ, ПРИНАДЛЕЖАЩИМИ КРИВОЙ

А.Н. Ковтун

***Аннотация* – в работе предлагается способ расчета сегментов кубической кривой с управляющими точками, инцидентных кривой, а также приведен тестовый пример.**

THE THIRD DEGREE POLYNOMIAL SPLINE WITH THE OPERATING POINTS INCIDENTAL TO A CURVE

O. Kovtun

Summary

Splines are smooth but flexible curves, with great practical importance during constructing curvilinear forms and graphing. A method of constructing a third degree Lagrange polynomial-based spline on points that incidental (belongs) a curve is proposed in this article.