

УДК 514.18

МОДЕЛЮВАННЯ КРИВИХ БЕЗЬЄ НА ОСНОВІ УЯВНИХ ДОТИЧНИХ

Аушева Н. М. д.т.н.,

Гурін А. Л.

Національний технічний університет України

”Київський політехнічний інститут”

Тел. (044) 406-85-55

Анотація – у роботі пропонується модифікація методу Безьє для формування кривих на основі уявних дотичних. Визначені умови для формування ізотропних кривих. Точки характеристичного багатокутника визначаються у комплексному вигляді.

Ключові слова – уявні дотичні, ізотропна крива, крива Безьє, крива третього порядку.

Постановка проблеми. Уявні криві, які в якості координат точок використовують комплексні аналітичні функції, знайшли своє застосування для моделювання мінімальних поверхонь [1-4]. Детально була розглянута теорія стосовно моделювання параметричних кривих на основі ізотропних характеристичних багатокутників [5], але вона повністю не вичерпана. Параметричні криві формуються у комплексному евклідовому просторі, після відокремлення уявної та дійсної частин досліджуються побудовані криві. Доцільно розширити такий підхід та дослідити моделювання кривих на основі комбінації дійсних та уявних характеристик кривої.

Аналіз останніх досліджень. У роботах проф. Пилипаки С.Ф. та його учнів Чернишової Е.О., Коровіної І.О. [1-3] розглядається моделювання просторової ізотропної кривої за допомогою плоскої параметричної кривої. Автором роботи [6] запропоновано узагальнений підхід щодо моделювання об'єктів тривимірного дійсного простору, якщо задаються нульові характеристики в уявному просторі. В якості нульових характеристик для моделювання ізотропних кривих застосовуються ізотропні відрізки, багатокутники, ізотропна довжина кривої, ізотропні кривина та скрут. У роботі [7] пропонується будувати плоскі криві Безьє на основі уявних сторін характеристичного багатокутника. Проводиться дослідження впливу значень довжин сторін багатокутника на довжину кривої та кривину.

Формулювання цілей статті. Модифікувати криву Безьє для керування формою на основі уявних дотичних.

Основна частина. Криві Безьє третього порядку мають вигляд:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(1-t)^3 + 3\mathbf{r}_1(1-t)^2t + 3\mathbf{r}_2(1-t)t^2 + \mathbf{r}_3t^3, \quad (1)$$

де $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ - реперні точки характеристичного чотирикутника.

Нехай координати точок характеристичного чотирикутника задаються у комплексному вигляді:

$$\mathbf{r}_{j+1} = [\operatorname{Re}(x_{j+1}) \pm i \operatorname{Im}(x_{j+1}) \quad \operatorname{Re}(y_{j+1}) \pm i \operatorname{Im}(y_{j+1})], \quad j = 0..3. \quad (2)$$

Для побудови кривої Безьє відокремлюється дійсна частини [6]. При такому підході на формування кривої не впливає уявна складова комплексних складових. Проведемо модифікацію кривої (1) таким чином, щоб форму кривої визначали уявні дотичні. Одержимо:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(1-t)^3 - 3i\mathbf{r}_1(1-t)^2t - 3i\mathbf{r}_2(1-t)t^2 + \mathbf{r}_3t^3. \quad (3)$$

Відокремимо дійсну частину від рівняння (3) та проведемо аналіз. Аналіз показав, що форму кривої будуть визначать уявні значення дотичних в першій та останній точках характеристичного чотирикутника.

Розглянемо моделювання просторової ізотропної модифікованої кривої Безьє третього порядку на основі рівняння (3).

Для цього візьмемо квадрат виразу (3) та підставимо в умову ізотропності кривих [6]. Будемо мати:

$$9 \sum_{r=x,y,z} [(r_0 + ir_1)^2(1-t)^4 - 4i(r_0 + ir_1)(r_1 - r_2)(1-t)^3t + (-2(r_0 + ir_1)(ir_2 + r_3) - 4(r_1 - r_2)^2)t^2(1-t)^2 + 4i(r_1 - r_2)(ir_2 + r_3)(1-t)t^3 + (ir_2 + r_3)^2t^4] = 0. \quad (4)$$

Умова (4) буде виконуватись та не залежати від значення параметра, якщо коефіцієнти при всіх степенях t дорівнюють 0. Тобто одержимо рівняння:

$$\begin{cases} \sum_{r=x,y,z} (r_0 + ir_1)^2 = 0, \\ i \sum_{r=x,y,z} (r_0 + ir_1)(r_1 - r_2) = 0, \\ 2 \sum_{r=x,y,z} (r_1 - r_2)^2 + \sum_{r=x,y,z} (r_0 + ir_1)(ir_2 + r_3) = 0, \\ i \sum_{r=x,y,z} (r_1 - r_2)(ir_2 + r_3) = 0, \\ \sum_{r=x,y,z} (ir_2 + r_3)^2 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Вираз (5) визначає умови ізотропності просторової модифікованої кривої Безьє третього порядку (3).

Розглянемо моделювання плоскої ізотропної модифікованої кривої Безьє. З урахуванням виразів (5) ординати реперних точок будуть визначатися наступним чином:

$$\begin{aligned}y_1 &= iy_0 - x_0 - ix_1, \\y_2 &= y_1 + ix_1 - ix_2, \\y_3 &= -iy_2 + x_2 - ix_3.\end{aligned}\tag{6}$$

Виділимо окремо дійсну $\text{Re}(y_j)$ та уявну $\text{Im}(y_j)$ частини та будемо задавати на площині плоску дійсну криву. У цьому випадку кількість умов збільшиться в два рази. Для визначення всіх координат необхідно додати ще дві умови, а саме уявні частини вектору \mathbf{r}_0 . В результаті одержимо:

$$\begin{aligned}\text{Im}(x_1) &= \text{Im}(y_0) + \text{Re}(x_0) + \text{Re}(y_1), \\ \text{Im}(y_1) &= \text{Re}(y_0) - \text{Im}(x_0) - \text{Re}(x_1), \\ \text{Im}(x_2) &= -\text{Re}(y_1) + \text{Re}(y_2) + \text{Im}(x_1), \\ \text{Im}(y_2) &= \text{Im}(y_1) + \text{Re}(x_1) - \text{Re}(x_2), \\ \text{Im}(x_3) &= -\text{Im}(y_2) + \text{Re}(y_3) - \text{Re}(x_2), \\ \text{Im}(y_3) &= -\text{Re}(y_2) + \text{Im}(x_2) - \text{Re}(x_3).\end{aligned}\tag{7}$$

Приклад. Побудуємо ізотропну модифіковану криву Безьє третього порядку, якщо задано такі значення: $\text{Re}(x_0) = 1.0$, $\text{Re}(x_1) = 3.0$, $\text{Re}(x_2) = 1.0$, $\text{Re}(x_3) = 4.0$, $\text{Re}(y_0) = 1.0$, $\text{Re}(y_1) = 2.0$, $\text{Re}(y_2) = 3.0$, $\text{Re}(y_3) = 5.0$, $\text{Im}(x_0) = 1.0$, $\text{Im}(y_0) = 2.0$.

Розрахуємо значення уявних частин на основі виразу (7):
 $\text{Im}(x_1) = 5.0$, $\text{Im}(y_1) = -3.0$, $\text{Im}(x_2) = 6.0$, $\text{Im}(y_2) = -1.0$, $\text{Im}(x_3) = 5.0$,
 $\text{Im}(y_3) = -1.0$.

Ізотропна модифікована крива Безьє буде мати наступний вид:

$$\begin{aligned}x(t) &= 1.0 - 9.0t^2 + 12.0t, \\y(t) &= -2.0t^3 + 18.0t^2 - 12.0t + 1.0.\end{aligned}$$

Модифіковану кубічну криву з уявними дотичними з ізотропною довжиною зображено на рис.1.

Висновки. Дослідження показали, що модифікація кривої Безьє дозволяє ввести в керування формою кривої значення уявних характеристик, у даному випадку уявні значення дотичних. Форму кривої визначає уявний характеристичний чотирикутник. Подальші дослідження пов'язані з моделюванням сіток та порцій поверхонь з застосуванням розробленого підходу.

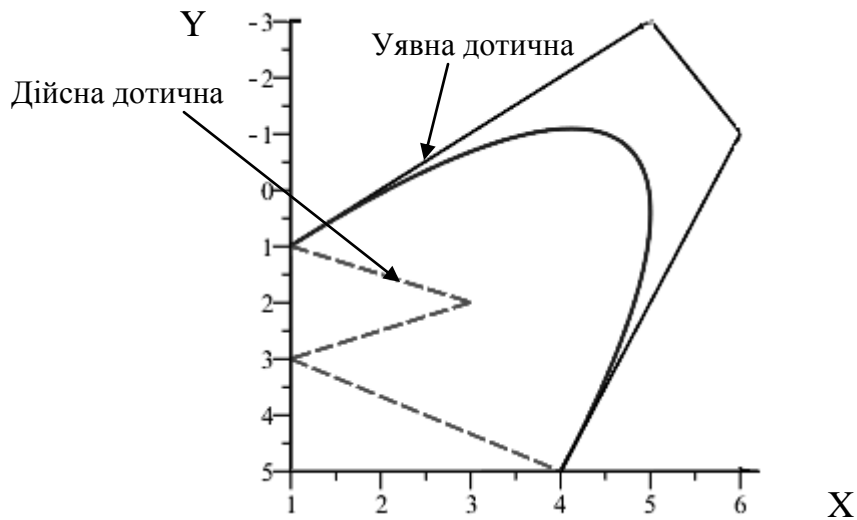


Рис. 1. Модифікована кубічна крива Безьє.

Література

1. *Пилипака С.Ф.* Конструювання мінімальної поверхні гвинтовим рухом просторової кривої / С.Ф. Пилипака, І.О. Коровіна // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Т. 39, Вип.4. – Мелітополь: ТДАТУ, 2008. – С.30–36.
2. *Чернишова Е. О.* Використання функцій комплексного змінного для побудови поверхонь технічних форм: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 „Прикладна геометрія, інженерна графіка” / Е.О. Чернишова. - К.: КНУБА, 2007.- 20 с.
3. *Коровіна І. О.* Конструювання поверхонь сталої середньої кривини за заданими лініями інциденції: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 „Прикладна геометрія, інженерна графіка” / І.О. Коровіна. - К.: КНУБА, 2012.- 19 с.
4. *Аушева Н.М.* Моделювання мінімальних поверхонь Без`є / Н.М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці Таврійського державного агротехнологічного університету - Вип.4, Т.50.- Мелітополь: ТДАТУ, 2011. - С.105-109.
5. *Аушева Н. М.* Ізотропні багатокутники ізотропних кривих Без`є / Н.М. Аушева // Міжвідомчий науково-технічний збірник „Прикладна геометрія та інженерна графіка”.-Вип.88.-К.:КНУБА, 2011.- С.57-61.
6. *Аушева Н.М.* Розробка узагальненого підходу щодо формування кривих та поверхонь дійсного простору на основі ізотропних характеристик / Н.М. Аушева // Журнал «Технологічний аудит та

резерви виробництва». -№3/1(17).-Редакція «Східно-Європейського журналу передових технологій».-2014.-С.17-20.

7. Аушева Н.М. Конструювання плоскої кривої Без'є з уявними довжинами характеристичного багатокутника / Н.М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці Таврійського державного агротехнологічного університету - Вип.4, Т.58.- Мелітополь: ТДАТУ, 2014. - С.8-13.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИВЫХ БЕЗЬЕ НА ОСНОВЕ МНИМЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ

Н. Н. Аушева, А.Л. Гурин

Аннотация – в работе предлагается модификация метода Безье для формирования кривых на основе мнимых касательных. Определены условия для формирования изотропных кривых. Точки характеристического многоугольника определяются в комплексном виде.

BEZIER CURVES MODELING ON THE BASIS OF IMAGINARY TANGENT LINES

N. Ausheva, A. Gurin

Summary

Method Bezier modification for curves formation on the basis of imaginary tangent lines is suggested in this research work. Specified conditions for formation of null curves. Points of characteristic polygon are specified in complex.