

В.М. Найдиш  
В.М. Верещага  
А.В. Найдиш  
В.М. Малкіна

# ОСНОВИ ПРИКЛАДНОЇ ДИСКРЕТНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

*Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України*

Навчальний посібник  
для студентів вищих навчальних закладів  
III–IV рівнів акредитації

Мелітополь  
2007

УДК 514.182.7:519.651

Гриф Міністерства освіти і науки  
України (лист  
від 2007 р.  
№ )

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. В.М. Корчинський (Дніпропетровський національний університет), д-р техн. наук, проф. І.А. Скідан (Донецький національний технічний університет), д-р техн. наук, проф. І.Г. Балюба (Донбаська державна академія будівництва і архітектури).

Основи прикладної дискретної геометрії: Навч. посібник / В.М. Найдиш, В.М. Верещага, А.В. Найдиш, В.М. Малкіна: під ред. В.М. Найдиша.—

ISBN

Викладені основи прикладної дискретної геометрії, що включають дискретні елементи площини та простору, відношення і взаємозв'язки між ними, основні визначення властивостей та формоутворення дискретно представлених плоских та просторових кривих ліній і поверхонь.

Посібник вміщує вихідну інформацію по вивченню дисципліни “Геометричне моделювання в конструюванні інженерних об’єктів і систем”.

Для студентів і магістрів вищих навчальних закладів, а також для аспірантів і наукових працівників.

УДК 514. 182.7:519.651

© В.М. Найдиш, В.М. Верещага,  
А.В. Найдиш, В.М. Малкіна

ISBN

## ЗМІСТ

|                                                                                                      |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ВСТУП.....                                                                                           | 4   |
| Розділ 1. Дискретні елементи на площині.....                                                         | 5   |
| 1.1 Координатні сітки й сіткові функції.....                                                         | 5   |
| 1.2 Крива лінія і її дискретне подання. Параметри подання                                            | 7   |
| 1.3 Завдання точкових рядів ДПК.....                                                                 | 9   |
| 1.4 Дискретні подання неперервних функцій.....                                                       | 13  |
| 1.5 Аналітичний опис дискретних точкових рядів.....                                                  | 16  |
| 1.6 Перехід від дискретного подання до неперервного.....                                             | 18  |
| Розділ 2. Диференціальні характеристики ДПК.....                                                     | 22  |
| 2.1 Скінченні й поділені різниці.....                                                                | 22  |
| 2.2 Геометричний аналіз дискретних точкових рядів.<br>Опуклість і увігнутість. Ділянки перегину..... | 26  |
| 2.3 Дотична і нормаль у вузлах ДПК. Дискретна кривина...                                             | 31  |
| 2.4 Дискретне диференціювання ДПК.....                                                               | 38  |
| 2.5 Дискретне інтегрування ДПК.....                                                                  | 45  |
| 2.6 Еквідистантні ДПК.....                                                                           | 50  |
| 2.7 Дискретні еволюти і евольвенти.....                                                              | 51  |
| 2.8 Натуральне представлення ДПК.....                                                                | 54  |
| 2.9 Формоутворення плоских ДПК за заданими умовами....                                               | 61  |
| Розділ 3. Дискретна інтерполяція ДПК.....                                                            | 82  |
| 3.1 Загальна постановка задачі згущення ДПК.....                                                     | 82  |
| 3.2 Метод тотожностей згущення.....                                                                  | 87  |
| 3.3 Метод базисних функцій.....                                                                      | 92  |
| 3.4 Згущення на основі кутових параметрів.....                                                       | 95  |
| 3.5 Згущення при наявності дотичних.....                                                             | 109 |
| 3.6 Перехід до неперервних ГО на основі згущення.....                                                | 112 |
| Розділ 4. Дискретно представлені просторові криві лінії.....                                         | 117 |
| 4.1 Завдання просторових ДПК.....                                                                    | 117 |
| 4.2 Дотична у вузлі просторової ДПК.<br>Нормальна площа. Тригранник Френе.....                       | 119 |
| 4.3 Дискретні кривина і скрут.....                                                                   | 122 |
| 4.4 Натуральне представлення просторової ДПК.....                                                    | 124 |
| 4.5 Формоутворення просторової ДПК<br>за заданими умовами.....                                       | 126 |
| 4.6 Згущення просторової ДПК за заданими умовами.....                                                | 140 |
| Розділ 5. Дискретно представлені поверхні.....                                                       | 143 |
| 5.1 Каркасне представлення ДПП.....                                                                  | 143 |
| 5.2 Диференціальні характеристики ДПП.....                                                           | 145 |
| 5.3 Формоутворення ДПП за заданими умовами.....                                                      | 151 |
| 5.4 Дискретна інтерполяція ДПП.....                                                                  | 165 |
| Висновки.....                                                                                        | 190 |
| Список літератури.....                                                                               | 192 |

## ВСТУП

Моделювання є одним з потужних інструментів дослідження й пізнання явищ і процесів навколишньої дійсності. Створювані при цьому моделі повинні мати належний ступінь адекватності стосовно досліджуваних явищ і процесів, відрізнятись простотою розрахункових алгоритмів і необхідною точністю. Особливо це стосується геометричного моделювання, де досягається значний ступінь абстрагування від модельованих явищ.

Останнім часом все більш поширеним стає дискретне геометричне моделювання, для якого вихідними даними, як і результатом моделювання, є дискретні характеристики явища або процесу, представлені у вигляді табличних функцій або множини дискретних відліків, отриманих у результаті експерименту або обчислювальної підготовки вихідних даних.

Завданням дискретного геометричного моделювання (ДГМ) є встановлення взаємозв'язків між різними характеристиками й параметрами модельованого явища шляхом дослідження адекватних геометричних схем і розробки відповідних розрахункових алгоритмів. *Об'єктом дослідження*, таким чином, є дискретні множини, що відбивають у числовій або графічній формі характер досліджуваного явища. Дослідження таких множин має свої особливості, оскільки значення, що цікавлять нас, відомі тільки в певних точках, а між ними в найкращому разі можна скласти певні судження на якісному рівні, виходячи з додаткової інформації, про властивості й особливості модельованого явища. У цій ситуації значну роль відіграють геометричні властивості вдало підібраної моделі, взаємозв'язки між її елементами, закономірності їхньої зміни, що відбивають властивості моделі й досліджуваного явища.

На жаль, розробка й дослідження різних методів ДГМ значно випереджає дослідження геометричних властивостей дискретних множин, як основи для нових досліджень і узагальнень. Звичайно, паралельно з розробкою нових методів досліджувалися й деякі із зазначених властивостей. Однак, систематичного викладу цих питань і проблем геометрії дискретних множин поки у вітчизняній літературі немає. У цьому напрямку все має важливе значення: термінологія, визначення, припущення, рівень доказової бази й узагальнень. Розв'язання цих питань передбачається освітити в даному посібнику.

Необхідність видання такого посібника обумовлена ще й тим, що розроблені методи ДГМ довели свою ефективність у розв'язанні багатьох задач науки й техніки через простоту розрахункових алгоритмів, високу точність, запобігання осциляції розв'язку, можливості його корекції.

У посібнику викладені основи прикладної дискретної геометрії, що викристалізувались на протязі понад 20 років інтенсивних наукових досліджень учених Мелітопольської школи прикладної геометрії, і розв'язання ними важливих практичних задач ДГМ у різних областях народного господарства.

Посібник призначено для студентів і магістрів, що навчаються за фахом "Інформаційні технології проектування", аспірантів за фахом "Прикладна геометрія, інженерна графіка", викладачів кафедр прикладної геометрії, інженерної й комп'ютерної графіки вузів.



## РОЗДІЛ 1. ДИСКРЕТНІ ЕЛЕМЕНТИ НА ПЛОЩИНІ

Найбільш розвиненим напрямком ДГМ є моделювання геометричних образів на площині. Для більш детального його розгляду введемо деякі базові визначення.

*Геометричний образ* (ГО) – це деяка множина точок, для якого властиві певні метричні (відстані, кути), позиційні (приналежність, взаємне розташування), диференціально-геометричні (дотичні, кривини) властивості.

Ця множина може бути *зв'язною* у випадку неперервного ГО (крива лінія, поверхня, геометрична фігура...) або *дискретною* (графік довільного дискретного процесу, наприклад, добовий графік надтоїв, кількості опадів, урожайності за певні проміжки часу й т.п.). Наше вивчення буде стосуватися дискретних ГО. Вони можуть бути отримані як у результаті експерименту при його дискретній реєстрації, так і в результаті *дискретизації* неперервних ГО (наприклад, при реєстрації характерних точок неперервних графіків різних самописів при фіксованих значеннях аргументу або при виділенні дискретної множини точок на графіку функції, що розраховується важко).

*Дискретна геометрична модель* – це сукупність алгоритмів дискретного розв'язання деякого класу задач науки і техніки, що містить аналітичні вирази для розрахунку параметрів моделі і визначена на представленій в деякій системі координат упорядкованій *дискретній сукупності* точок ГО або значень його характеристик.

У дискретній геометричній моделі визначальним є алгоритм розв'язання завдань, оскільки він відбиває змістовну сторону моделі. Маючи ту саму дискретну сукупність точок, змінюючи алгоритм, можна одержати різні за змістом моделі.

При розгляді ГО будемо припускати надалі, що їхні точки задані без похибок, чого насправді, звичайно, не буває. Але таке припущення часто застосовується при моделюванні й дозволяє розглянути основні взаємозв'язки між елементами моделі в ідеалізованому варіанті, як теоретично можливі.

Інші визначення й припущення будуть приводитися надалі за ходом викладу.

### 1.1. КООРДИНАТНІ СІТКИ Й СІТКОВІ ФУНКЦІЇ

При моделюванні геометричні образи завжди задаються в певній системі координат. Це дозволяє ефективно організовувати обчислювальний процес і одержання шуканого результату. Відомо багато різних систем координат, адаптованих до тих або інших умов моделювання. Найбільш відомими є декартова прямокутна (рис. 1.1) і полярна системи координат (рис.1.2).

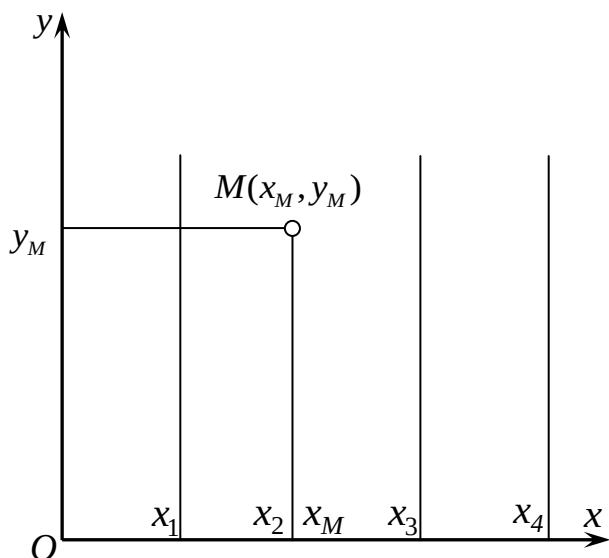


Рисунок 1.1– Декартова прямокутна система координат,  $x$  - абсциса,  $y$  - ордината

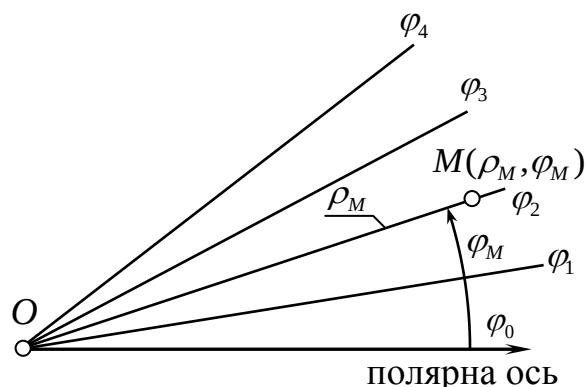


Рисунок 1.2 – Полярна система координат,  $\rho$  – радіус-вектор,  $\varphi$  – полярний кут

У неперервному моделюванні значення координат змінюються неперервно, у дискретному моделюванні абсциси  $x$  (рис. 1.1) і полярні кути  $\varphi$  (рис. 1.2) змінюються дискретно, стрибкоподібно, утворюючи, таким чином, *сітку абсцис*  $x_i$  або *сітку кутів*  $\varphi_i$ . При цьому значення ординати  $y$  і полярного радіуса  $\rho$  змінюються неперервно. У проміжках між координатними лініями сітки точки не задані.

Сітка називається рівномірною, якщо її крок  $h = x_i - x_{i-1} = \text{const}$  або  $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_{i-1} = \text{const}$  сталий. У протилежному випадку сітка називається *нерівномірною*.

Функція, областю визначення якої є яка-небудь сітка, називається *сітковою*. Графіком сіткової функції є дискретний точковий ряд, заданий на координатних лініях сітки (рис. 1.3 і рис 1.4).

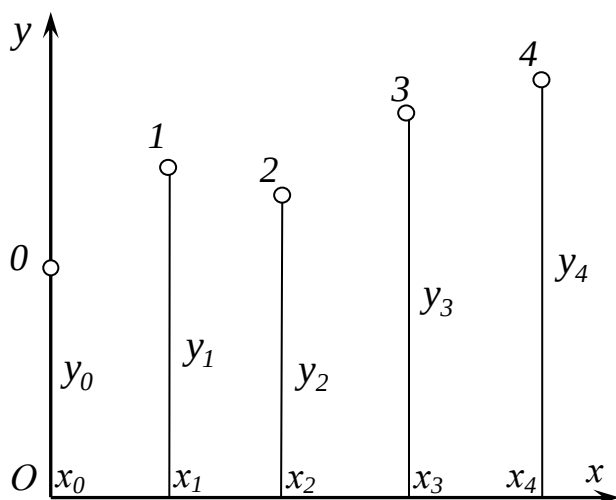


Рисунок 1.3 – Сіткова функція

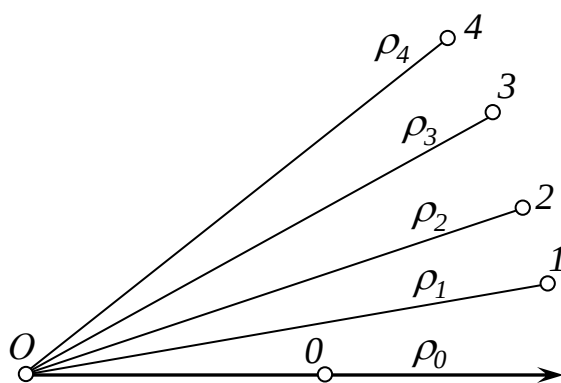


Рисунок 1.4 – Сіткова функція

Значення сіткової функції у вузлах будемо позначати  $y_i = y(x_i)$ ,  $i = \overline{0;n}$ , (рис. 1.3) або  $\rho_i = \rho(\varphi_i)$ ,  $i = \overline{0;n}$ , (рис. 1.4). Теорія сіткових функцій і її методи відіграють значну роль при чисельному розв'язанні диференціальних рівнянь і їхніх систем. Деякими її положеннями ми скористаємося надалі.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке геометричний образ, його різновиди?
2. Як розуміти дискретизацію неперервних ГО?
3. Як утворюється координатна сітка? Приведіть приклади.
4. Що таке крок сітки? Чим відрізняється рівномірна сітка від нерівномірної?
5. Сформулюйте поняття сіткової функції. Що є графіком сіткової функції?

## 1.2. КРИВА ЛІНІЯ І ЇЇ ДИСКРЕТНЕ ПОДАННЯ. ПАРАМЕТРИ ПОДАННЯ

Розглянемо деяку криву лінію  $m$  у декартовій системі координат (рис. 1.5).

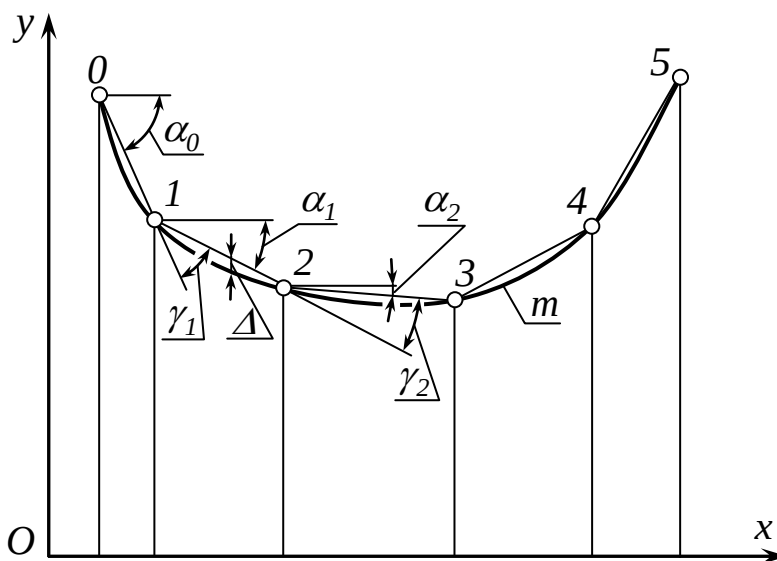


Рисунок 1.5 – Дискретне подання кривої  $m$

У перетині з лініями координатної сітки вона утворить точковий ряд  $0...5$ , який є дискретним поданням кривої  $m$  або інакше: дискретно представленою кривою (ДПК). Для заданої кривої  $m$  таке подання є цілком певним і однозначним і називається *дискретизацією* кривої. Зворотний процес, коли заданий точковий ряд (або сіткова функція) і потрібно відновити криву  $m$ , не є однозначним і називається *інтерполяцією* в глобальному змісті цього слова. Таке відновлення проводиться при певних припущеннях і буде розглянуте пізніше.

Геометричною основою ДПК є дискретний точковий ряд (ДТР), а саме поняття ДПК є більш широким і включає, крім ДТР, іще можливість (алгоритм) побудови довільних проміжних точок між вузлами ДТР з метою якомога точнішого представлення кривої  $m$ . Вказані алгоритми складають основу дискретної інтерполяції і будуть розглянуті пізніше.

З'єднаємо точки ряду ланками ламаної лінії. Будемо називати її *супровідною ламаною лінією* (СЛЛ) ДПК. Її можна розглядати як досить грубе, кусково-лінійне наближення кривої  $m$ . Похибка  $\Delta$  такого наближення оцінюється максимальним віддаленням уздовж осі  $Oy$  точок кривої від відповідних ланок СЛЛ і відіграє важливу роль в оцінці точності того або іншого методу ДГМ.

Лінійними параметрами дискретного подання є крок сітки  $h$  (якщо вона нерівномірна, то сукупність значень  $h_i$ ) і значення  $y_i$  ординат точок ряду.

Завдання цих величин повністю визначає точковий ряд ДПК на заданій сітці.

Кутовими параметрами ДПК є кути  $\alpha_i$  нахилу ланок СЛЛ до осі  $Ox$

$$\alpha_i = \arcsin \frac{y_{i+1} - y_i}{[i, i+1]}, \quad i = \overline{0; n-1}, \quad (1.1)$$

де  $[i, i+1] = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$  – довжина ланки  $(i, i+1)$  СЛЛ. Як бачимо, знак кута  $\alpha_i$  залежить від знака чисельника. На рис. 1.5 кути  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{0; 2}$ , від'ємні, а при  $i = \overline{3; 4}$  – додатні.

Значну роль при моделюванні відіграють кути  $\gamma_i$  суміжності ланок СЛЛ. Для сусідніх ланок у вузлі  $i$  маємо

$$\gamma_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}, \quad i = \overline{1; n-1} \quad (1.2)$$

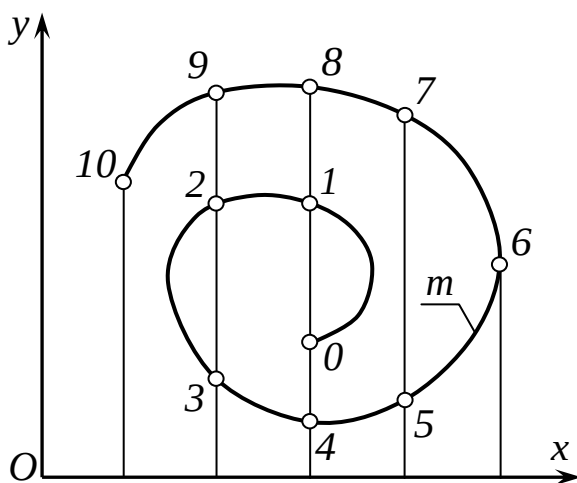


Рисунок 1.6 – Багатозначна ДПК

Знак  $\gamma_i$  залежить від напрямку обходу СЛЛ. На рис. 1.5 при обході зліва-направо (у напрямку зростання номерів точок ряду)  $\gamma_i$ ,  $i = \overline{1; 4}$ , додатні. Якщо точки перенумерувати справа-наліво, то знаки кутів  $\gamma_i$  зміняться на протилежні.

Розрізняють *однозначні* криві стосовно осі  $Ox$  (і відповідно їх ДПК), коли деякому значенню  $x = \bar{x}$  відповідає єдине значення  $y = \bar{y}$  для точки на кривій.

Якщо заданому  $X = \bar{X}$  на кривій відповідають кілька точок, то крива, як і її ДПК, називається *багатозначною* (рис. 1.6). Як правило, для однозначних ДПК обхід точок здійснюється зліва-направо (рис. 1.5), для багатозначних, особливо, у полярній системі координат – проти ходу годинникової стрілки (рис. 1.6).

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як утворюється ДПК? Що таке супровідна ламана лінія?
2. Назвіть лінійні й кутові параметри ДПК.
3. Чим відрізняються однозначні ДПК від багатозначних?

## 1.3. ЗАВДАННЯ ТОЧКОВИХ РЯДІВ ДПК

Розглянемо можливі варіанти завдання точкових рядів ДПК на площині. Найбільш пристосованим до багатьох алгоритмів ДГМ варіантом є завдання точкового ряду значеннями координат його вузлів (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Завдання точкового ряду координатами вузлів

| $i$ | $0$   | $1$   | $2$   | $3$   | $4$   | $5$   | $\dots$ | $n-1$     | $n$   |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|-----------|-------|
| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\dots$ | $x_{n-1}$ | $x_n$ |
| $y$ | $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $\dots$ | $y_{n-1}$ | $y_n$ |

Таке завдання відповідає табличному завданню деякої функції, застосовуваному в багатьох розділах математики. Перший рядок таблиці, що вказує номер точки, вводиться не завжди, але в більшості методів ДГМ бажаний, особливо при моделюванні багатозначних функцій. Табличний спосіб відповідає природній методиці побудови точок ряду в системі  $Oxy$ . На рис. 1.7а зображені точки ряду, з'єднані для наочності ланками СЛЛ.

Звідси впливає другий спосіб завдання точкового ряду ДПК: перевищеннями ординат сусідніх точок (рис. 1.7б).

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad i = \overline{0; n-1}. \quad (1.3)$$

Значення  $\Delta y_i$  стосується  $i$ -ї точки, тобто початкової точки ланки  $(i, i+1)$ , як і у випадку  $\alpha_i$  (формула (1.1)). Очевидно, що для однозначного завдання точкового ряду на рис. 1.7а за заданим графіком  $\Delta y_i$  (рис. 1.7б) треба задати початкову точку  $(x_0, y_0)$  або будь-яку іншу точку ряду. В останньому випадку будуть потрібні додаткові розрахунки ординат згідно з (1.3).

Підкреслимо, що у всіх способах завдання сітка абсцис  $x_i$  вважається заданою.

Близьким до розглянутого є спосіб завдання точкового ряду ДПК у вигляді кутів  $\alpha_i$  нахилу ланок СЛЛ до осі  $Ox$  (рис. 1.7в). Вигляд цього графіка в деякому сенсі нагадує графік перевищень (рис. 1.7б). Тут також для одноз-

начного визначення точкового ряду варто задати початкову точку  $(x_0, y_0)$ .

Якщо взяти за основу значення кутів суміжності  $\gamma_i$  сусідніх ланок СЛЛ

$$\gamma_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}, \quad i = \overline{1; n-1}, \quad (1.4)$$

то можна запропонувати спосіб, представлений на рис. 1.7г. Тут для однозначного завдання точкового ряду потрібно завдання двох його точок  $(x_0, y_0)$  і  $(x_1, y_1)$ .

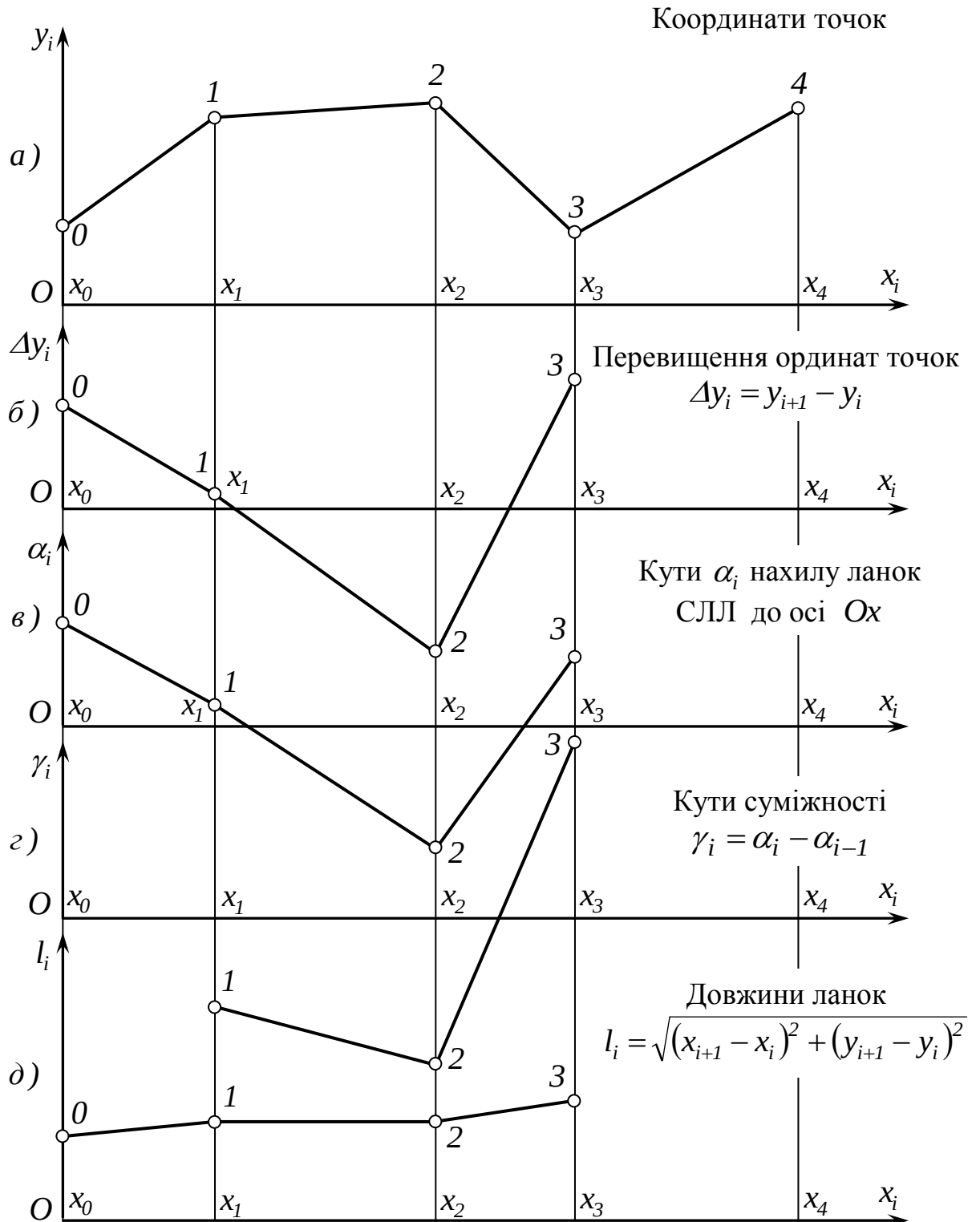


Рисунок 1.7 – Варіанти завдання точкового ряду ДПК

У деяких випадках зручним може виявитися завдання точкового ряду ДПК сукупністю значень довжин ланок СЛЛ (рис. 1.7δ). Для побудови рис. 1.7а за заданим рис. 1.7δ необхідно задати початкову точку  $(x_0, y_0)$ . Такий спосіб завдання ДПК широко застосовується в геодезичній практиці, де точка на плані визначається двома засічками з відомих (координатних) пунктів.

Для багатозначної ДПК оптимальним є завдання її точкового ряду таблицею 1.1, звідки можна визначити бажані параметри моделювання:  $\Delta y_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $\ell_i$ . Оскільки моделювання однозначних ДПК, що ґрунтується на поліноміальних функціях, значно простіше способів моделювання багатозначних ДПК, то природним є подання багатозначних ДПК двома однозначними *параметричними рядами* на цілочисловій рівномірній сітці  $i$  (номер точки), де другими координатами є задані  $x_i$  й  $y_i$ . На рис. 1.8 зображена багатозначна ДПК двома параметричними рядами  $x(i)$  й  $y(i)$ . У таблиці 1.2 представлені координати її точок.

Для наочності наведені СЛЛ побудованих рядів. За характером зміни цих рядів можна судити про опорні точки кривої. Наприклад, максимум кривої (неперервної кривої, проведеної через точки таблиці) розташовується між точками 1 і 2, а також між 8 і 9; мінімум – між 3 і 4. Екстремуми на графіку  $x(i)$  показують крайні праві (між 0 і 1 і в точці 6) і крайні ліві (між 2 і 3) точки згаданої кривої. Приблизний її графік представлений у системі  $Oxy$  на рис. 1.6.

Побудовані ряди  $x(i)$  й  $y(i)$  дозволяють спростити моделювання, як за рахунок рівномірної сітки, так і за рахунок застосування методів моделювання однозначних ДПК. Головною перешкодою при моделюванні багатозначних ДПК є наявність вертикальних дотичних, яким відповідають точки екстремуму графіка  $x(i)$ .

Зазначимо, що моделюванню однозначних ДПК на нерівномірній сітці також властиві значні обчислювальні труднощі в порівнянні з рівномірною сіткою. Тому з метою спрощення розрахунків іноді удаються до параметричного подання не тільки багатозначних, але й однозначних кривих, представлених на нерівномірній сітці.

Таблиця 1.2 – Координати точок багатозначної ДПК (рис. 1.8)

| $i$ | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $x$ | 37 | 37 | 23 | 23 | 37 | 52 | 65 | 52 | 37 | 23 | 8  |
| $y$ | 27 | 45 | 40 | 13 | 11 | 17 | 38 | 58 | 64 | 66 | 57 |

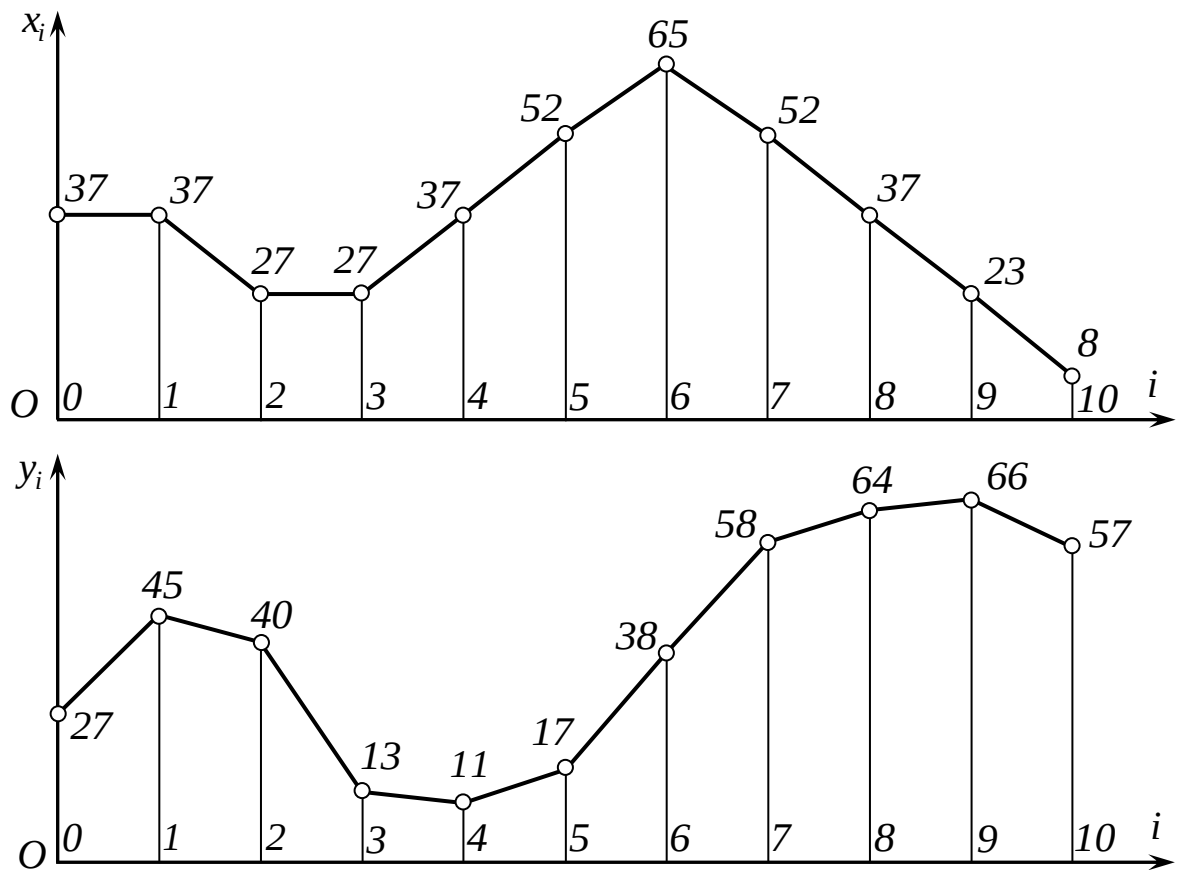


Рисунок 1.8 – Параметричні ряди багатозначної ДПК (табл. 1.2)

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому полягає табличний спосіб завдання точкового ряду ДПК?
2. Які Ви знаєте способи завдання точкового ряду ДПК і в чому полягають їхні особливості? Як перейти від даного способу завдання до побудови точкового ряду ДПК?
3. У чому суть параметричного завдання точкового ряду багатозначної ДПК? Погодьте екстремальні точки параметричних рядів з характерними точками багатозначної ДПК?
4. Чи можливе параметричне подання однозначних ДПК? У якому випадку це доцільно?



#### 1.4. ДИСКРЕТНІ ПОДАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Дотепер ми розглядали дискретні подання, отримані шляхом дискретизації довільної кривої лінії. Очевидно, що, якщо крива лінія є графіком деякої функції, то між її точками на деякій сітці абсцис встановлюються певні співвідношення, які можуть мати аналітичний вираз.

Розглянемо деяку  $k$  - параметричну функцію  $y = f(x, a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$ . Складемо систему рівнянь для цієї функції при послідовній множині значень аргументу  $x_0, x_1, \dots, x_k$ . Одержимо множину значень функції  $y_0, y_1, \dots, y_k$ . Якщо з отриманої системи  $(k+1)$  рівнянь виключити параметри  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ , то одержимо деяке рівняння  $F(x_i, y_i) = 0$ ,  $i = \overline{0; k}$ , назване в теорії дискретних (сіткових) функцій *різницеvim* рівнянням. Це рівняння справедливе для всієї  $k$  - параметричної множини функцій  $f$ , відбиває загальні для них метричні або диференціальні властивості й буде нами надалі розглянуте при розв'язанні питань відновлення (наближення) функцій.

В залежності від виду функції  $f$  й виду сітки  $x_0 < x_1 < \dots < x_k$  виходить цілком певне різницеве рівняння.

Важливою умовою можливості виключення параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  з побудованої системи є лінійність функції  $f$  щодо цих параметрів. Як приклад розглянемо алгебраїчний 3-поліном і складемо систему рівнянь:

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3, \quad i = \overline{0; 4}, \quad (1.5)$$

лінійну щодо параметрів  $a_j$  ( $j = \overline{0; 3}$ ), виключаючи які прийдемо до рівності, що зручніше за все досліджувати й записувати у вигляді визначника:

$$\begin{vmatrix} y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ y_2 & 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ y_3 & 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ y_4 & 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.6)$$

Якщо розкрити (1.6) за елементами першого стовпця, то їхніми алгебраїчними доповненнями будуть визначники Вандермонда, легко записувані через різниці абсцис. Зокрема, для  $y_0$  маємо алгебраїчне доповнення

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{p < q}^{1..4} (x_q - x_p), \quad (1.7)$$

тобто

$$W_{1..4} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3), \quad (1.8)$$

Аналогічний вигляд мають інші визначники  $W$ .

Визначник (1.6) є різницеvim рівнянням для множини алгебраїчних поліномів 3-го степеня. Очевидно, що найбільш простий вигляд це різницеve рівняння буде мати, коли визначники Вандермонда будуть постійними коефіцієнтами при відповідних  $y_i$ . Це можливо на рівномірній сітці із кроком  $h$ . Наприклад,  $W_{1..4} = h \cdot 2h \cdot 3h \cdot h \cdot 2h \cdot h = 12h^6$ .

Після розкриття (1.6), обчислення всіх визначників  $W$  і скорочень остаточно одержуємо

$$y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 = 0, \quad (1.9)$$

тобто однорідне різницеve рівняння 4-го порядку (порядок різницевого рівняння дорівнює числу його незалежних змінних і на одиницю менше загального їхнього числа), не залежної від величини кроку  $h$  й початкової точки  $x_0$ . Коефіцієнти цього рівняння – це знакозмінний ряд *біноміальних коефіцієнтів*.

Узагальнюючи, можна показати, що різницеvim рівнянням алгебраїчного  $k$ -полінома на рівномірній сітці є однорідне різницеve рівняння порядку  $(k+1)$ , що не залежить від  $h$  і  $x_0$ . Цим пояснюються значні можливості й широке поширення алгебраїчних поліномів у практиці відновлення функцій.

У табл.1.3 представлені різницеві рівняння для деяких алгебраїчних поліномів на рівномірній сітці.

Таблиця 1.3 – Різницеві рівняння для деяких алгебраїчних поліномів на рівномірній сітці

| <i>Назва</i>       | <i>Рівняння</i>                          | <i>Різницеve рівняння</i>                                                                                        |
|--------------------|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>пряма лінія</i> | $y = a_0 + a_1x$                         | $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = 0,$<br>$i = \overline{1; n-1}$                                                       |
| <i>2-парабола</i>  | $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$                | $y_{i-1} - 3y_i + 3y_{i+1} - y_{i+2} = 0,$<br>$i = \overline{1; n-2}$                                            |
| <i>3-парабола</i>  | $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$       | $y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} +$<br>$+ y_{i+2} = 0, \quad i = \overline{2; n-2}$                         |
| <i>4-парабола</i>  | $y = a_0 + a_1x +$<br>$+ \dots + a_4x^4$ | $y_{i-2} - 5y_{i-1} + 10y_i - 10y_{i+1} +$<br>$+ 5y_{i+2} - y_{i+3} = 0, \quad i = \overline{2; n-3}$            |
| <i>5-парабола</i>  | $y = a_0 + a_1x +$<br>$+ \dots + a_5x^5$ | $y_{i-3} - 6y_{i-2} + 15y_{i-1} - 20y_i +$<br>$+ 15y_{i+1} - 6y_{i+2} + y_{i+3} = 0,$<br>$i = \overline{3; n-3}$ |

У загальному випадку різницеві рівняння алгебраїчного  $k$ -полінома з початковою точкою  $y_p$  мають вигляд

$$\sum_{i=0}^{k+1} y_{i+p} \cdot (-1)^i C_{k+1}^i = 0, \quad (1.10)$$

де  $C_{k+1}^i$  – число сполучень із  $k+1$  елементів по  $i$ .

$$C_{k+1}^i = \frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!}.$$

За описаною методикою можна одержати різницеві подання тригонометричних, показникових (експоненціальних) поліномів. Для інших видів функцій виключення параметрів через їхню нелінійність не завжди можливе.

При розв'язанні практичних завдань моделювання доцільним може виявитися дискретне подання функції на основі деяких параметрів її ДПК (рис. 1.7). Нагадуємо, що сітка абсцис при цьому заздалегідь задана.

Наприклад, якщо задані початкова точка  $(x_0, y_0)$  й множина перевисень  $\Delta y_i$  на сітці  $x_i$ , то

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \Delta y_0, \\ y_2 &= y_1 + \Delta y_1 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1, \\ y_3 &= y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ y_k &= y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Delta y_i, \quad k = \overline{1;n}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Подання (1.11) і йому аналогічні широко використовуються в дискретній апроксимації й при формоутворенні опуклих ДПК.

Якщо відома множина кутів  $\alpha_i$  і початкова точка  $(x_0, y_0)$ , то подання ДПК має вигляд

$$y_k = y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} h_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i, \quad k = \overline{1;n} \quad (1.12)$$

Неважко скласти аналогічні дискретні подання для інших параметрів.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте загальний алгоритм одержання різницевого рівняння для даної неперервної функції. Якими властивостями повинна володіти ця функція?
2. Що собою являють різницеві рівняння алгебраїчних поліномів?
3. Чи можливі дискретні подання неперервних функцій на основі інших параметрів ДПК? Приведіть приклади.

### 1.5. АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС ДИСКРЕТНИХ ТОЧКОВИХ РЯДІВ

У багатьох випадках для організації обчислювального процесу, що є основою будь-якого методу ДГМ, необхідно мати аналітичний опис точкового ряду.

Розрізняють:

- *рекурентний* опис (див. табл. 1.3), коли точка розраховується на основі деякого числа попередніх точок. Покажемо це на прикладі 3-полінома (1.9) для відомих точок  $y_0, y_1, y_2, y_3$ :

$$\begin{aligned} y_4 &= -y_0 + 4y_1 - 6y_2 + 4y_3, \\ y_5 &= -y_1 + 4y_2 - 6y_3 + 4y_4, \end{aligned} \quad (1.13)$$

і т.д., щораз зрушуючи індекс на одиницю вправо;

- *глобальний* опис, коли  $i$ -а точка розраховується на основі деяких базисних точок, що беруть участь у розрахунку будь-якої точки. Наприклад, рівняння (1.12) служить для розрахунку будь-якої точки ряду за заданою базисною точкою  $y_0$  і множиною кроків  $h_i$  і кутів  $\alpha_i$ . Різницеве рівняння (1.10) може бути не тільки рекурентним, але й охоплювати всі точки ряду. Розглянемо цей випадок докладніше. Насамперед помітимо, що, наприклад, 3-поліном може бути представлений не тільки різницеvim рівнянням, представленим у табл. 1.3, але й рівнянням

$$y_{i-1} - 3y_i + 3y_{i+1} - y_{i+2} = a, \quad i = \overline{1; n-2}, \quad (1.14)$$

де  $a = \text{const}$  – деяка стала величина. Виключення  $a$  із двох сусідніх рівнянь системи (1.14) приводить до системи в табл. 1.3. Чотири точки  $y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, y_{i+2}$  визначають єдиний 3-поліном на сітці  $h$ .

З теорії інтерполяції відомо, що для заданих  $(n+1)$  незбіжних точок завжди можна побудувати єдиний  $n$ - поліном Лагранжа, рівняння якого легко записується через так звані коефіцієнти Лагранжа. Ще легше його записати в дискретному вигляді (1.10), якщо  $p=0$ ,  $k=n$  і права частина дорівнює  $a$ , тобто

$$\sum_{i=0}^{n+1} y_i \cdot (-1)^i C_{n+1}^i = a. \quad (1.15)$$

Маючи таке рівняння, можна вирішувати деякі завдання моделювання, зокрема, згущення (ущільнення) точкового ряду, визначення його диференціальних характеристик.

У зв'язку із цим помітимо, що найбільш загальним способом одержання аналітичного опису дискретного точкового ряду є інтерполяція цього ряду поліномом Лагранжа з наступним введенням параметрів  $h_i$ . Маємо поліном Лагранжа (на прикладі 3-полінома)

$$y = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}. \quad (1.16)$$

При  $x = x_4$  маємо  $y = y_4$  з урахуванням  $h_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = \overline{0;3}$ ,

$$y_4 = y_0 \frac{(h_1+h_2+h_3)(h_2+h_3)h_3}{-h_0 \cdot (-h_0-h_1)(-h_0-h_1-h_2)} +$$

$$+ y_1 \frac{(h_0+h_1+h_2+h_3)(h_2+h_3)h_3}{h_0 \cdot (-h_1)(-h_1-h_2)} +$$

$$+ y_2 \frac{(h_0+h_1+h_2+h_3)(h_1+h_2+h_3)h_3}{(h_0+h_1)h_1 \cdot (-h_2)} +$$

$$+ y_3 \frac{(h_0+h_1+h_2+h_3)(h_1+h_2+h_3)(h_2+h_3)}{(h_0+h_1+h_2)(h_1+h_2)h_2}. \quad (1.17)$$

Як бачимо, на нерівномірній сітці різницева формула (1.17) має складний вигляд. На рівномірній сітці при  $h_i = h = \text{const}$  після спрощень маємо

$$y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 = 0. \quad (1.9)'$$

Рівняння (1.9)' означає, що точка  $y_4$  належить 3-поліному, що визначається 4-ма точками  $y_0, y_1, y_2, y_3$ . Якщо точковий ряд містить усього 4 точки, то 3-поліном краще записати у вигляді (1.14), де  $a = \text{const}$  – це диференціальна характеристика 3-полінома, що відповідає його 3-й похідній, що теж, як відомо, стала й дорівнює  $y''' = 6a_3$  (див. (1.5)).

Скориставшись викладеною методикою, можна одержати аналітичні описи на основі тригонометричних або показникових (експоненціальних) поліномів. Однак, отримані при цьому різницеві рівняння не спрощуються при введенні рівномірної сітки. Це можливо тільки на функціональних сітках (наприклад,  $h_i = \sin x_{i+1} - \sin x_i = \text{const}$ ), що може бути корисним при розв'язанні специфічних завдань моделювання.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які є різновиди аналітичного опису дискретних точкових рядів? Приведіть приклади.
2. У чому складається методика одержання аналітичного опису дискретного точкового ряду на заданій сітці за допомогою інтерполяційного полінома Лагранжа?

### 1.6 ПЕРЕХІД ВІД ДИСКРЕТНОГО ПОДАННЯ ДО НЕПЕРЕРВНОГО

Особливість прикладної дискретної геометрії полягає в тім, що її методи оперують із дискретними моделями. У природі явища й процеси є, як правило, неперервними. Неперервними є й моделюючі їх геометричні образи. І тільки для спрощення використання й проведення необхідних розрахунків удаються до дискретизації, до дослідження дискретних моделей.

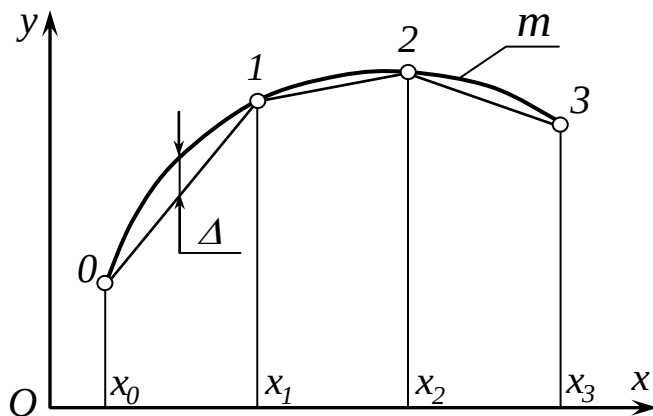


Рисунок 1.9 – Наближення кривої  $m$  ламаною лінією

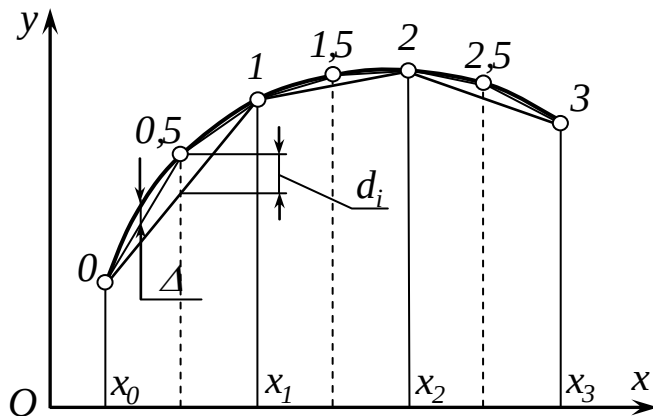


Рисунок 1.10 – Згущення точкового ряду  $0...3$

Як правило, по досягненні необхідних результатів потрібен зворотний перехід: від дискретної моделі до неперервної. І якщо дискретизація здійснюється порівняно просто, то зворотний перехід на координатному рівні є досить складним. Цей перехід може здійснюватися на чисельному рівні (відновлення значень параметрів неперервної моделі методами ДГМ у процесі розрахунків на дискретній моделі) або на функціональному рівні (відновлення функції за її дискретною моделлю (завдання теорії інтерполяції) або за її різнице-вим рівнянням (завдання теорії різнице-вих рівнянь)). Перший випадок особливих труднощів

не викликає. Другий залежить від складності модельованої функції, виду її дискретного подання, вимог точності й ін.

Завдання теорії неперервної інтерполяції, викладене досить повно в чисельних методах, ми тут розглядати не будемо.

Розглянемо два, принципово різних способи відновлення неперервної функції (кривої).

Перший спосіб складається у відновленні неперервної кривої лінії за її дискретним точковим рядом. Цей спосіб ґрунтується на теоремі Ремеза, відповідно до якої неперервна на відрізку функція може бути як завгодно точно представлена кусково-лінійною функцією (ламанною лінією), вузли якої належать заданій функції. Точність наближення оцінюється за величиною абсолютного відхилення  $\Delta$  кривої лінії  $m$  від відповідної ланки ламаної лінії (рис. 1.9) вздовж осі  $Oy$ .

Очевидно, що шляхом вибору точок на кривій  $m$  завжди можна домогтися як завгодно близького розташування локальної дуги (наприклад, 1-2) щодо стягуючої її ланки. Чим ближче одна від одної точки (вузли) ламаної, тим менше відхилення  $\Delta$ .

Очевидно, що зворотній процес теж має місце. Якщо є деякий точковий ряд і його супровідна ламана лінія  $0...3$  (рис. 1.10), то виконавши згущення (ущільнення) точкового ряду за певними алгоритмами (будуть розглянуті пізніше), одержимо нову СЛЛ із вузлами в точках згущення  $0.5, 1.5, 2.5$ . Очевидно, що згущена СЛЛ точніше моделює криву  $m$ , чим вихідна СЛЛ. Точність наближення можна оцінювати за величиною перевищення  $d_i$  точок згущення над відповідною хордою вихідної СЛЛ. Процес згущення можна повторити, перевищення при цьому стане ще менше й по досягненні як завгодно малої заданої величини  $\varepsilon$  можна вважати, що остання згущена СЛЛ моделює криву лінію  $m$  із заданою точністю  $\varepsilon$ . Природно, що при цьому перевищення  $d_i$  в точках згущення різне, тому порівняння  $d_i$  з  $\varepsilon$  ведеться по максимальному з них.

Цей спосіб відновлення невідомої нам кривої лінії  $m$  по її точковому ряду шляхом заміни її як завгодно щільно згущеною СЛЛ є основним при різних методах ДГМ.

Другий випадок стосується відновленню неперервної функції, коли задане її *аналітичне* дискретне подання у вигляді різницевого рівняння. Потрібно визначити рівняння кривої, для якої має місце задане різницеве рівняння (задача теорії різницевого рівнянь [4,8]). Будемо розглядати найпростіший випадок однорідних різницевого рівнянь із постійними коефіцієнтами (права частина дорівнює нулю).

Спосіб розв'язання полягає в наступному. Для однорідного різницевого рівняння з постійними коефіцієнтами  $a_i$ ,  $i = \overline{0;m}$ ,

$$a_0 y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_m y_m = 0, \quad (1.18)$$

за допомогою підстановки  $y_i = q^i$  складається характеристичне рівняння

$$a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots + a_m q^m = 0, \quad (1.19)$$

і відшукуються його корені  $q_1, q_2, \dots, q_m$ . Якщо корені виявилися прості (дійсні й різні), то глобальне подання має вигляд:

$$y_i = \sum_{k=1}^m c_k \cdot q_k^i, \quad (1.20)$$

тобто дискретний показниковий поліном,  $c_k$  – коефіцієнти.

Якщо корінь  $q_l$  має кратність  $r$ ,  $r < m$ , то в (1.20) відповідні доданки замінюються багаточленом

$$q_l^i (c_l + c_{l+1} \cdot i + c_{l+2} \cdot i^2 + \dots + c_{l+r-1} \cdot i^{r-1}).$$

Якщо коефіцієнти  $a_0, a_1, \dots, a_m$  дійсні й характеристичне рівняння має комплексний корінь  $q_s = \rho(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ , то цьому відповідають два лінійно незалежних дійсних розв'язки

$$\rho^j \cos j\varphi \text{ і } \rho^j \sin j\varphi,$$

тобто дискретний показниковий поліном має тригонометричну складову.

Відзначимо, що ця струнка теорія на практиці виявляється мало застосовною, оскільки алгебраїчні рівняння степеня вище 4 у радикалах нерозв'язні, тобто заздалегідь важко сказати, якими будуть корені характеристичного рівняння і яким буде розв'язок рівняння (1.18).

Крім того, загальний розв'язок (1.20) носить дискретний характер і не завжди припускає перехід до неперервного виду.

Пояснимо це на прикладі різницевого рівняння другого порядку.

$$a_0 y_n + a_1 y_{n+1} + a_2 y_{n+2} = 0, \quad (1.21)$$

Характеристичне рівняння

$$a_2 q^2 + a_1 q + a_0 = 0$$

має корені

$$q_{1,2} = \frac{1}{2a_2} \left[ -a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2} \right]. \quad (1.22)$$

Загальний розв'язок при дійсних  $q_1 \neq q_2$  має вигляд

$$y_i = c_1 \cdot \frac{q_2 \cdot q_1^i - q_1 \cdot q_2^i}{q_2 - q_1} + c_2 \cdot \frac{q_2^i - q_1^i}{q_2 - q_1}, \quad (1.23)$$

де  $c_1$  й  $c_2$  – довільні сталі, обумовлені з початкових або граничних умов.

Відразу відзначимо, що, якщо  $q_1$  й  $q_2$  додатні, то (1.23) припускає заміну  $i$  на неперервне  $x$ , що дає неперервну криву

$$y = c_1 \cdot \frac{q_2 q_1^x - q_1 q_2^x}{q_2 - q_1} + c_2 \cdot \frac{q_2^x - q_1^x}{q_2 - q_1}. \quad (1.24)$$



У протилежному випадку (один з коренів або обоє від'ємні) функція (1.24) при дробових  $x$  не буде мати дійсних значень.

Якщо  $q_1$  й  $q_2$  – комплексно спряжені корені:

$$q_{1,2} = \rho(\cos\varphi \pm i \cdot \sin\varphi). \quad (1.25)$$

те загальний розв'язок має вигляд

$$y_s = -c_1 \cdot \rho^s \frac{\sin(s-1)\varphi}{\sin\varphi} + c_2 \cdot \rho^{s-1} \frac{\sin s\varphi}{\sin\varphi}; \quad s = \overline{0; m}. \quad (1.26)$$

Очевидно, що й (1.26) припускає заміну дискретного  $s$  на неперервне  $x$ , забезпечуючи в такий спосіб перехід до неперервної кривої.

У випадку кратного кореня маємо

$$y_s = -c_1(s-1)q_1^s + c_2 \cdot s \cdot q_1^{s-1}. \quad (1.27)$$

Очевидно, що (1.27) припускає перехід до неперервної кривої за умови, що  $q_1 > 0$ .

Різницеві рівняння, представлені в табл. 1.3, мають цікаву особливість: їхні характеристичні рівняння мають всі корені кратні й такі, що дорівнюють одиниці, так що кожному різницевому рівнянню буде відповідати неперервний алгебраїчний поліном, степінь якого на одиницю менше порядку різницевого рівняння, що й відбито в табл. 1.3.

Підбиваючи підсумок, можна відзначити, що перехід від різницевого рівняння деякої ДПК до її неперервного образу можливий завжди за винятком випадків, коли хоча б один з коренів характеристичного рівняння від'ємний.

Практично це завдання важко розв'язне для різницевих рівнянь порядку вище 4.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чим викликана необхідність переходу від дискретного подання до неперервного?
2. У чому суть способу відновлення неперервної кривої по її точковому ряду на основі його згущення?
3. Сформулюйте алгоритм переходу від різницевого рівняння до глобального подання. Як залежить глобальне подання від виду коренів характеристичного рівняння?
4. Якими є корені характеристичного рівняння тригонометричного полінома, алгебраїчного полінома?
5. Якими властивостями повинні володіти корені характеристичного рівняння, щоб глобальне подання давало можливість переходу до неперервної функції?

## РОЗДІЛ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДПК

Особливістю дискретних точкових множин є те, що для них незастосовні поняття *неперервності* й *межі*. Отже, у звичайному нашому розумінні такі поняття, як похідна, кривина, дотична, нормаль і ін. не мають місця. Однак, як було раніше вказано, у природі майже немає дискретних ГО й завданням моделювання є все-таки одержання неперервного ГО із заданими властивостями. Ми зараз спеціально не беремо до уваги моделі, сама природа яких є дискретною й неперервна їхня форма не потрібна (добовий або місячний графік опадів, надойв, річний графік урожайності й т.п.). Мова йде про ті випадки, коли є або передбачається деяка крива лінія (функція), представлена з метою спрощення розрахунків при розв'язанні певного завдання деяким точковим рядом. Розв'язання завдання припускає урахування похідних початкової функції (дотичних до її графіка) у деяких її вузлах-точках згаданого ряду. Маючи тільки точковий ряд, у жодному його вузлі провести дотичну неможливо. І все-таки таку дотичну можна задати, припускаючи, що врешті-решт через точковий ряд буде проведена шукана крива й цієї кривої у даному вузлі буде стосуватися побудована дотична. Таким чином у вузлах дискретного точкового ряду можна задати (розрахувати за спеціальними алгоритмами, визначити) значення похідних, кривини *майбутньої кривої*, побудувати її дотичні, нормалі, визначити її інші диференціально-геометричні характеристики. Інакше: дотичні, нормалі, кривини і т.д. відносяться до *майбутньої кривої*, а не до даного точкового ряду, хоча на підставі його параметрів вони визначаються. При цьому для точкового ряду вводяться *дискретні аналоги* зазначених характеристик, що обчислюються на основі параметрів ряду і являються досить грубим їхнім наближенням, що уточнюється в процесі моделювання.

### 2.1. СКІНЧЕННІ Й ПОДІЛЕНІ РІЗНИЦІ

#### 2.1.1. СКІНЧЕННІ РІЗНИЦІ

Розглянемо точковий ряд  $\langle x_i, y_i \rangle, i = \overline{0; n}$ , деякої функції  $f$  на рівномірній сітці із кроком  $h$ . Величина

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad i = \overline{0; n-1}, \quad (2.1)$$

називається *скінченною різницею першого порядку* в точці  $X_i$ .  $\Delta$  – це різницевий оператор, що означає узяття різниці, коли з наступного значення координати, параметра і т.п. віднімається попереднє значення.

Узагальнимо операцію, визначену в (2.1).

Величина

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}, \quad i = \overline{0; n-2} \quad (2.2)$$

називається *скінченною різницею другого порядку* в т.  $x_i$  (різниця різниць першого порядку). Взагалі, скінченна різниця  $n$ -го порядку в т.  $x_i$  визначається за рекурентною формулою

$$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i, \quad (2.3)$$

де  $n \geq 1$ ,  $\Delta^0 y_i = y_i$ .

У загальному вигляді різниця  $k$ -го порядку з початковою точкою  $y_p$  визначається через ординати її точок за формулою

$$\Delta^k y_p = (-1)^k \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i y_{i+p}; \quad (2.4)$$

отриманою послідовним узагальненням (2.2) згідно з рекурентним співвідношенням (2.3).

Наприклад, різниця 3-го порядку визначається за формулою

$$\Delta^3 y_p = -y_p + 3y_{p+1} - 3y_{p+2} + y_{p+3}. \quad (2.5)$$

При обчисленнях скінченні різниці зручно розташовувати у вигляді табл. 2.1.

Таблиця 2.1– Скінченні різниці

| $x$   | $y$   | $\Delta y$   | $\Delta^2 y$   | $\Delta^3 y$   | $\Delta^4 y$   | $\Delta^5 y$   |
|-------|-------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $x_0$ | $y_0$ | $\Delta y_0$ | $\Delta^2 y_0$ | $\Delta^3 y_0$ | $\Delta^4 y_0$ | $\Delta^5 y_0$ |
| $x_1$ | $y_1$ | $\Delta y_1$ | $\Delta^2 y_1$ | $\Delta^3 y_1$ | $\Delta^4 y_1$ |                |
| $x_2$ | $y_2$ | $\Delta y_2$ | $\Delta^2 y_2$ | $\Delta^3 y_2$ |                |                |
| $x_3$ | $y_3$ | $\Delta y_3$ | $\Delta^2 y_3$ |                |                |                |
| $x_4$ | $y_4$ | $\Delta y_4$ |                |                |                |                |
| $x_5$ | $y_5$ |              |                |                |                |                |

Кожна наступна різниця записується в рядку, розташованому між рядками двох попередніх різниць, за допомогою яких отримане дане значення. Наприклад, різниця  $\Delta^3 y_1$  розташована між рядками  $\Delta^2 y_2$  й  $\Delta^2 y_1$ , оскільки  $\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$ . Чим вище порядок різниць, тим менша їхня кількість. Третіх різниць - три значення, четвертих - два, п'ятих - одне, оскільки воно охоплює ординати всіх шести заданих точок. Це доводить відоме твердження:

*Скінченна різниця  $n$ -го порядку алгебраїчного багаточлена  $n$ -го сте-*

пеня стала, а скінченні різниці більш високих порядків дорівнюють нулю.

Очевидно, що для розрахунку різниць більш високого порядку на  $n$ -поліномі треба взяти число точок більше  $n + 1$ .

У нашій випадку задані 6 точок визначають єдиний 5-поліном, його 5-а різниця стала. (див. п. 1.5 і рівняння (1.15)).

Таким чином встановлюється тісний зв'язок між скінченними різницями і алгебраїчними поліномами. Можна сформулювати зворотне твердження:

*Якщо для заданого точкового ряду скінченні різниці порядку  $k$  дорівнюють нулю, значить точки розташовані на поліномі порядку  $k - 1$ .*

Це положення використовується для визначення порядку полінома, що інтерполює заданий точковий ряд. Якщо якийсь стовпець таблиці різниць (наприклад,  $\Delta^3 y$ ) становлять близькі один до одного значення, то в наступному стовпці будуть близькі до нуля значення. Отже, степінь полінома дорівнює порядку близьких один до одного різниць (у нашій прикладі 3-поліном).

Приведемо приклад, запозичений із книги Є. А. Волков, Чисельні методи (стор. 52), де подана таблиця значень функції  $f(x) = \sin x$  і її скінченних різниць.

Таблиця 2.2 – Скінченні різниці функції  $f(x) = \sin x$

| $x, \text{град}$ | $f(x)$   | $\Delta f$ | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ |
|------------------|----------|------------|--------------|--------------|
| 5                | 0,087156 | 34713      |              |              |
| 7                | 0,121869 | 34565      | -148         |              |
| 9                | 0,156434 | 34375      | 190          | -42          |
| 11               | 0,190809 | 34142      | -233         | -43          |
| 13               | 0,224951 | 33868      | -274         | -41          |
| 15               | 0,258819 |            |              |              |

Скінченні різниці в таблиці для простоти прийнято вписувати в числі одиниць наступного десяткового знака без вказівки положення коми.

Як бачимо, значення третьої різниці близькі одне до одного. Отже, для інтерполяції ДПК на заданому відрізку можна застосувати 3-поліном.

### 2.1.2. ПОДІЛЕНІ РІЗНИЦІ

Розглянемо точковий ряд  $\{x_i, y_i\}_{i=0}^n$ , деякої функції  $f$  на нерівномірній сітці  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , причому  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ .

Значення  $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$  у вузлах сітки називаються *поділеними різницями нульового порядку*. Число

$$f \llbracket_0; x_1 \rrbracket = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (2.6)$$

називається *поділеною різницею першого порядку*. Неважко помітити, що значення поділеної різниці першого порядку – це тангенс кута нахилу відповідної ланки СЛЛ до осі  $Ox$ , тобто  $f \llbracket_0; x_1 \rrbracket = \operatorname{tg} \alpha_0$ , взагалі  $f \llbracket_i; x_{i+1} \rrbracket = \operatorname{tg} \alpha_i$ . У чисельних методах доводиться, що поділена різниця є симетричною функцією аргументів, тобто не залежить від їхнього порядку

$$f \llbracket_0; x_1 \rrbracket = f \llbracket_1; x_0 \rrbracket = \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0}; \quad (2.7)$$

Узагальнюючи (2.7), одержуємо формулу для поділеної різниці  $n$ -го порядку

$$f \llbracket_0; x_1; \dots; x_n \rrbracket = \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{\llbracket_i - x_0 \rrbracket \cdot \llbracket_i - x_{i-1} \rrbracket \cdot \llbracket_i - x_{i+1} \rrbracket \cdot \llbracket_i - x_n \rrbracket}; \quad (2.8)$$

яка теж є симетричною функцією своїх аргументів  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

Як і для скінченних різниць, існує рекурентна формула для поділених різниць

$$f \llbracket_0; x_1; \dots; x_n \rrbracket = \frac{f \llbracket_1; x_2; \dots; x_n \rrbracket - f \llbracket_0; x_1; \dots; x_{n-1} \rrbracket}{x_n - x_0}; \quad (2.9)$$

При обчисленнях поділені різниці розташовують у таблиці аналогічно скінченним різницям.

Помітимо, що поділені різниці можна розрахувати й для точок, розташованих на рівномірній сітці із кроком  $h$ . У цьому випадку між поділеною різницею  $n$ -го порядку й скінченною різницею  $n$ -го порядку існує наступна залежність

$$f \llbracket_0; x_1; \dots; x_n \rrbracket = \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}; \quad (2.10)$$

Існує також зв'язок між значеннями поділеної різниці  $n$ -го порядку й похідної  $n$ -го порядку функції  $f$ , що містить даний точковий ряд. У теорії чисельних методів доводиться, що для  $n$  раз диференційованої функції  $f$  існує така точка  $\eta \in \llbracket_0, x_n \rrbracket$ , що

$$f \llbracket_0; x_1; \dots; x_n \rrbracket = \frac{f^{(n)}(\eta)}{n!}. \quad (2.11)$$

Недолік формули (2.11) складається в невизначеності точки  $\eta$ .

Як і у випадку скінченних різниць, *поділена різниця  $n$ -го порядку від алгебраїчного полінома  $n$ -го степеня приймає сталі значення, що не залежить від вибору вузлів  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , а поділені різниці більш високих порядків дорівнюють нулю.*

Поділені різниці є основою для формування інтерполяційного полінома Ньютона:

$$y = f(x_0) + (x - x_0) \Delta f(x_0; x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} \Delta^2 f(x_0; x_1; x_2) + \dots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{n!} \Delta^n f(x_0; x_1; \dots; x_n) \quad (2.12)$$

Цей поліном відрізняється від полінома Лагранжа формою запису й зручністю в обчислювальній роботі. Додавання зайвої точки до заданого ряду веде до обчислення ще однієї різниці й додавання до (2.12) ще одного доданка в той час, як додавання точки в поліномі Лагранжа веде до перерахування всього полінома. За величиною останньої поділеної різниці можна судити про міру наближення точкового ряду алгебраїчним поліномом.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке скінченна різниця?
2. Що собою являють коефіцієнти ряду для обчислення скінченної різниці через ординати точок?
3. Що таке порядок різниці? Як він пов'язаний з кількістю точок, що беруть участь в обчисленні даної різниці?
4. Як складається таблиця різниць?
5. Чому дорівнюють різниці  $n$ -го й  $(n+1)$ -го порядків алгебраїчного полінома  $n$ -го порядку?
6. Що таке поділена різниця 1-го порядку?
7. У чому складається зміст рекурентних формул для обчислення поділених різниць?
8. Чи можуть існувати поділені різниці на рівномірній сітці?
9. Як пов'язані значення похідної і відповідної поділеної різниці?
10. У чому переваги інтерполяційного полінома Ньютона, побудованого на сукупності значень поділених різниць, у порівнянні з поліномом Лагранжа?

## 2.2. ГЕОМЕТРИЧНИЙ АНАЛІЗ ДИСКРЕТНИХ ТОЧКОВИХ РЯДІВ. ОПУКЛІСТЬ І УВІГНУТІСТЬ. ДІЛЯНКИ ПЕРЕГИНУ

Геометричний аналіз дискретних точкових рядів містить у собі визначення екстремальних точок, ділянок перетину ДПК із осями координат, особливих точок (точки звороту, самоперетинання й ін.), а також ділянок опук-

лості, увігнутості й перехідних ділянок.

*Екстремальні* точки визначаються за таблицею значень координат, як відповідні до їхніх екстремальних значень. Раніше ми торкалися цього питання (рис.1.8. п.1.3).

Ділянка *перетину ДПК із осями координат* визначається за зміною знака відповідної координати. Перетин ланки СЛЛ у цьому місці з віссю координат визначає в дуже грубому наближенні дійсну точку перетину кривої, представленої даним точковим рядом, з віссю координат. Уточнення цієї точки здійснюється за спеціальними алгоритмами.

Моделювання ДПК біля *особливих точок* також здійснюється за спеціальними алгоритмами.

Особливе значення в практиці моделювання ДПК має визначення ділянок опуклості, увігнутості й ділянок перегину, оскільки геометричні співвідношення між елементами ГО, а також розрахункові формули в кожному із цих випадків різні. Розглянемо їх один по одному.

Неперервна крива *m* може бути *опуклою догори* (рис. 2.1) або *опуклою донизу* (рис. 2.2). Досить часто опуклою називають тільки опуклу догори криву, а опуклу донизу – *увігнутою кривою*.

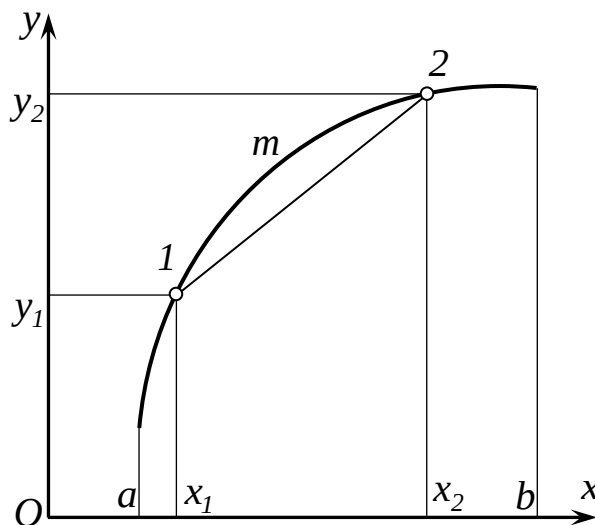


Рисунок 2.1 – Опукла крива

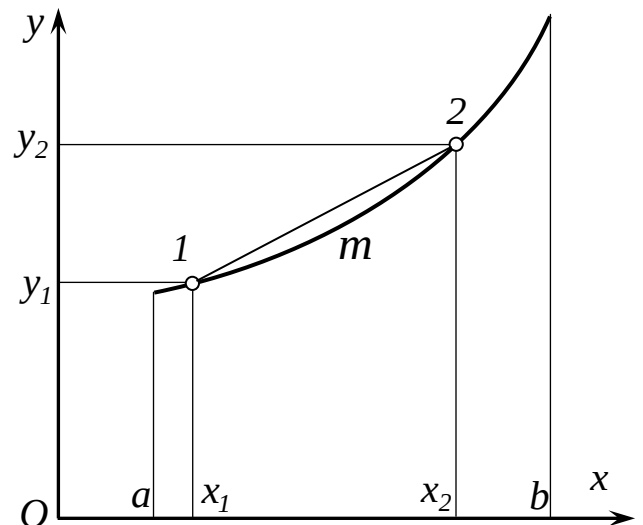


Рисунок 2.2 – Увігнута крива

Дуга опуклої кривої лежить всіма своїми точками вище стягуючої її хорди, а увігнутої - нижче.

Дискретний точковий ряд (ДТР), розташований на опуклій кривій, також називається опуклим (рис. 2.3); на увігнутій кривій – увігнутим (рис. 2.4).

На рис.2.3 і рис.2.4 точки рядів з'єднані для наочності ланками супровідних ламаних ліній (СЛЛ).

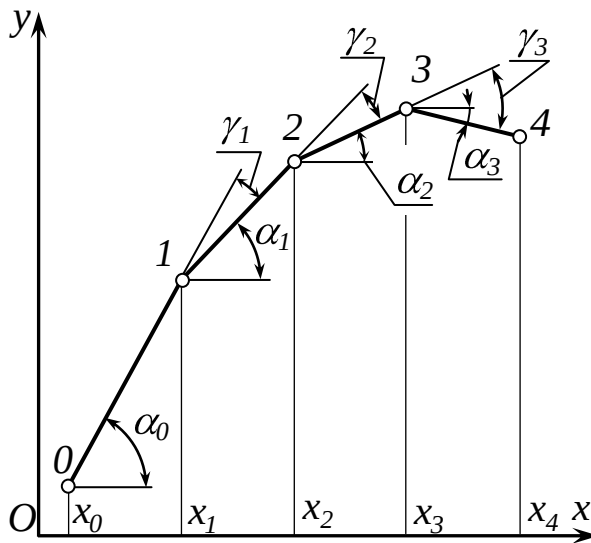


Рисунок 2.3 – Опуклий точковий ряд

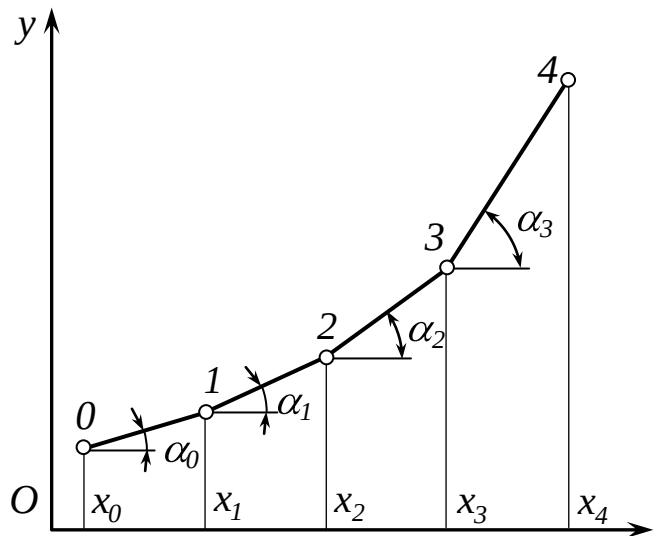


Рисунок 2.4 – Увігнутий точковий ряд

Опуклі (увігнуті) ДТР, мають певні диференціально-геометричні властивості.

Сформулюємо їх для опуклих ДПК:

1. Множина значень кутів нахилу  $\alpha_i$  ланок СЛЛ уздовж ДПК є монотонно спадною (рис. 2.3). Із цією множиною тісно зв'язана множина значень тангенсів  $\alpha_i$  або перших поділених різниць. Звідси випливає: множина значень поділених різниць для опуклих ДПК є монотонно спадною. Аналогічне твердження можна сформулювати для скінченних різниць.
2. Множина значень других різниць (поділених або скінченних) для опуклої ДПК є від'ємно визначеною.

Це випливає з того, що множина значень перших різниць монотонно спадна, тобто кожне наступне значення менше попереднього. Отже, їхня різниця менше нуля.

Неважко бачити, що й перша й друга властивості тісно пов'язані з диференціальними властивостями неперервних кривих (функцій). Для них перші похідні функції є монотонно спадні, а другі похідні – від'ємно визначені.

Розглянемо ще одну властивість, широко використовувану в практичних методах ДГМ, особливо багатозначних ДПК.

3. Множина значень кутів суміжності ланок СЛЛ опуклої ДПК від'ємно визначена (див. рис. 2.3).

Ця властивість, з огляду на те, що  $\gamma_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$ , випливає із властивості 1, але виділена нами спеціально, оскільки вона має самостійне значення. Помітимо, що кути суміжності (рис.2.3) мають однаковий знак, що збігається зі знаком другої різниці. Рекомендуємо читачеві, як вправу, сформулю-



вати аналогічні властивості для увігнутих ДПК, орієнтуючись на рис.2.4.

Звернемо увагу на те, що властивість опуклості ДПК залежить від напрямку її обходу. Сформульовані нами властивості ілюструються рис. 2.3 при обході ДПК від т. 0 до т. 4. Якщо точки перенумерувати так, що початкова т. 0 буде в т. 4, а кінцева т. 4 буде в т. 0, то обхід ДПК буде справа – наліво і властивості 1-3 зміняться на протилежні. Множина кутів  $\alpha_i$  буде монотонно зростаючою, кути  $\gamma_i$  будуть додатні, як і другі різниці. Можна зробити висновок, що перенумерована ДПК – увігнута, хоча візуально це не так. От чому нумерація вузлів однозначних ДПК здійснюється зліва – направо. По-перше, це відповідає зростанню аргументу  $x$ , по-друге, це відповідає природному уявленню про опуклі й увігнуті криві.

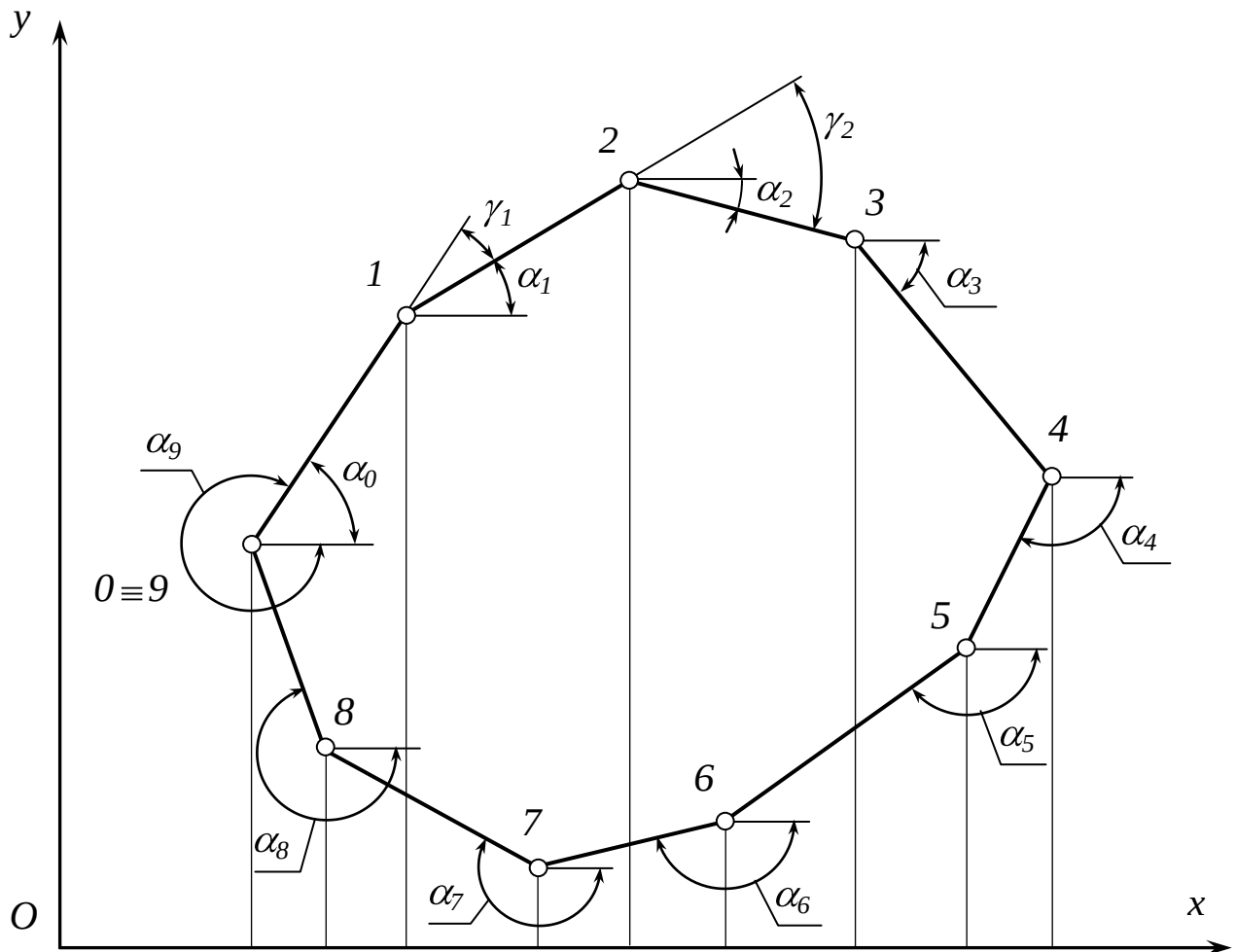


Рисунок 2.5 – Кути нахилу ланок СЛЛ замкненої ДПК

Розглянемо із цих позицій замкнену ДПК (рис.2.5). Нагадаємо, що замкненою називається крива, у якій початкова й кінцева точки збігаються. Нумерація точок здійснена у верхній частині ДПК зліва – направо, а потім продовжена до кінцевої точки, так що загальний напрямок обходу - за годинниковою стрілкою.

Звернемо увагу на те, що починаючи від т. 0 кути нахилу  $\alpha_i$  ланок СЛЛ розглянутої ДПК монотонно зменшуються аж до т. 9, де ланка, що ви-

ходить із т. 9, збігається з ланкою 0-1. Отже, кути суміжності  $\gamma_i < 0, i = \overline{0;9}$ , що підтверджує, що ДПК опукла у всіх точках. До такого ж висновку можна прийти, розглядаючи ДПК як опуклий багатокутник. Як відомо, ознакою опуклості багатокутника є те, що всі його вершини розташовані по один бік від будь-якої із його хорд.

Тепер спробуємо поділити замкнену ДПК (рис.2.5) на дві частини:

- перша від т. 0 до т. 4 – опукла в повній відповідності зі змінами кутів  $\alpha_i$  і нашим поданням (рис. 2.3);
- друга від т. 4 до т. 9 – опукла відповідно до наших попередніх міркувань про зміну кутів  $\alpha_i$ , але за формою – увігнута (див. рис. 2.4). Однак тут немає протиріччя, тому що нумерація точок іде справа - наліво і це вимагає зміни нашої уяви про напрямок її опуклості.

Висновок напрашується такий: при визначенні опуклості (увігнутості) ДПК треба орієнтуватися на властивості 1-3, а не на гадану її форму.

Аналогічні міркування стосуються й незамкнених багатозначних ДПК. Досвід моделювання показує, що для таких ДПК найбільш ефективним способом установлення опуклості (увігнутості) їхніх ділянок є зіставлення кутів  $\alpha_i$  і  $\gamma_i$ .

Реальна ДПК має, як правило, складну конфігурацію, багато опуклих і увігнутих ділянок. Між ними завжди є ділянка перегину, причому точка перегину, у якій закінчується опукла ділянка й починається увігнута, як правило, не визначена (не задана). На рис. 2.6 представлений фрагмент такої ДПК. Розглянемо її відповідно до нумерації точок. Помічаємо, що від т. 0 до т. 5 множина кутів  $\alpha_i, i = \overline{0;4}$ , є монотонно спадною, у т. 5 монотонність порушується,  $\alpha_5 > \alpha_4$ , значить ДПК від т. 0 до т. 5 є опуклою. З іншого боку, починаючи з  $\alpha_4$  до  $\alpha_8$ , помічаємо, що множина кутів  $\alpha_i$  є монотонно зростаючою, що свідчить про увігнутість ділянки 4-9.

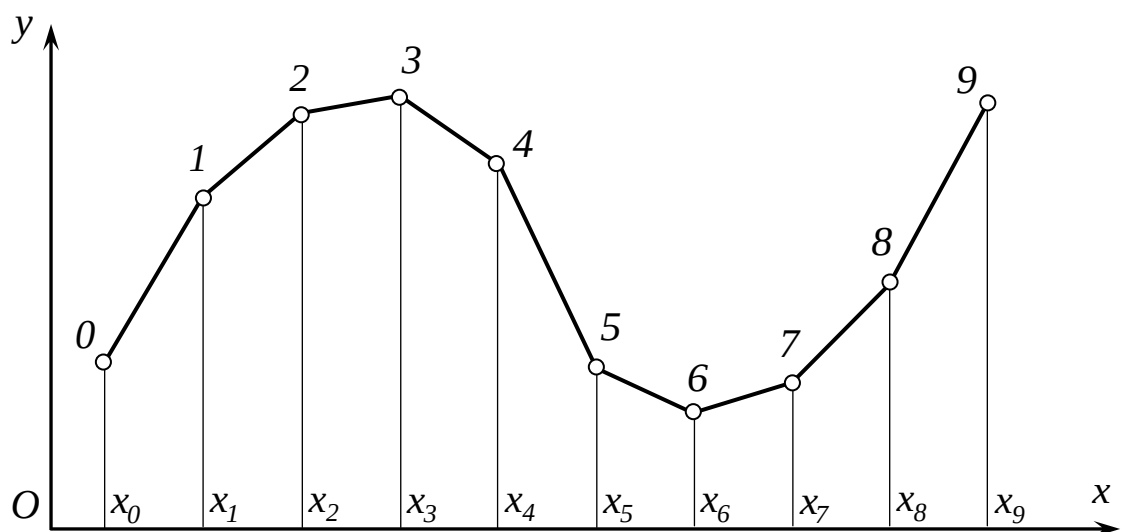


Рисунок 2.6 – Фрагмент ДПК с ділянкою перегину 4-5

У такий спосіб доходимо висновку, що ділянку 4-5 можна віднести як до опуклої, так і до увігнутої частини ДПК, тобто вона є перехідною ділянкою від опуклості до увігнутості. На цій ділянці повинна перебувати точка перегину, відшукування якої проводиться за спеціальними алгоритмами.

В якості вправи обґрунтуйте наявність ділянки перегину між точками 4 і 5 за допомогою других поділених (скінченних) різниць або за допомогою кутів суміжності  $\gamma_i$ .

Точки (ділянки) перегину відіграють важливу роль при моделюванні, оскільки до ділянки перегину (рис.2.6) розрахунок ведеться за алгоритмами і формулами опуклої ДПК, а після ділянки перегину - за формулами увігнутої ДПК.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як визначаються екстремальні точки ДПК по осях?
2. Як визначаються ділянки перетину ДПК із осями координат?
3. Яка ДПК називається опуклою, увігнутою?
4. Як зв'язані опуклість ДПК і множина значень її 1-х різниць, її 2-х різниць, кутів суміжності її СЛЛ?
5. Як відрізняються перераховані в п.4 множини значень для опуклої й увігнутої ДПК?
6. Що таке ділянка перегину? Як змінюються перераховані в п.4 множини значень при проходженні ділянки перегину?

## 2.3. ДОТИЧНА І НОРМАЛЬ У ВУЗЛАХ ДПК. ДИСКРЕТНА КРИВИНА

### 2.3.1. ДОТИЧНА

Розглянемо точковий ряд деякої ДПК (рис. 2.7) разом з його СЛЛ. Як один з можливих варіантів представимо деяку опуклу криву  $m$ , що проходить через точки ряду (на рис. 2.7 – штрихова лінія). У кожному з кутів ДПК тепер можна провести дотичну до лінії  $m$ . На рис 2.7 показана дотична  $t_1$  у вузлі 1.

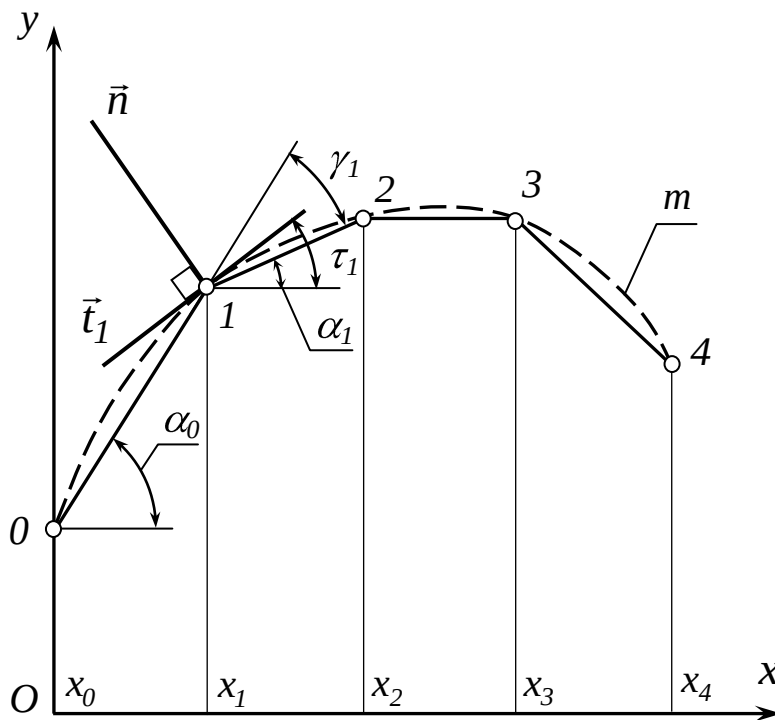


Рисунок 2.7 – Проведення дотичної у вузлі 1 опуклої ДПК

Очевидно, це не єдине розв'язання. Оскільки кривих ліній через задані точки можна провести безліч, то і дотичних у точці 1 може існувати незліченна безліч. Ця обставина обумовлює можливість накладення певної кількості додаткових умов для усунення невизначеності, що створилася. Це можуть бути як локальні, так і глобальні властивості моделюємої кривої  $m$ , вимоги технології, дизайну, регулярності і т.п. Оскільки дана ДПК є опуклою, то природно припустити, що і крива  $m$  теж опукла. Якщо немає інших вимог

до форми кривої, то умова опуклості є визначальною при виборі (призначенні) дотичної  $t_1$ . Це значить, що пряма  $t_1$  повинна проходити усередині кута  $\varphi_1$  суміжності сусідніх ланок СЛЛ у т. 1, тобто

$$\bar{b}_1 < \varphi_1 < \bar{b}_0, \quad (2.13)$$

де  $\varphi_1$  – кут нахилу дотичної  $t_1$  до осі  $Ox$ .

З огляду на те, що  $y'_1 = \tan \varphi_1$  – значення 1-ї похідної в т. 1, а тангенси кутів  $\bar{b}_0$  і  $\bar{b}_1$  – це відповідні поділені різниці, можна записати:

$$f \llbracket \llbracket 1; x_2 \rceil \rceil \lesssim y'_1 < f \llbracket \llbracket 0; x_1 \rceil \rceil. \quad (2.14)$$

Таким чином для опуклої ДПК значення похідної в довільному вузлі  $i$  обмежене зверху значенням попередньої поділеної різниці, а знизу – значенням наступної поділеної різниці:

$$f \llbracket \llbracket i; x_{i+1} \rceil \rceil \lesssim y'_i < f \llbracket \llbracket i-1; x_i \rceil \rceil. \quad (2.15)$$

У диференціальній геометрії звертається увага на те, що дотична – це вектор, що виходить із заданої точки під кутом до осі  $Ox$ , величина якого і

знак визначаються значеннями похідної (або параметричних похідних) у розглянутому вузлі, що і визначає напрямок вектора.

У дискретному геометричному моделюванні кут нахилу  $\phi$  обмежується зверху і знизу (див.(2.13)) значеннями кутів нахилу ланок СЛЛ, що перетинаються в даному вузлі ДПК. Величини  $\bar{b}_{i-1}$  і  $\bar{b}_i$  для вузла  $i$ , як і їхні знаки, визначені структурою СЛЛ і положенням початку відліку. Отже, тим самим визначено і додатній напрямок вектора дотичної. Наприклад, на рис.2.7  $\bar{b}_0, \bar{b}_1 > 0$ , отже  $\phi > 0$ . Він вибирається з (2.13). Наприклад,  $\phi = 0,5(\bar{b}_0 + \bar{b}_1)$ . Вектор  $t_1$  виходить з т.1 під кутом  $\phi$  до осі  $Ox$ .

### 2.3.2. НОРМАЛЬ

Аналогічно тому, як у вузлі ДПК можна побудувати вектор  $\vec{t}$ , дотичний до деякої кривої лінії  $m$ , можна побудувати в цьому ж вузлі і вектор  $\vec{n}$  нормалі до кривої, що складає з дотичною прямий кут і орієнтований так, що рухом у площині  $xOy$  прямий кут  $\vec{t}1\vec{n}$  може бути суміщений із системою координат: дотична – з віссю  $Ox$ , нормаль – з віссю  $Oy$ . Очевидно, що нормаль у т. 1 складає з віссю  $Ox$  кут  $\tau_1 + \frac{\pi}{2}$ . Якщо відомий кутовий коефіцієнт дотичної, тобто значення похідної  $y'_1$ , то кутовий коефіцієнт нормалі зворотний йому і за величиною і за знаком. Конкретно: одиничний вектор дотичної має координати  $\vec{t}_1 = [\cos\tau_1, \sin\tau_1]$ , а одиничний вектор нормалі  $\vec{n}_1 = [-\sin\tau_1, \cos\tau_1]$  (див. рис.2.7), кутовий коефіцієнт дотичної  $tg\tau_1$ , а нормалі  $-ctg\tau_1$ . Описаний спосіб побудови векторів дотичної і нормалі у вузлі ДПК згідно з (2.13) залишається незмінним для будь-якого вузла (крім нульового й останнього) ДПК будь-якої конфігурації і положення, оскільки наявність СЛЛ і заданого напрямку обходу однозначно визначають кути  $\bar{b}_i$  і, отже, діапазон вибору  $\phi$ .

На рис.2.8, як приклад, побудовані вектори дотичної і нормалі в точках 1, 3 і 4 неоднозначної ДПК. Помітимо, що в районі перехідної ланки 3-4 крива  $m$  має точку перегину (переходу від опуклої ділянки до увігнутої).

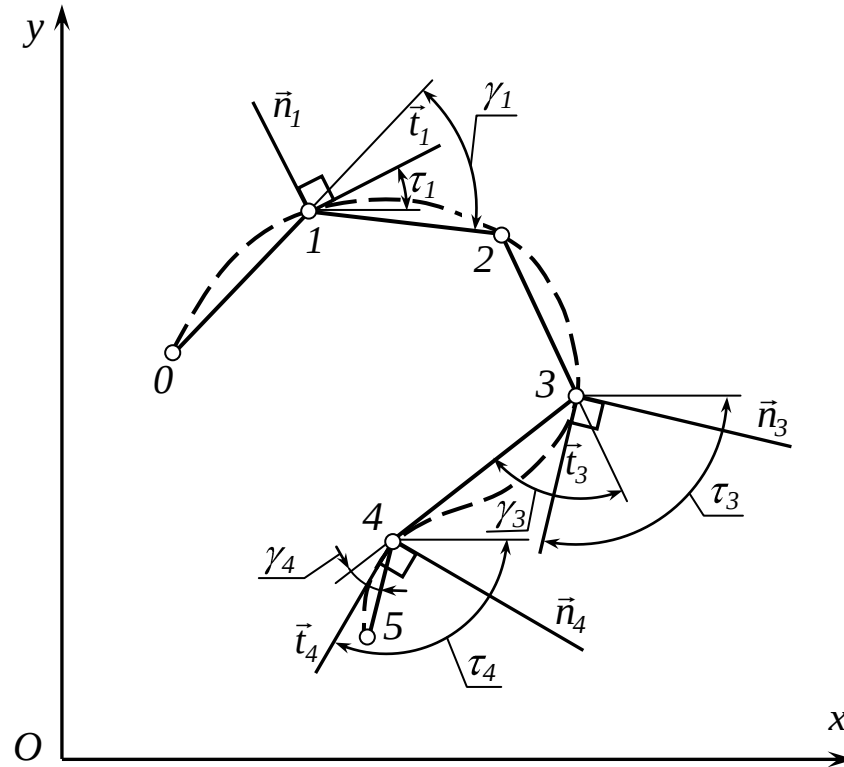


Рисунок 2.8 – Побудова векторів дотичної і нормалі в довільних вузлах ДПК

Для побудови векторів дотичної і нормалі у вузлах багатозначної ДПК можна скористатися її параметричними представленнями  $x(i)$  і  $y(i)$ . Для параметрично заданої кривої маємо

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{di}}{\frac{dx}{di}} = \frac{y'_i}{x'_i}. \quad (2.16)$$

Тут  $y'_i$  і  $x'_i$  – похідні функцій  $y(i)$  і  $x(i)$  по  $i$ . Співвідношення (2.16) показує, як ув'язані між собою похідні у вузлах параметричних ДПК (рис.2.9) і відповідні похідні у вузлах багатозначної ДПК (рис.2.8).

У вузлі 1

$$\operatorname{tg} \tau_1 = \frac{\operatorname{tg} \tau_{1y}}{\operatorname{tg} \tau_{1x}}. \quad (2.17)$$

У вузлах 3 і 4

$$\operatorname{tg} \tau_3 = \frac{\operatorname{tg} \tau_{3y}}{\operatorname{tg} \tau_{3x}}; \quad \operatorname{tg} \tau_4 = \frac{\operatorname{tg} \tau_{4y}}{\operatorname{tg} \tau_{4x}}.$$

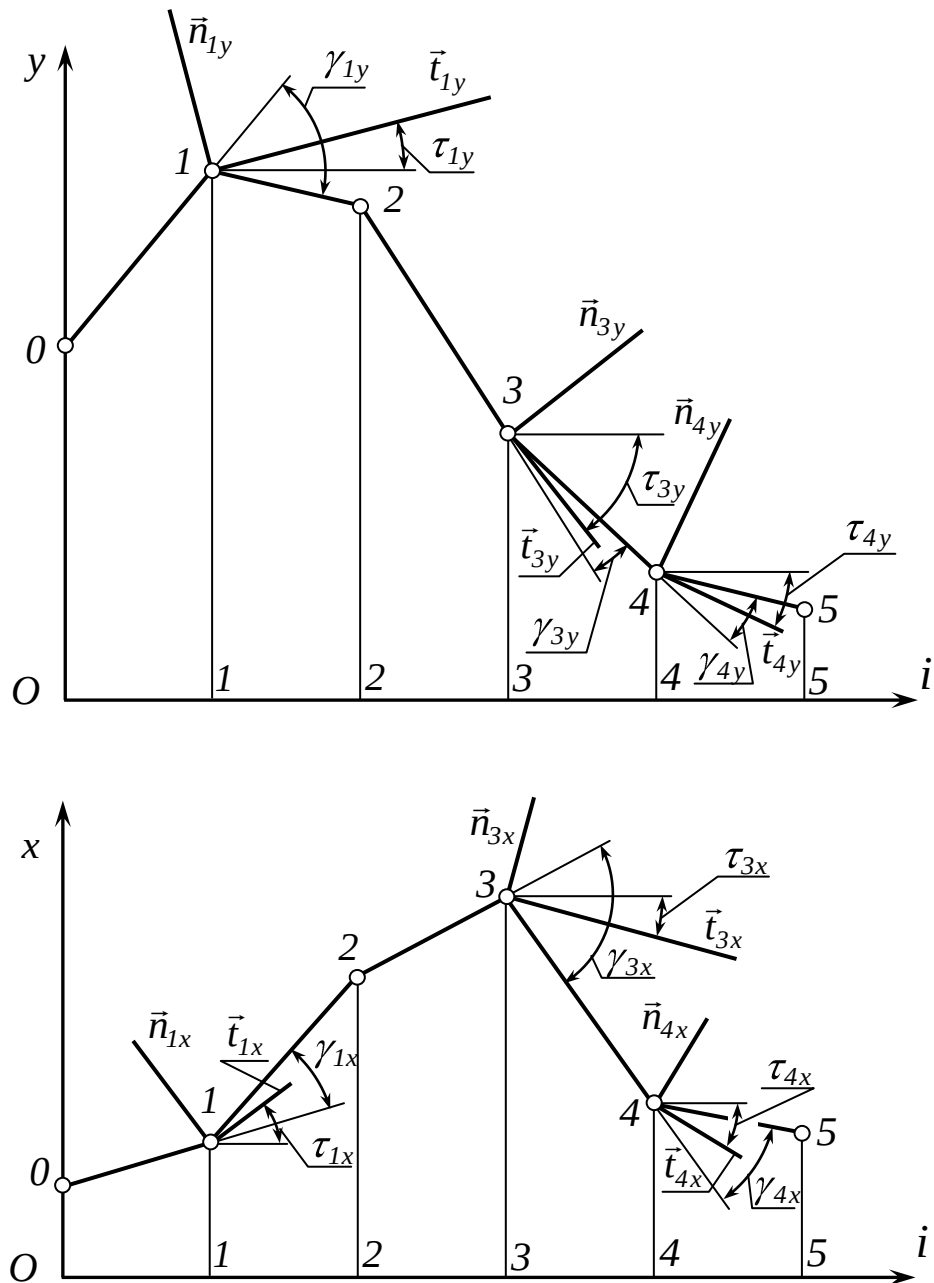


Рисунок 2.9 – Призначення дотичних у вузлах параметричних ДПК

Аналогічні співвідношення можна записати для нормалей. Позначимо кутовий коефіцієнт нормалі на рис.2.8 через  $k_{ni}$ . Він повинний бути оберненим за величиною і за знаком до кутового коефіцієнту дотичної. Тоді з урахуванням (2.16) маємо

$$k_{ni} = \frac{-x'_i}{y'_i} . \quad (2.18)$$

Зокрема, для вузла 1 маємо

$$k_{n1} = \frac{-tg\tau_{1x}}{tg\tau_{1y}} . \quad (2.19)$$

## 2.3.3. КРИВИНА

У диференціальній геометрії найважливішим параметром неперервної кривої  $m$  в даній її точці  $M$  є *кривина кривої*. Вона визначається, як межа відношення кута суміжності  $\Delta\varphi$  дотичних  $t$  і  $t'$  до довжини дуги  $\Delta S = MM'$  кривої, що з'єднує точки дотику, коли т.  $M'$  необмежено наближається до т.  $M$  (рис.2.10).

$$k = \lim_{M' \rightarrow M} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{d\varphi}{dS}. \quad (2.20)$$

При русі  $M' \rightarrow M$  уздовж дуги  $\Delta S$  вектор дотичної здійснює поворот так, що кут  $\Delta\varphi \rightarrow 0$  одночасно з  $\Delta S \rightarrow 0$ . Межею їхнього відношення і є кривина  $k$ .

Можна сказати, що мірою кривини кривої в будь-якій її точці може служити швидкість повороту дотичного вектора. Чим більша кривина, тим більша швидкість повороту.

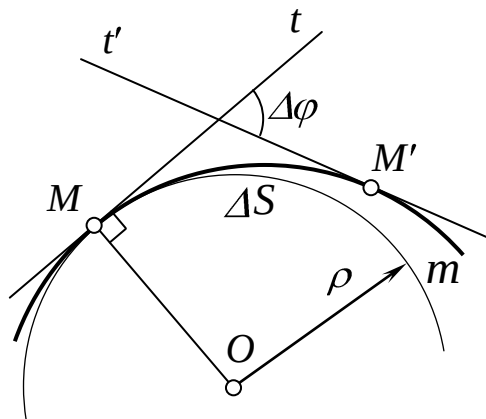


Рисунок 2.10 – До визначення кривини кривої

Величина, зворотна кривині, є *радіус кривини*

$$\rho = \frac{1}{k}. \quad (2.21)$$

Якщо через т.  $M$  провести коло радіуса  $\rho$ , що має загальну дотичну з кривою  $m$  в т.  $M$ , то це коло називається *колом кривини*, його центр  $O$  називається *центром кривини* і розташований з боку увігнутості кривої.

Якщо в нашому розпорядженні є точковий ряд деякої ДПК, а сама крива невідома, то описані побудови не мають місця, поняття неперервності і межі для дискретних образів не застосовні і говорити про кривину ДПК некоректно. Однак, незважаючи на все це, ми визначили у вузлах ДПК дотичну і нормаль до невідомої нам майбутньої кривої  $m$ , представленої даною ДПК. Аналогічно ми можемо ввести у вузлах ДПК і поняття кривини і її величини



для неперервної кривої  $m$ .

Розглянемо на рис.2.11 деяку ДПК 0...3. Побудуємо в одному з її вузлів дотичну  $t_1$  і нормаль  $n_1$ . Оскільки коло кривини (радіус нам невідомий) дотикається в т.1 дотичної  $t_1$ , то центр кривини розташовується на продовженні  $n_1$  убік увігнутості ДПК. Оскільки крива, що проходить через задані точки 0...3 невідома, то невідома і її кривина  $k_1$ , а, отже, і радіус  $\rho_1$  у даній т.1. Логічно припустити, що коло кривини проходить не тільки через т.1, але і

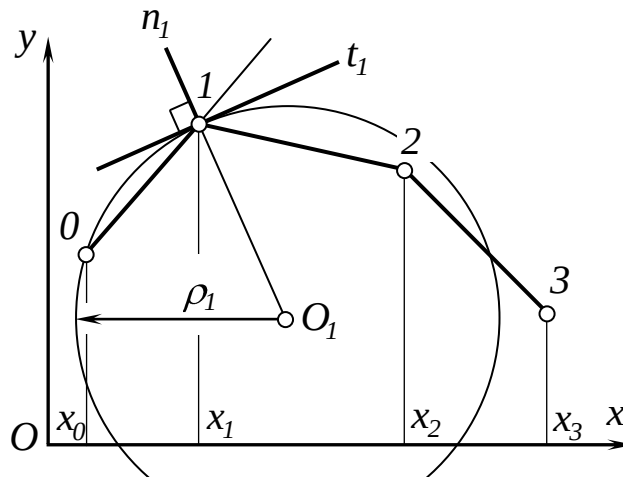


Рисунок 2.11 – Коло кривини, радіус и центр кривини у вузлі ДПК

через найближчу до дотичної точку ДПК (у даному випадку т. 0 ). Тоді й  $\rho_1$  і т.  $O_1$  виявляються визначеними. Ці величини, як і кривина  $k_1 = \frac{1}{\rho_1}$ , є до-

сить грубим, первинним наближенням до їх дійсних значень і можуть уточнюватися в процесі згущення точкового ряду (побудови точок майбутньої кривої між точками 0 і 1, наближаючись з кожним кроком до т.1). Такі первинні величини прийнято називати *дискретними аналогами* дійсних величин, що характеризують криву. Наприклад, дискретними аналогами першої похідної є значення перших поділених різниць (див. нерівності (2.14)). Запропонована схема рис.2.11 близька до передумов рис.2.10, але незручна тим, що треба вибирати дотичні, що не завжди обґрунтовано і доцільно. У практиці досить часто зустрічається інший аналог радіуса  $\rho_1$  кривини, що дорівнює радіусу кола, що проходить через задану т.1 і дві сусідні з нею т.0 і т.2 (рис. 2.12). Маючи центр  $O_1$ , легко визначається  $\rho_1$ ,  $k_1 = 1/\rho_1$ , дотична  $t_1$  і нормаль  $n_1 \perp t_1$ . При переході до наступної трійки точок 1,2,3 центр  $O_2$  буде іншим, а  $\rho_2$  буде відноситися до т.2 і т.д. У початковій точці 0 кривина  $k_0$  дорівнює  $k_0 = k_1 = 1/\rho_1$ , а в кінцевій  $k_n = k_{n-1} = 1/\rho_{n-1}$ .

Надалі ми переважно будемо користатися дискретним аналогом за схемою рис.2.12, як більш простим, алгоритмічним і реалізованим на ЕОМ.

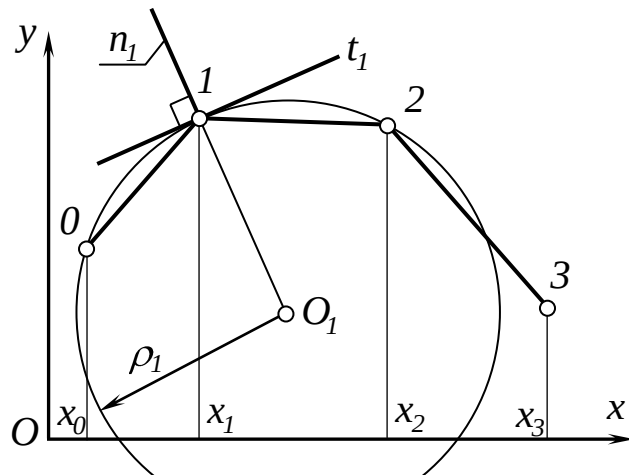


Рисунок 2.12 – Дискретний аналог радіуса кривини

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке дотична до кривої? Як її розуміти у випадку ДПК?
2. Що таке нормаль? Як вибирається додатній напрямок дотичної і нормалі?
3. Як розташовується вектор дотичної за умови запобігання осциляції?
4. Що таке кривина, радіус і центр кривини неперервної кривої?
5. Як розуміти кривину ДПК?
6. Які Ви знаєте дискретні аналоги кривини?

### 2.4. ДИСКРЕТНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ДПК

Задача чисельного диференціювання таблично представленої функції є однією з основних задач класичного чисельного аналізу. Необхідність її розв'язання виникає при математичній обробці траєкторних вимірів, при розрахунках динамічних параметрів систем і пристроїв, при обробці експериментальних даних і т.п. У прикладній дискретній геометрії визначення значень похідних у вузлах ДПК є необхідною умовою забезпечення регулярності розв'язку і підвищення його точності.

У теорії чисельних методів прийнятий єдиний метод чисельного диференціювання, коли через вузли заданої ДПК проводиться поліном (найчастіше алгебраїчний) відповідного степеня і визначаються шукані значення похідних у заданих вузлах шляхом диференціювання отриманого полінома. Цей метод володіє принаймні двома недоліками:

- досягнення високої точності пов'язано з високими степенями полінома, що приведе до осциляції й одержання незадовільного результату;
- внутрішня геометрія полінома може не відповідати внутрішній геометрії ДПК і замість поліпшення властивостей наближення описаний процес може привести до їх погіршення.

Повторне диференціювання, як вказується в літературі з чисельних методів, майже завжди веде до незадовільних результатів.

Раніше (п.2.3) ми вже згадували, що у вузлах ДПК можна провести дотичні до майбутньої кривої як завгодно, якщо немає додаткових умов і вимог. Формули чисельного диференціювання саме і ґрунтуються на тій умові, що через точки ДПК проводиться алгебраїчний поліном. Без цього задача є невимірюваною. Вище уже вказувалося, що підвищення точності пов'язано з запобіганням осциляції майбутньої кривої. Якщо в задачі диференціювання поставити умови відсутності осциляції кривої, то вектор дотичної у вузловій точці (рис.2.7) повинний розташовуватися усередині кута суміжності ланок СЛЛ у даному вузлі ДПК. Від положення вектора дотичної залежить повнота кривої в проміжку між вузлами, її симетрія й інші характеристики, звичайно не розглянуті в прикладній математиці і відіграючи важливу роль при практичному проектуванні. У такий спосіб задача чисельного диференціювання (розрахунок значення похідної) трансформується у *вибір* цього значення у визначених межах, що виключають появу осциляції. Процес визначення цих меж і вибору значення похідної в смузі допуску будемо називати *дискретним диференціюванням*.

Розглянемо деяку ДПК  $y_i$ ,  $i = \overline{0;n}$ , на рівномірній сітці з кроком  $h$  (рис.2.13). Умова відсутності осциляції на опуклій ділянці (див.п.2.3) вимагає виконання співвідношення

$$a_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} < y'_i < \frac{y_i - y_{i-1}}{h} = b_i, \quad i = \overline{1;n-1}. \quad (2.22)$$

Множина значень  $\langle a_i; b_i \rangle$  визначає смугу, названу нами *смугою дифпроекцій* (на рис 2.13 смуга утворена проведеними для наочності ланками ламаних ліній, що з'єднують відповідні граничні значення 1-ї похідної).

Властивості смуги:

1. Смуга дифпроекцій для ДПК визначена тільки у вузлах і являє собою дискретну функцію. Між вузлами граничні значення смуги невідомі.
2. Завдання дотичної в будь-якому вузлі ДПК однозначно визначає відповідну точку усередині смуги дифпроекцій (за умови відсутності осциляції).
3. Завдання точки усередині смуги однозначно визначає напрямок дотичної у відповідному за лінією зв'язку вузлі ДПК.
4. Граничні значення  $a_i$  і  $b_i$  смуги відповідають значенням 1-ї поділеної різниці ліворуч і праворуч від заданої вузлової точки.
5. Ширина смуги  $\Delta_i$  в заданій точці (поле допуску для вибору  $y'_i$ ) відповідає другій поділеній різниці точкового ряду ДПК з урахуванням напрямку опуклості ( догори чи донизу) і кроку сітки.

Дійсно,

$$\Delta_i = b_i - a_i = \frac{\pm 1}{h} \langle y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} \rangle. \quad (2.23)$$

Тут знак  $\langle \rangle$  відповідає увігнутій ДПК, а  $\langle \rangle$  – опуклій ДПК.

6. Смуга монотонно спадна для опуклої ДПК і монотонно зростаюча для увігнутої ДПК. На ділянці перегину межі міняються місцями: СЛЛ верхньої межі опуклої ділянки переходить у СЛЛ нижньої межі увігнутої ділянки і навпаки (див. рис.2.13), оскільки система обмежень (2.23) змінює свою орієнтацію, тобто знаки нерівностей треба змінити на протилежні. На рис.2.13 це ділянка між  $x = 50$  і  $x = 60$ .

Звернемо увагу на те, що в нульовій точці є тільки вихідна ланка СЛЛ. Тому верхньої межі смуги за визначенням (2.22) тут немає. Однак, щоб уникнути виникнення яких-небудь виключень можна припустити, що ширина смуги в нульовій і в першій точці однакова. Тоді

$$b_0 = a_0 + \Phi_1 - a_1 \quad (2.24)$$

Аналогічно й в останній точці немає верхньої межі. Тоді

$$b_n = a_n + \Phi_{n-1} - a_{n-1} \quad (2.25)$$

Виникає питання: як вибрати тепер значення похідної  $y'_i$  в  $i$ -й точці, якщо відомі  $a_i$  і  $b_i$ ?

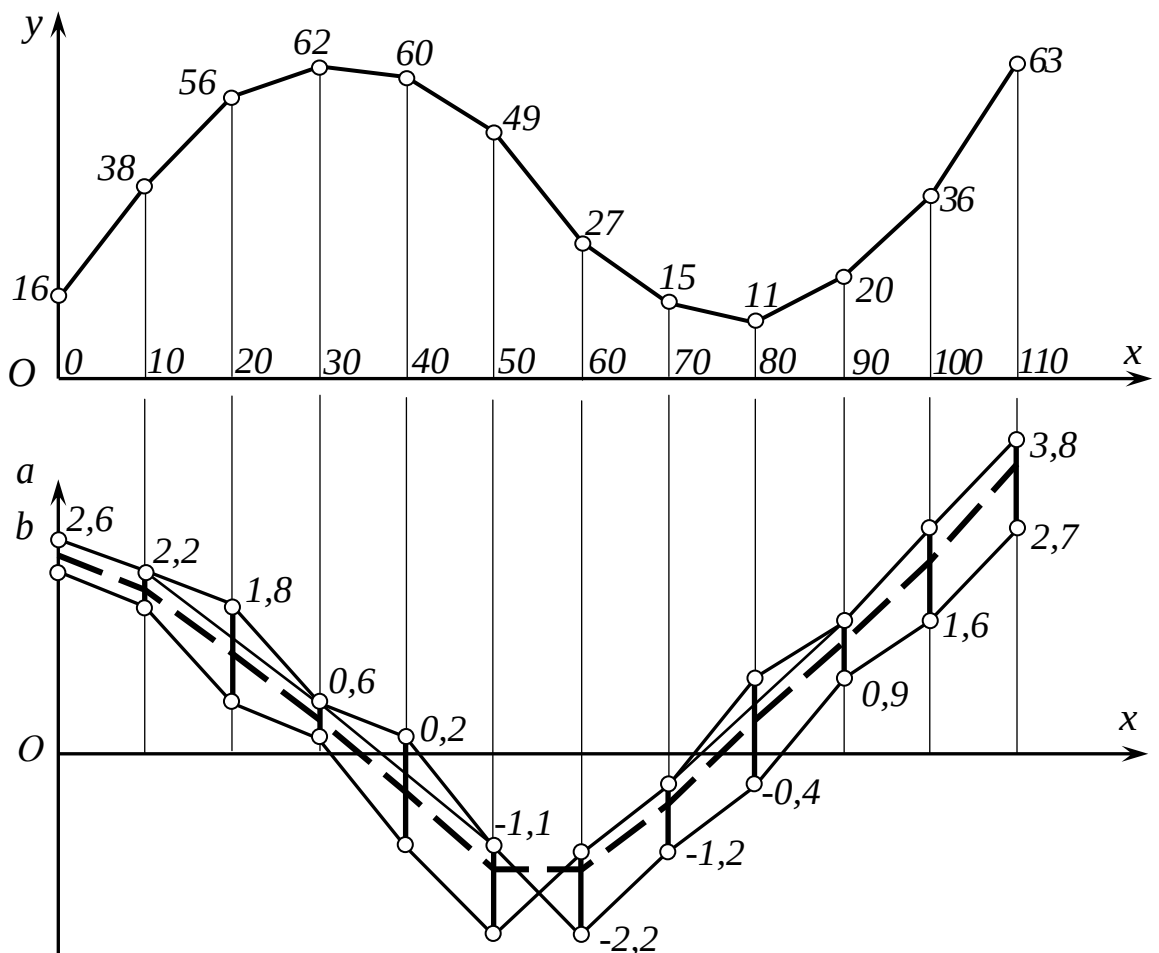


Рисунок 2.13 – Графіки ДПК і її смуги дифпроекцій

Найпростіше:

$$y'_i = \frac{a_i + b_i}{2} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}. \quad (2.26)$$

Таким чином, вибір значення  $y'_i$  посередині смуги відповідає геометрично тому, що дотична  $t_i$  паралельна хорді, що з'єднує сусідні з  $i$ -ю вузлові точки ДПК (рис.2.14). Ця формула часто застосовується в різних чисельних методах. Зауважимо, що, якщо в смугі рис.2.13 побудувати графік  $y'_i$  згідно з (2.26), то цей графік буде осцилювати. Як показав у своїй докторській дисертації проф. Верещага В.М. [14], високої точності можна домогтися тоді, коли і графік ДПК і графік її 1-ї похідної не осцилюють. Очевидно, що в смугі рис.2.13 можна побудувати нескінченну множину неосцилюючих графіків. Один з таких способів складається в корекції верхньої межі, щоб вона стала опуклою в той чи інший бік, і побудові графіка  $y'_i$  на деякому постійному віддаленні від відкоректованої границі. Найпростішою корекцією є "зрізання" ділянок протилежної опуклості (виступів).

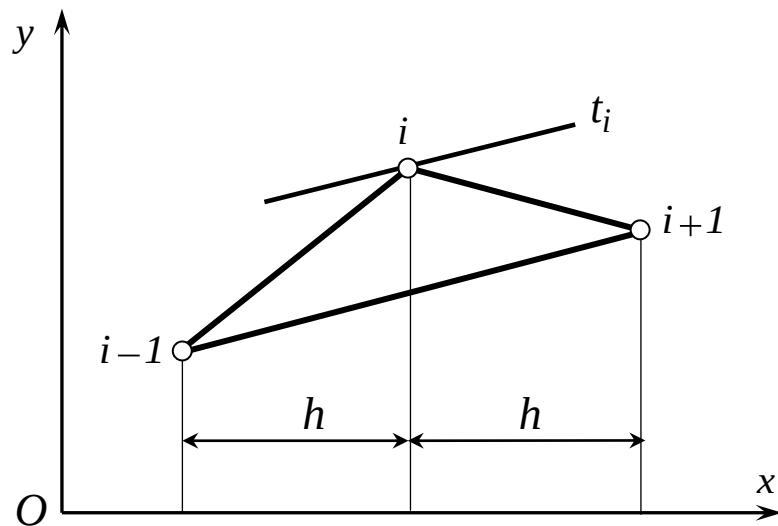


Рисунок 2.14 – Вибір дотичної згідно з (2.26)

На рис.2.13 саме так відкоректована верхня межа і на відстані  $0,2$  від значень їхніх вузлів проведений увігнутий (не осцилюючий) графік  $y'_i$ . Результати розрахунків представлені в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3 – Результати дискретного диференціювання ДПК (рис.2.13)

|      |            |     |     |     |       |      |      |      |      |     |     |            |
|------|------------|-----|-----|-----|-------|------|------|------|------|-----|-----|------------|
| $i$  | 0          | 1   | 2   | 3   | 4     | 5    | 6    | 7    | 8    | 9   | 10  | 11         |
| $x$  | 0          | 10  | 20  | 30  | 40    | 50   | 60   | 70   | 80   | 90  | 100 | 110        |
| $y$  | 16         | 38  | 56  | 62  | 60    | 49   | 27   | 15   | 11   | 20  | 36  | 63         |
| $b$  | <b>2,6</b> | 2,2 | 1,8 | 0,6 | 0,2   | -1,1 | -2,2 | -1,2 | -0,4 | 0,9 | 1,6 | 2,7        |
| $a$  | 2,2        | 1,8 | 0,6 | 0,2 | -1,1  | -2,2 | -1,2 | -0,4 | 0,9  | 1,6 | 2,7 | <b>3,8</b> |
| $y'$ | 2,4        | 2,0 | 1,2 | 0,4 | -0,45 | -1,3 | -1,4 | -0,6 | 0,4  | 1,4 | 2,5 | 3,6        |

Звичайно, для того щоб побудувати опуклий (увігнутий) графік  $y'$  зовсім не обов'язково візуалізувати смугу і проводити графічну корекцію меж. Для цього розроблені алгоритми і програми автоматизованого розрахунку  $y'_i$  для даної ДПК. У результаті дискретного диференціювання вдається максимально врахувати внутрішню геометрію ДПК і домогтися високої точності наступного моделювання з використанням розрахованих значень  $y'_i$ .

Запропонований метод має значні переваги, однак він незастосовний при дискретному диференціюванні неоднозначних ДПК. До речі, методи чисельного диференціювання теж не в змозі вирішити цю задачу. Навіть для однозначних кривих у точках з вертикальними дотичними метод непридатний, тому що похідні приймають нескінченні значення. Якщо вихідні умови дозволяють, можна систему координат повернути на деякий кут, щоб зберегти однозначність ДПК і уникнути вертикальності дотичних. Потім у новій системі координат визначити значення похідних і їх використовувати при подальших розрахунках чи перерахувати значення у вихідну систему координат. Усе-таки варто визнати, що такий варіант поєднаний з додатковими обчисленнями і втратою точності. Можна запропонувати ще один різновид цього методу: параметричне представлення значень різниць і похідних від номера точки  $i$ . У такий спосіб можна моделювати неоднозначні ДПК, однак проблема нескінченних значень похідних залишається.

Значно простіше задача розв'язується на основі кутових параметрів. Раніше (див. п.2.3) було зазначено, що, щоб уникнути осциляції, вектор  $t_i$  дотичної повинний розташовуватися в межах кута суміжності  $\gamma_i$  сусідніх ланок СЛЛ (див. рис.2.15). Верхня межа положення  $t_i$ , точніше кута нахилу  $\tau_i$  дотичної, є кут  $\alpha_{i-1}$  (для опуклої ДПК), нижня межа – кут  $\alpha_i$ . У такий спосіб виходить смуга обмежень для вибору кута  $\tau_i$ , подібна зі смугою дифпроекцій, але і така, що має свої особливості. Головна її перевага в тім, що замість тангенсів кутів у розрахунках беруть участь самі кути, що не прийма-

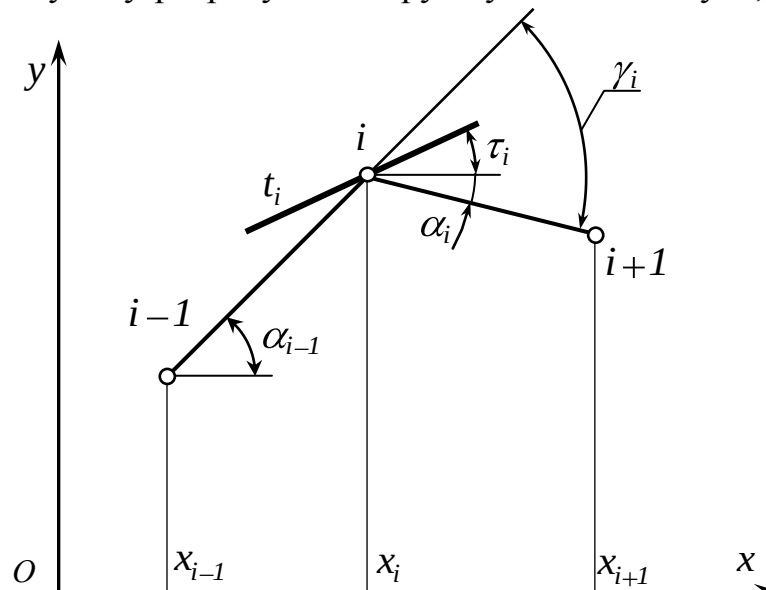


Рисунок 2.15 – Вибір дотичної вузлі ДПК

ють нескінченних значень. Крім того, вибір значення кута  $\tau_i$  між кутами  $\alpha_{i-1}$  і  $\alpha_i$  простіше й очевидніше, ніж операції з їхніми тангенсами.

Розглянемо обчислювальну сторону методу. Кут  $\alpha_i$  будемо визначати за формулою

$$\alpha_i = \arcsin \frac{y_{i+1} - y_i}{l_{i+1}}; \quad i = \overline{0; n-1}, \quad (2.27)$$

де  $l_{i+1}$  – довжина ланки  $i+1$ .

Розв'яжемо приклад.

На рис.2.16 представлена багатозначна замкнена ДПК. Визначимо значення похідної в її вузлах за умови відсутності осциляції графіка кутів першої похідної.

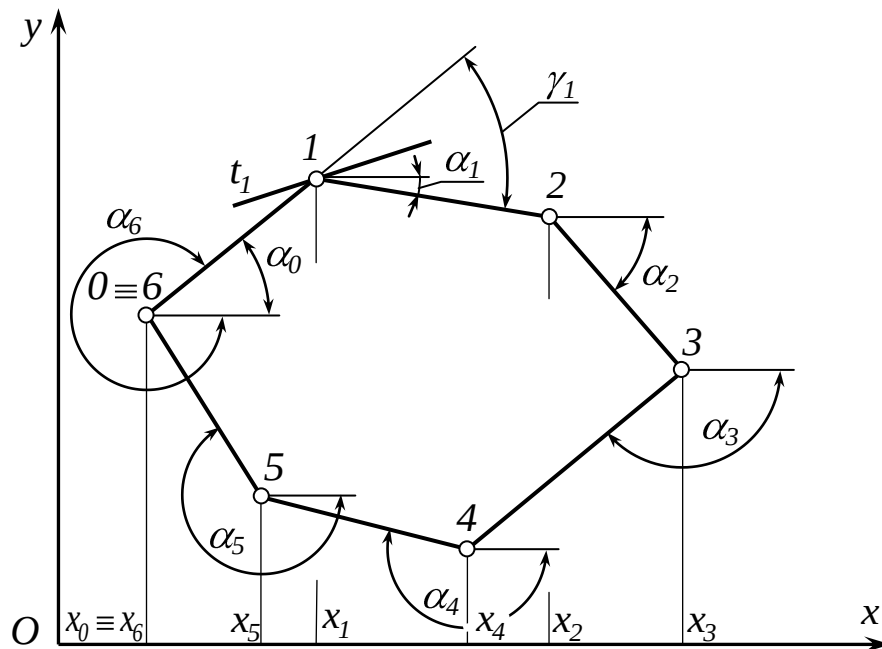


Рисунок 2.16 – Багатозначна замкнена ДПК

Обчислюємо  $\alpha_i$  згідно з (2.27) і будуємо їхній графік від номера точки  $i$ .

З'єднуючи отримані точки, маємо смугу припустимих значень кутів  $\tau_i$ ,  $i = \overline{0; 6}$  (рис.2.17).

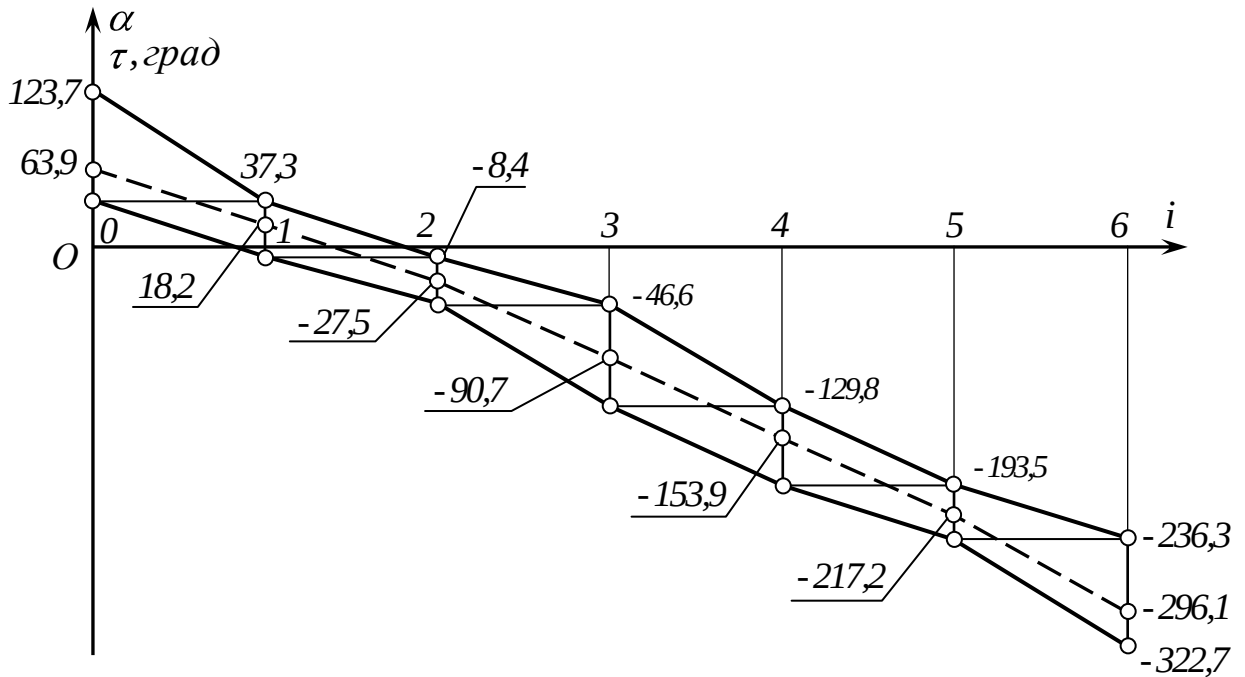


Рисунок 2.17 – Смуга обмежень кутів  $\tau_i$  і графік кутів першої похідної

Скориставшись правилом корекції нижньої межі (щоб вона була опуклою), будуємо опуклий графік  $\tau_i$  на відстані 19,1 від скоректованої нижньої границі в середній її частині. Початкова і кінцева частини графіка зв'язані тією умовою, що в т.  $0 \equiv 6$  дотичний вектор у т.  $0 \angle 63,9^\circ$  і дотичний вектор у т.  $6 \angle -296,1^\circ$  повинні збігатися. Помітимо, що смуга дозволяє побудувати й опуклий графік кутів, орієнтуючись на верхню межу, як один із практично можливих варіантів. Результати розрахунків представимо в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4 – Результати дискретного диференціювання ДПК (рис.2.16)

| $i$             | 0     | 1     | 2       | 3      | 4      | 5       | 6      |
|-----------------|-------|-------|---------|--------|--------|---------|--------|
| $x$             | 10    | 31    | 58      | 75     | 49     | 24      | 10     |
| $y$             | 38    | 54    | 50      | 32     | 11     | 17      | 38     |
| $\alpha_{град}$ | 37,3  | -8,4  | -46,6   | -128,9 | -193,5 | -236,3  | -322,7 |
| $\gamma_{град}$ | -86,4 | -45,7 | -38,2   | -82,3  | -64,6  | -42,8   | -86,4  |
| $\tau_{град}$   | 63,9  | 18,2  | -27,5   | -90,7  | -153,9 | -217,2  | -296,1 |
| $y'$            | 2,035 | 0,329 | -0,5206 | 85,94  | 0,4895 | -0,5164 | 2,035  |

Звернемо увагу на т. 3, поблизу якої кут нахилу дотичної проходить значення  $-90^\circ$ . Тут графік  $y'$  для опуклої частини ДПК прагне до значення  $-\infty$ , залишаючись монотонно спадним. Після т.3 ДПК є увігнутою і графік  $y'$  повинний бути монотонно зростаючим, якщо обхід ДПК здійснюється зліва-направо. У нас обхід здійснюється справа-наліво. Тому графік  $y'$  від номера точки, починаючи з т.3 – монотонно спадний до т.6, в околі якої графік проходить через  $-\infty$  до т.6, а після т.6 через  $+\infty$  приймає значення  $y'_6 = y'_0 = 2,035$ . Цей приклад свідчить про те, що, якщо множина кутів  $\tau_i$



не осцилює, то з цього ще не виходить, що і множина значень  $y'_i = tg \tau_i$  теж не осцилює. Прояснення цієї ситуації вимагає додаткових досліджень. Помітимо, що з точки зору обробки опуклого замкненого контуру доцільно задавати неосцилюючу множину кутів  $\tau_i$ .

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому суть дискретного диференціювання?
2. Що являє собою смуга дифпроекцій і які значення виступають як межі смуги?
3. Як здійснити вибір значення похідної усередині смуги дифпроекцій?
4. Які переваги і недоліки смуги дифпроекцій?
5. Як формується смуга припустимих значень кутових параметрів?
6. У чому переваги дискретного диференціювання на основі кутових параметрів?
7. Як вибираються кути похідної в смузі припустимих значень?

## 2.5. ДИСКРЕТНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ДПК

Необхідність розв'язання задачі інтегрування виникає в тому чи іншому вигляді в багатьох практичних додатках. Як правило, застосовувані при цьому функції, не дають можливості розв'язання зазначеної задачі в квадратурах. Для графічно або дискретно представлених кривих, якщо не удаватися до інтерполяційних методів їхнього опису, в залежності від необхідної точності застосовуються графічні або чисельні методи інтегрування. При цьому мається на увазі одна з двох цілей:

- обчислення визначеного інтеграла на заданому відрізку ;
- побудова первісної (інтегральної) кривої при заданих граничних умовах .

Оскільки, маючи графік первісної, за різницею ординат кінців відрізка можна легко обчислити значення визначеного інтеграла, то надалі будемо розглядати тільки побудову точок дискретного ряду первісної ДПК з наступним її згущенням.

Будемо припускати, що підінтегральна функція не піддається інтегруванню в квадратурах і задана:

- аналітично;
- графічно у вигляді неперервного графіка;
- дискретно у вигляді точкового ряду.

Як і при чисельному інтегруванні, у перших двох випадках функція (крива) піддається дискретизації, тобто будується точковий ряд, а потім застосовуються методи, орієнтовані на дискретне представлення, аналогічне третьому випадку. Однак перші два випадки істотно відрізняються від третього тим, що вони дозволяють у залежності від точності розв'язання задачі змінювати крок дискретизації в той час, коли в третьому випадку крок фіксований.

Дотепер, коли велике поширення одержали ЕОМ і обчислювальні комплекси, найбільш розповсюдженими були графічні методи інтегрування, основу яких складає побудова  $\infty^1$  дотичних до інтегральної кривої, починаючи з початкової точки  $(x_0, y_0)$ . Отримана при цьому ламана Ейлера є досить грубим наближенням і були початі спроби (Мемке, Мейсснер, Нікулін і ін.) удосконалити графічні методи. Варто визнати, що графічні методи можуть мати перспективи розвитку лише в тій мірі, у якій вони можуть бути основою для складання алгоритму чисельного розв'язання диференціального рівняння. Значними перевагами в порівнянні з відомими володіє метод дискретного інтегрування, що є природним продовженням досліджень, присвячених дискретному диференціюванню.

### 2.5.1. ОСОБЛИВОСТІ ДИСКРЕТНОГО ІНТЕГРУВАННЯ

Розглянемо розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку, поданого у вигляді дискретного точкового ряду на рівномірній сітці  $h$ , коли потрібно побудувати первісну ДПК (її точковий ряд) при заданому значенні  $y_0$ .

Головною особливістю дискретного інтегрування на відміну від чисельного інтегрування є вибір результату інтегрування в заданих межах, а не його однозначний розрахунок за визначеними формулами. При дискретному інтегруванні розраховується не результат, а межі його зміни (допуск), усередині яких задані вимоги дотримуються. Усередині допуску і вибирається розв'язок.

Нехай задана на рівномірній із кроком  $h$  сітці деяка не осцилююча ДПК  $y'_i$ ,  $i = \overline{0; n}$ , що задає сукупність значень похідних у вузлах деякої первісної. Потрібно побудувати її дискретний ряд  $y_i$  при заданому початковому значенні  $y_0$ .

За виглядом графіка  $y'_i$  можна легко визначити вигляд графіка первісної, а саме:

- монотонно спадній множині значень  $y'_i$  відповідає опукла ДПК  $y_i$ ;
- монотонно зростаючій множині значень  $y'_i$  відповідає увігнута ДПК  $y_i$ .

Для першого випадку (рис.2.18) очевидно

$$y'_{i+1} < \frac{y_{i+1} - y_i}{h} < y'_i, \quad i = \overline{0; n-1}. \quad (2.28)$$

Позначимо

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \Delta_{i+1}, \quad i = \overline{0; n-1}. \quad (2.29)$$

Тоді маємо систему нерівностей, що зв'язують тангенс кута нахилу хорди і сусідні ліворуч і праворуч значення похідної.

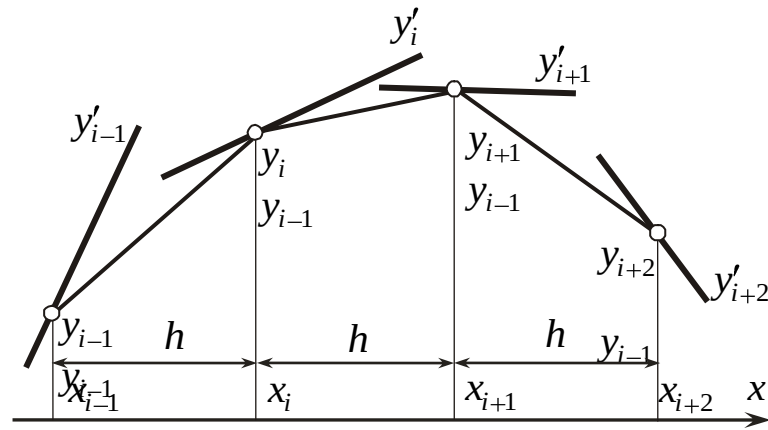


Рисунок 2.18 – До отримання співвідношення (2.28)

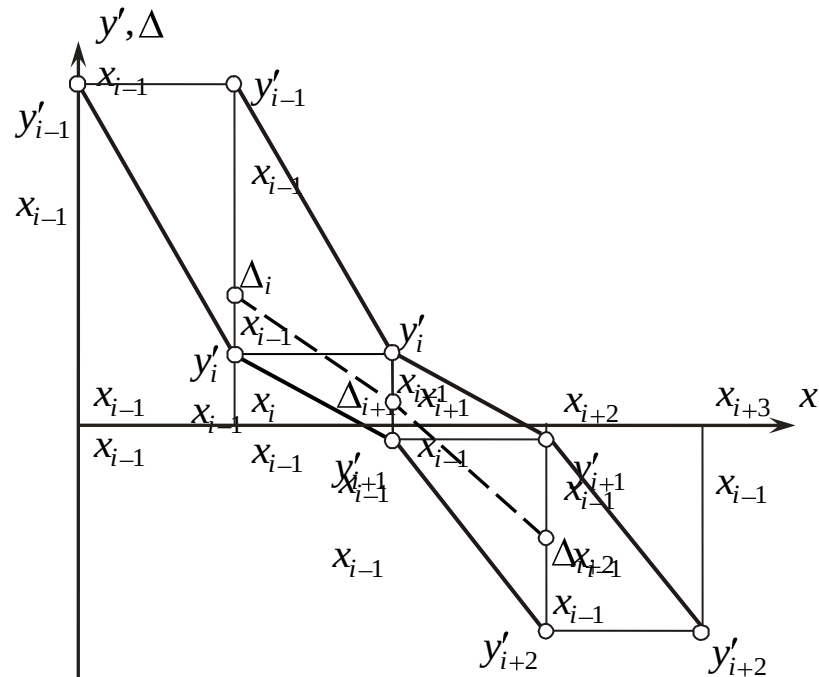
$$y'_{i+1} < \Delta_{i+1} < y'_i, \quad i = \overline{0; n-1} \quad (2.30)$$

Докладніше:

$$\begin{aligned} y'_1 &< \Delta_1 < y'_0, \\ y'_2 &< \Delta_2 < y'_1, \\ y'_3 &< \Delta_3 < y'_2, \\ &\dots\dots\dots \\ y'_n &< \Delta_n < y'_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Маючи графік  $y'_i$  (рис.2.19), неважко одержати смугу для вибору значень  $\Delta_i$  з (2.31), що визначають нахил ланок ламаної, уписаної в графік першої.

Розглянемо вимоги, пропоновані до вибору значень  $\Delta_i$  у смузі  $y'_i, y'_{i+1}$ :

Рисунок 2.19 – Сму́га для вибору значень  $\Delta_i$  з (2.31)

Помітимо з (2.30), що

$$y_{i+1} = y_i + \Delta_{i+1} \cdot h. \quad (2.32)$$

Умова опуклості графіка  $y_i$  первісної має вигляд

$$y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2} < 0,$$

що з урахуванням (2.29) приводить до умови монотонності убуття  $\Delta_i$ , тобто

$$\Delta_i > \Delta_{i+1}, \quad i = \overline{0; n-1}. \quad (2.33)$$

Ця умова в процесі вибору  $\Delta_i$  усередині смуги здійснюється автоматично.

З метою стійкості обчислювального процесу поставимо умову увігнутості графіка  $\Delta_i$ .

$$\Delta_{i-1} - 2\Delta_i + \Delta_{i+1} > 0, \quad (2.34)$$

якщо смуга  $[y'_i, y'_{i+1}]$  дозволяє побудувати увігнуті межі. У протилежному випадку знак нерівності (2.34) треба замінити на протилежний. З (2.34) випливає

$$\frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} > \Delta_{i+1}, \quad i = \overline{0; n-1}, \quad (2.35)$$

тобто значення  $\Delta_{i+1}$  повинні вибиратися нижче середини відрізка  $[y'_i, y'_{i+1}]$  смуги (рис.2.19).

Отже, для опуклого вниз спадного графіка  $y_i$  й опуклої догори первісної  $y'_i$  множина  $\Delta_i$  повинна задовольняти:

- умові смуги (2.30) чи (2.31);
- умові (2.35).

Після того, як сформована множина значень  $\Delta_i$ , що задовольняє (2.31) і (2.35), значення ординат точок первісної ДПК розраховуються згідно з (2.32).

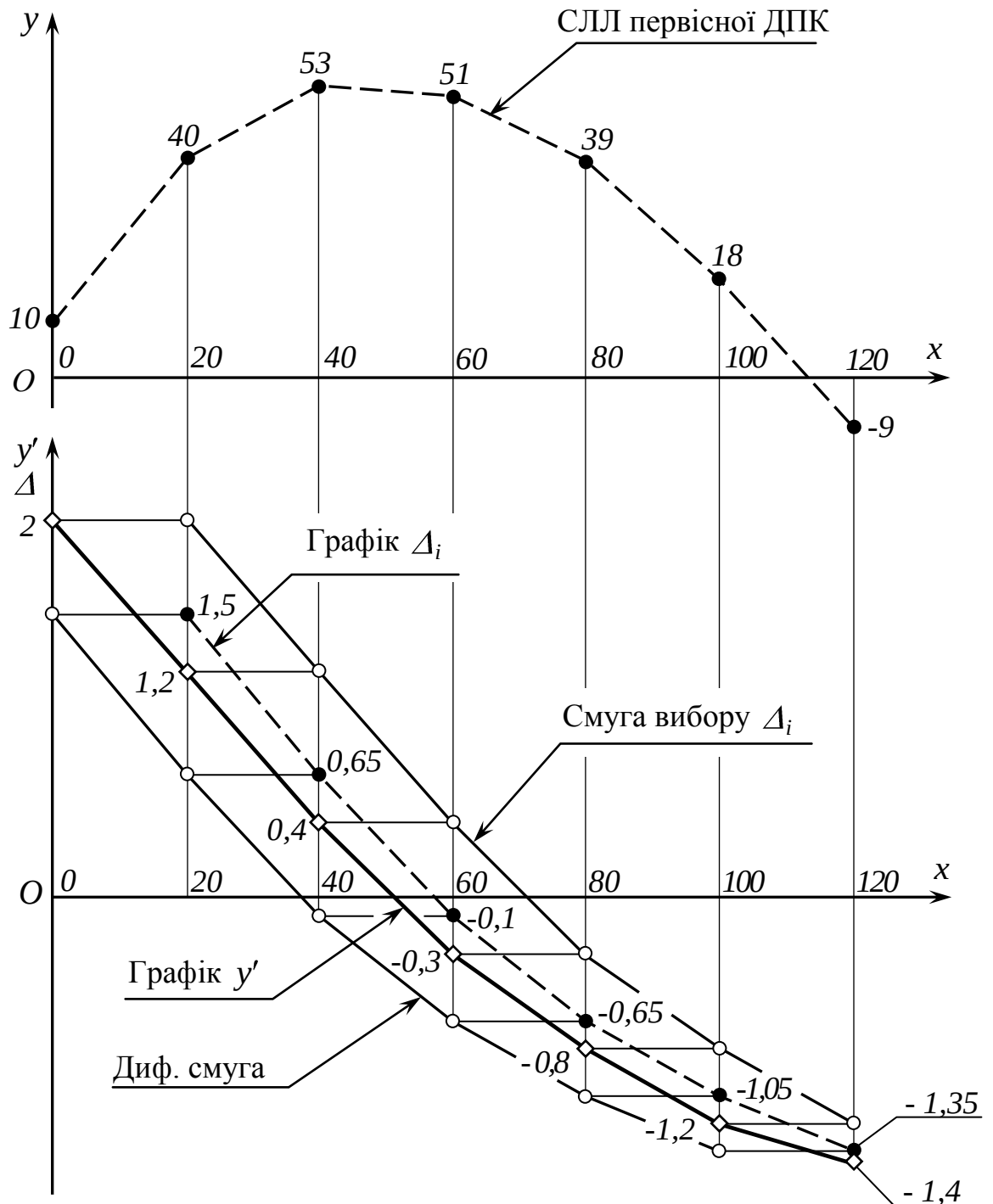
Для заданого в таблиці 2.5 точкового ряду  $y'_i$  зазначеним способом розраховані ординати точок первісної ДПК при  $y_0 = 10$ . На рис.2.20 зображені графік  $y'_i$ , смуга вибору  $\Delta_i$  і її графік, а також графік дискретного ряду  $y_i$  первісної ДПК.

Зауважимо, що графік  $\Delta_i$  є верхньою межею смуги  $[a'_i, b'_i]$  для вибору значень  $y'_i$  у вузлах побудованої первісної.

Таблиця 2.5 – Результати дискретного інтегрування ДПК (рис. 2.20)

|          |    |     |      |      |      |       |       |
|----------|----|-----|------|------|------|-------|-------|
| $i$      | 0  | 1   | 2    | 3    | 4    | 5     | 6     |
| $x$      | 0  | 20  | 40   | 60   | 80   | 100   | 120   |
| $y'$     | 2  | 1,2 | 0,4  | -0,3 | -0,8 | -1,2  | -1,4  |
| $\Delta$ | -  | 1,5 | 0,65 | -0,1 | -0,6 | -1,05 | -1,35 |
| $y$      | 10 | 40  | 53   | 51   | 39   | 18    | -9    |

Для опуклої вниз первісної ДПК умова (2.28) має протилежні знаки нерівностей. Якщо і графік  $y'_i$  опуклий, то знаки нерівностей (2.35) теж треба замінити на протилежні.

Рисунок 2.20 – Графіки  $y'_i$ ,  $\Delta_i$  та  $y_i$  первісної ДПК (таблиця 2.5)

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому суть дискретного інтегрування?
2. Яке місце займають різниці в алгоритмі дискретного інтегрування?
3. Як будується смуга припустимих значень різниць?
4. Як вибираються значення різниць у смузі їхніх припустимих значень?
5. Як розраховуються ординати точок первісної для даної ДПК за допомогою смуги?

### 2.6. ЕКВІДИСТАНТНІ ДПК

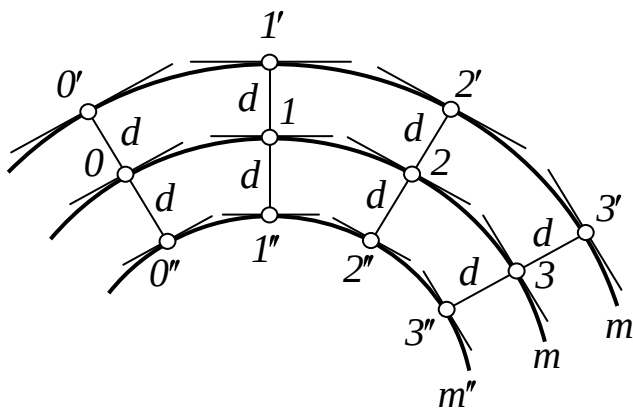


Рисунок 2.21 – Еквідистантні криві

Розглянемо деяку криву  $m$ , що складається з неособливих точок, тобто в кожній точці кривої існує єдиний дотичний (і нормальний) вектор. Візьмемо на кривій  $m$  ряд точок  $0...3$  і побудуємо в цих точках дотичні і нормалі. На нормалях відкладемо відрізки однакової довжини  $d$  усередину і назовні по відношенню до  $m$ . Через отримані точки проведемо криві: зовнішню  $m'$  і внутрішню  $m''$ . Ці криві назива-

ються *еквідистантними* (паралельними) кривими стосовно заданої кривої  $m$ .

У курсі диференціальної геометрії доводиться, що нормаль до заданої кривої  $m$  є одночасно нормаллю до еквідистантних кривих  $m'$  і  $m''$ . Отже, дотичні у відповідних точках еквідистантних кривих паралельні (рис. 2.31). Очевидно, стосовно заданої кривої  $m$  можна провести незліченну безліч еквідистантних кривих шляхом зміни величини  $d$ . Помітимо, що у відповідних точках еквідистантних кривих кривина різна: у зовнішніх кривих  $m'$  кривина менше (радіус кривини більше), у внутрішніх – навпаки: кривина більше (радіус менше).

У реальному моделюванні еквідистантні криві відіграють велику роль, особливо при проектуванні техпроцесу обробки обводів і поверхонь на верстатах з числовим програмним керуванням (ЧПК). Щоб одержати профіль обводу після обробки фрезеруванням чи шліфуванням у вигляді кривої  $m$ , необхідно, щоб вісь фрези чи шліфувального каменю була віддалена від  $m$  на величину радіуса обробного інструмента, тобто її траєкторією повинна бути еквідистанта. Від точності розрахунків точок еквідистанти залежить точність обробки профілю.

Розглянемо розв'язання задачі побудови точки еквідистанти у випадку дискретного представлення кривої  $m$  точковим рядом  $0...3$  (рис. 2.14). Проведемо СЛЛ цього ряду і побудуємо дотичні в його вузлах у відповідності з викладеним у п. 2.4. Перпендикулярно до отриманих дотичних у кожному вузлі ДПК проводимо нормалі, на яких, як і раніш, відкладаємо однакові відрі-

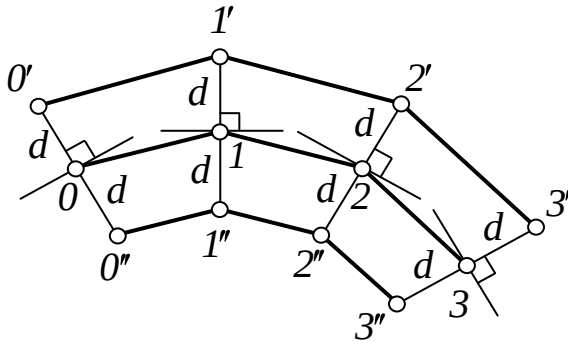


Рисунок 2.22 – Еквідистантні ДПК

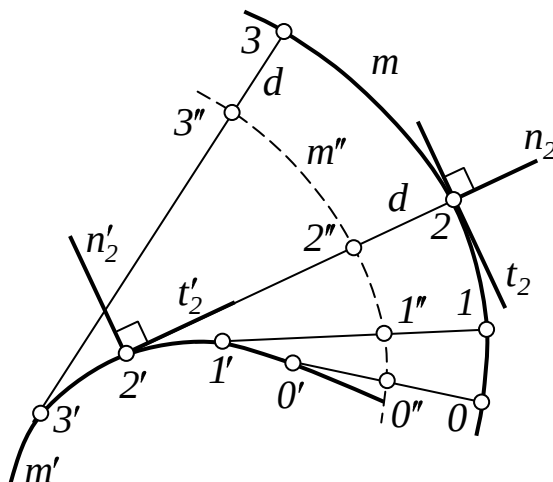
чності, треба, щоб точки вихідної ДПК були розташовані досить щільно. Як правило, для ущільнення точок ДПК застосовують спеціальні алгоритми згущення, причому, перш ніж будувати еквідистантні ДПК, треба ущільнити точковий ряд вихідної ДПК з урахуванням вимог заданої точності. Після цього виконуються описані побудови.

Помітимо одну дуже важливу особливість. Зовнішня ДПК до деякої міри повторює форму вихідної в трохи розтягнутому вигляді. Внутрішня ДПК має форму, що може різко відрізнитися від заданої, має ділянки різної опуклості й особливі точки. Відомо, що внутрішня еквідистантна крива стосовно еліпса (крива 2-го порядку) є кривою 8-го порядку (див.[5] стор.34). Це враховується при проектуванні реальних еквідистантних ДПК.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка ДПК називається еквідистантною?
2. Як побудувати ДПК, еквідистантну до даної зовні, зсередини?

## 2.7. ДИСКРЕТНІ ЕВОЛЮТИ І ЕВОЛЬВЕНТИ

Рисунок 2.23 – Еволюта  $m'$  і евольвента  $m$ 

ки  $d$  в обидва боки від вузла ДПК. З'єднуючи побудовані точки, одержимо зовнішню і внутрішню еквідистантні СЛЛ ДПК по відношенню до заданої ДПК. Помітимо, що довжини ланок СЛЛ внутрішньої ДПК значно менше аналогічних довжин вихідної і тим більше зовнішньої ДПК.

Щоб домогтися при побудові еквідистантних ДПК достатньої то-

Розглянемо деяку криву  $m$ , усі точки якої неособливі (рис.2.23). Виберемо на ній точковий ряд  $0...3$  і для цих точок побудуємо центри кривини  $0'...3'$ . Геометричне місце всіх центрів кривини для точок кривої  $m$  називається її *еволютою*, а сама крива  $m$  стосовно своєї еволюти — *евольвентою*.

У курсі диференціальної геометрії доводиться, що нормалі до евольвенти є дотичними до еволюти, тобто еволюта є обвідною множини нормалей евольвенти. Звідси випливає, що нормаль  $n'_2$  до еволюти в довільній т.  $2'$  паралельна до-

тичній  $t_2$  до евольвенти у відповідній точці 2. Довжина дуги еволюти між двома її точками (наприклад,  $0'$  і  $1'$ ) дорівнює різниці радіусів кривини у відповідних точках евольвенти, тобто  $(11' - 00')$ . Для заданої еволюти  $m'$  можна побудувати нескінченну безліч евольвент, що будуть еквідистантними кривими, тому що відрізок нормалі між відповідними точками сталий (штрихова крива  $m''$  і задана  $m$  на рис.2.23).

Скористаємося цією інформацією для побудови еволюти для заданої ДПК 0,1...6 (рис.2.24). Для побудови центрів кривини скористаємося дискретним аналогом кривини згідно з рис.2.12. Для першої трійки точок 0-1-2 знайдемо центр кола  $1'$  за допомогою серединних перпендикулярів до ланок 0-1 і 1-2. Точка  $1'$  - це центр кривини евольвенти в т.1. Радіус кривини дорівнює  $11'$ . Аналогічно для наступної трійки 1-2-3 знаходимо центр  $2'$  і радіус кривини  $22'$  в т.2 і т.д. Одержуємо точковий ряд  $1', 2', \dots, 5'$  еволюти. Відрізки  $11', 22', \dots, 55'$  - це одночасно нормалі до евольвенти і дотичні до еволюти. Серединні перпендикуляри до ланок евольвенти інцидентні відповідним ланкам еволюти.

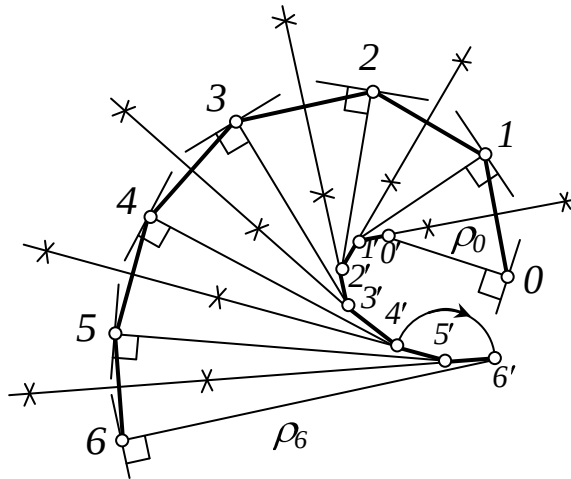


Рисунок 2.24 – Дискретно представлені евольвенти і еволюта

цидентний ланці  $4'5'$  еволюти. При такій методиці побудови на еволюті немає точок, відповідних початковій і кінцевій точкам евольвенти, тому що радіуси кривини в цих точках не визначені. Логічно припустити, орієнтуючись на СЛЛ еволюти, що довжина її ланки  $0'1'$  не дуже відрізняється від довжини ланки  $1'2'$ . Тому на серединному перпендикулярі ланки 0-1 від т.1' можна відкласти відрізок  $0'1'$  що дорівнює  $1'2'$ , і одержати в такий спосіб т.0' і радіус кривини  $00'$  в т.0. Аналогічно будуюмо т.6' і знаходимо радіус кривини  $66'$  в т.6. Маючи нормалі  $00', 11', \dots, 66'$ , можна побудувати дотичні у вузлах евольвенти.

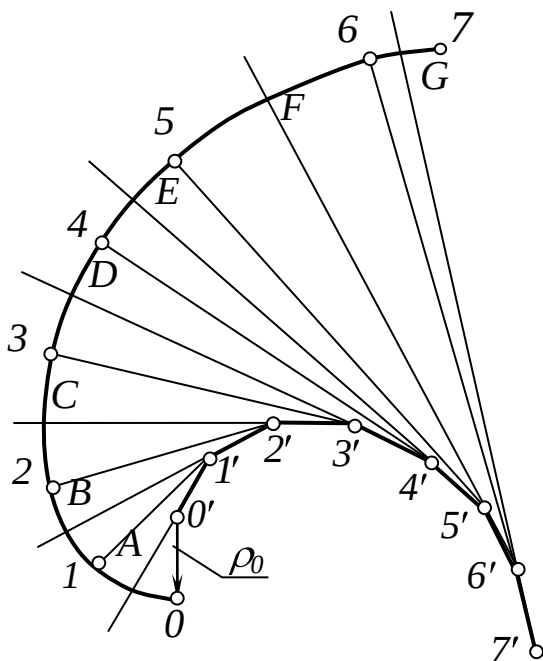


Рисунок 2.25 – Побудова евольвенти за заданою ДПК еволюти

Наприклад, серединний перпендикуляр до ланки 4-5 евольвенти інцидентний ланці  $4'5'$  еволюти. При такій методиці побудови на еволюті немає точок, відповідних початковій і кінцевій точкам евольвенти, тому що радіуси кривини в цих точках не визначені. Логічно припустити, орієнтуючись на СЛЛ еволюти, що довжина її ланки  $0'1'$  не дуже відрізняється від довжини ланки  $1'2'$ . Тому на серединному перпендикулярі ланки 0-1 від т.1' можна відкласти відрізок  $0'1'$  що дорівнює  $1'2'$ , і одержати в такий спосіб т.0' і радіус кривини  $00'$  в т.0. Аналогічно будуюмо т.6' і знаходимо радіус кривини  $66'$  в т.6. Маючи нормалі  $00', 11', \dots, 66'$ , можна побудувати дотичні у вузлах евольвенти.

Поставимо зворотну задачу. За заданою ДПК-еволютою  $0'1' \dots 7'$  (рис.2.25) побудувати



евольвенту з початковим радіусом кривини  $\rho_0$ .

Відповідно до вище викладеного продовження ланок СЛЛ еволюти – це серединні перпендикуляри ланок СЛЛ евольвенти.

Скористаємося відомим положенням, відповідно до якого евольвентою ламаної лінії є коробова (складена) лінія з дуг кіл, стик яких відбувається в точках їхнього перетину із серединними перпендикулярами. Із т.  $O'$  проводимо дугу кола радіуса  $\rho_0$  до перетину з продовженням ланки  $O'1'$  в т.А. У цій точці відбувається стрибок кривини і від т.А до т. В проходить дуга кола радіуса  $A1'$ . У т. В знову стрибок кривини і від т.В до т.С проходить дуга радіуса  $B2'$  і т.д. до т.  $G$ . Після т.  $G$  проводиться дуга радіуса  $G7'$ . Ця неперервна крива з дуг кіл із загальними дотичними на стиках і є шукана евольвента заданої ламаної лінії  $O'1'...7'$ .

Виділити на цій евольвенті точки, відповідні точкам еволюти – не просто, оскільки задача ця неоднозначна. Це рівносильно побудові дотичних у вузлах ДПК еволюти (задача теж неоднозначна), що будуть одночасно нормлями до еволюти так ще і розташовуватися симетрично щодо серединних перпендикулярів (продовження ланок СЛЛ еволюти). Можна запропонувати такий алгоритм їхньої побудови. Вибираємо дугу мінімальної довжини у евольвенті. Це дуга АВ. Приблизно посередині вибираємо т.1, відповідну т.1'. Тепер інші точки на евольвенті будуються однозначно. Скориставшись рівністю дуг  $1\tilde{A} = A\tilde{O}$ , знаходимо т.0. На підставі  $1\tilde{B} = B\tilde{2}$  знаходимо т.2 і т.д. до т.6. У результаті таких побудов отримані точки будуть симетричні щодо серединних перпендикулярів, а відрізки, що з'єднують їх з відповідними вузлами еволюти будуть нормлями евольвенти. Якщо при побудові намічається значний перекис точок (наприклад, т. 6 дуже близько розташована до т.  $G$ ), то це можна відкоригувати зміною положення початкової точки 1.

Найпростіший спосіб побудови евольвенти за заданою еволютою полягає в наступному. На еволюту  $O'...7'$  накладається нерозтяжна нитка з урахуванням початкового радіуса  $c_0$ . Натягнута нитка з початковою точкою 0, обертаючись за годинниковою стрілкою (на рис.2.25) змотується з еволюти. При цьому т.0 опише евольвенту.

Евольвентний профіль відіграє велике значення в машинобудуванні. Наприклад, профіль зуба так званого евольвентного зубчатого зачеплення виконаний за евольвентою кола.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке еволюта кривої, евольвента?
2. Як розташовані одна відносно одної дотична до еволюти і дотична до евольвенти у відповідних точках?
3. Що таке коробова крива з дуг кіл? Як вона пов'язана з ДПК – еволютою?

## 2.8. НАТУРАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДПК

З курсу диференціальної геометрії відоме так зване *внутрішнє* або *натуральне* рівняння кривої, що відбиває залежність радіуса кривини  $\rho$  (чи кривини  $k$ ) від довжини дуги  $s$  кривої:

$$\rho = \rho(s). \quad (2.36)$$

Доводиться, що рівняння (2.36) цілком визначає криву на площині з точністю до руху. Це значить, що дві криві, що мають те саме рівняння (2.36) відрізняються одна від одної тільки розташуванням на площині, тобто не залежать ні від якої системи координат. От чому координати  $\rho$  і  $s$  називаються *внутрішніми*. Вивченням властивостей кривих за їхнім натуральним рівнянням займається *натуральна* або *внутрішня* геометрія.

Важливо ще наступне. Якщо мається натуральне рівняння деякої кривої, то ніяка інша крива, геометрично відмінна від цієї, не може задовольняти даному рівнянню, тобто даному рівнянню відповідає геометрично єдина крива. Приведемо таблицю найпростіших і найбільш відомих кривих.

Таблиця 2.6 – Натуральні рівняння деяких кривих

| № п/п | Найменування кривої  | Натуральне рівняння    | Координатне (параметричне) рівняння                                                                                    |
|-------|----------------------|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.    | Пряма                | $\frac{1}{\rho} = 0$   | $y = a_0 + a_1 x$                                                                                                      |
| 2.    | Коло                 | $\rho = a$             | $x = a \cdot \cos \alpha, \quad y = a \cdot \sin \alpha.$                                                              |
| 3.    | Логарифмічна спіраль | $\rho = as + b$        | $x^2 + y^2 = \frac{\rho_0^2}{a^2 + 1} \cdot e^{2ad};$ чи<br>$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{a^2 + 1}} \cdot e^{a\varphi};$ |
| 4.    | Циклоїда             | $\rho^2 + s^2 = 16a^2$ | $x = a(2\alpha + \sin 2\alpha);$<br>$y = -a(1 + \cos 2\alpha);$                                                        |
| 5.    | Евольвента кола      | $\rho^2 = 2as$         | $x = a(\cos \alpha + \alpha \cdot \sin \alpha);$<br>$y = a(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha);$                         |

Продовження таблиці 2.6

| №<br>п/п | Найменування кривої                                             | Натуральне<br>рівняння                     | Координатне (параметричне)<br>рівняння                                                                                                                                                                                                                                                  |
|----------|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 6.       | Епіциклоїда                                                     | $\frac{s^2}{a^2} + \frac{\rho^2}{b^2} = 1$ | $x = \frac{ab}{2(a-b)} \cos\left(\frac{a-b}{a} \cdot \alpha\right) -$ $- \frac{ab}{2(a+b)} \cos\left(\frac{a+b}{a} \cdot \alpha\right);$ $y = \frac{ab}{2(a-b)} \cdot \sin\left(\frac{a-b}{a} \cdot \alpha\right) -$ $- \frac{ab}{2(a+b)} \sin\left(\frac{a+b}{a} \cdot \alpha\right);$ |
| 7.       | Клотоїда<br>(спіраль Ейлера)<br>(1744), спіраль Корню<br>(1874) | $\rho = \frac{a}{s}$                       | $x = \int_0^s \cos \frac{s^2}{2a} ds;$ $y = \int_0^s \sin \frac{s^2}{2a} ds.$                                                                                                                                                                                                           |

Розглянемо особливості використання натурального представлення для дискретних геометричних образів, зокрема, ДПК. Побудуємо дискретний графік натуральних координат ДПК, представленої на рис. 2.24.

Уздовж осі абсцис відкладаємо сумарно довжини ланок ламаної лінії, а уздовж осі ординат – значення радіусів кривини. Отримані точки з'єднуємо для наочності ламаною лінією, хоча очевидно, що між заданими на рис. 2.24 і побудованими точками на рис. 2.26 ніякої інформації про форму кривої і додаткових точок немає. Можна припустити, що крива на рис. 2.24 опукла, що зовсім не гарантує опуклості кривої на рис. 2.26. І все-таки наявну геометричну інформацію у вигляді координат точок, кутів нахилу ланок СЛЛ до осі абсцис, кутів суміжності можна використовувати для синхронного згущення і евольвенти на рис. 2.26 і її графіка натуральних координат на рис. 2.26.

Відзначимо ще наступне. На відміну від неперервних кривих, де натуральне рівняння визначає геометрично єдину криву, у випадку ДПК точковий ряд  $\rho_i \in \rho(s_i)$  на рис. 2.26 далеко не визначає геометрично єдину ДПК на рис. 2.24, оскільки інформації між вузлами немає і згущення ДПК  $\rho_i = \rho(s_i)$  можна виконати безліччю способів і одержати нескінченно багато згущених ДПК на рис. 2.26, а, отже, і так само багато згущених на рис. 2.24, хоча після кожного згущення відповідність між ними повинна бути дотримана. Процес згущення теоретично нескінченний і з кожним його кроком буде уточнюватися і одна і інша ДПК. Але саме в дотриманні відповідності цих двох ДПК і складається виконання принципу єдиності (неперервний випадок) у дискретному варіанті. Можна сказати, що *наявній ДПК натуральних координат відповідає геометрично єдина (тобто за формою) ДПК у вихідній системі координат з точністю до розташування у площині Оху.*

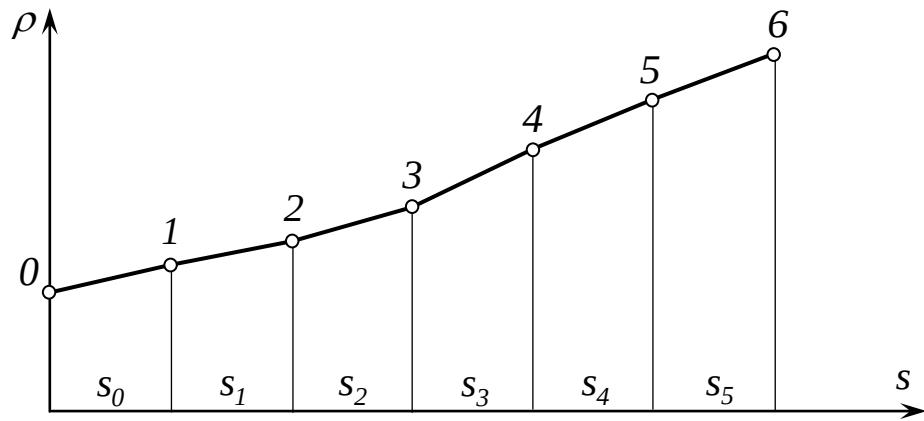


Рисунок 2.26 – Дискретний графік натуральних координат ДПК

Розглянемо побудову ДПК у вихідній системі координат за даним дискретним графіком (рис.2.26) натуральних координат  $\rho_i, s_i, i = \overline{0;6}$ .

Алгоритм.

1. Вибираємо довільну точку 0 на площині (початок ДПК), оскільки натуральні координати  $(\rho_i, s_i)$  визначають ДПК із точністю до місця розташування в площині.
2. Проводимо в довільному напрямку ланку 0-1 і відкладаємо на ній довжину  $s_0$  з графіка. Одержимо т.1.
3. Проводимо медіатрису відрізка 0-1 і на ній знаходимо центр кривини  $O_0$  на відстані  $\rho_0$  (з графіка) від т.0.

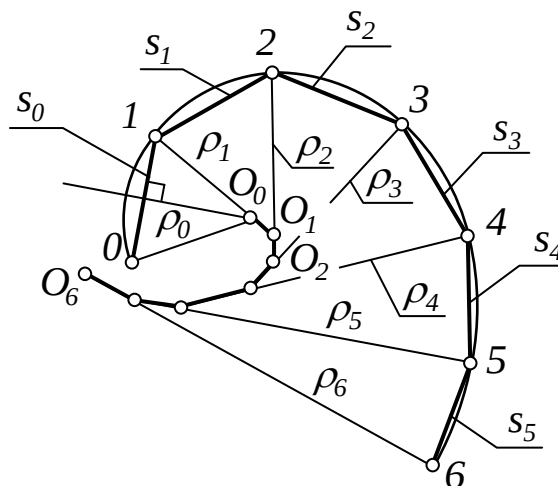


Рисунок 2.27 – Вихідні ДПК, побудовані за дискретним графіком натуральних координат  $\rho_i, s_i$

4. На промені  $O_0 1$  повинний знаходитись центр  $O_1$  на відстані  $\rho_1$  від т.1. Знаходимо його.
5. З центра  $O_1$  проводимо дугу радіуса  $\rho_1$ .
6. Від т.1 на цій дузі знаходимо т.2 на відстані  $s_1$  від т.1.
7. З'єднуємо отриману т.2 з центром  $O_1$  і на цьому промені знаходимо т.  $O_2$

на відстані  $\rho_2$  від т.2.

8. Проводимо дугу  $\rho_2$  з центра  $O_2$  і на ній знаходимо т.3 і т.д.

У такий спосіб одержимо ДПК, з точністю до помилок побудов таку, що відповідає графіку 2.27. Це підтверджує висновок про те, що даній ДПК натуральних координат відповідає єдина за формою ДПК у системі  $Oxy$ .

У нарисній геометрії (Бубенніков А.В. [27]) запропоноване інше представлення кривої в природних (натуральних) координатах, у якості яких приймаються  $\alpha_i$  – кут повороту (від початкового, нульового положення) дотичної в т.  $i$  при її переміщенні уздовж кривої і довжина дуги  $s_i$  (теж від нульової точки), див. рис. 2.28. Від класичного представлення, розглянутого вище, це представлення відрізняється тим, що уздовж осі ординат відкладається не кривина (чи її радіус) кривої в т.  $i$ , а кут  $\alpha_i$  у радіанах. Таке представлення володіє визначеними конструктивними перевагами, головною серед яких є та, що прямолінійній ланці (наприклад, 0-1) на графіку  $\alpha(s)$  відповідає

дуга

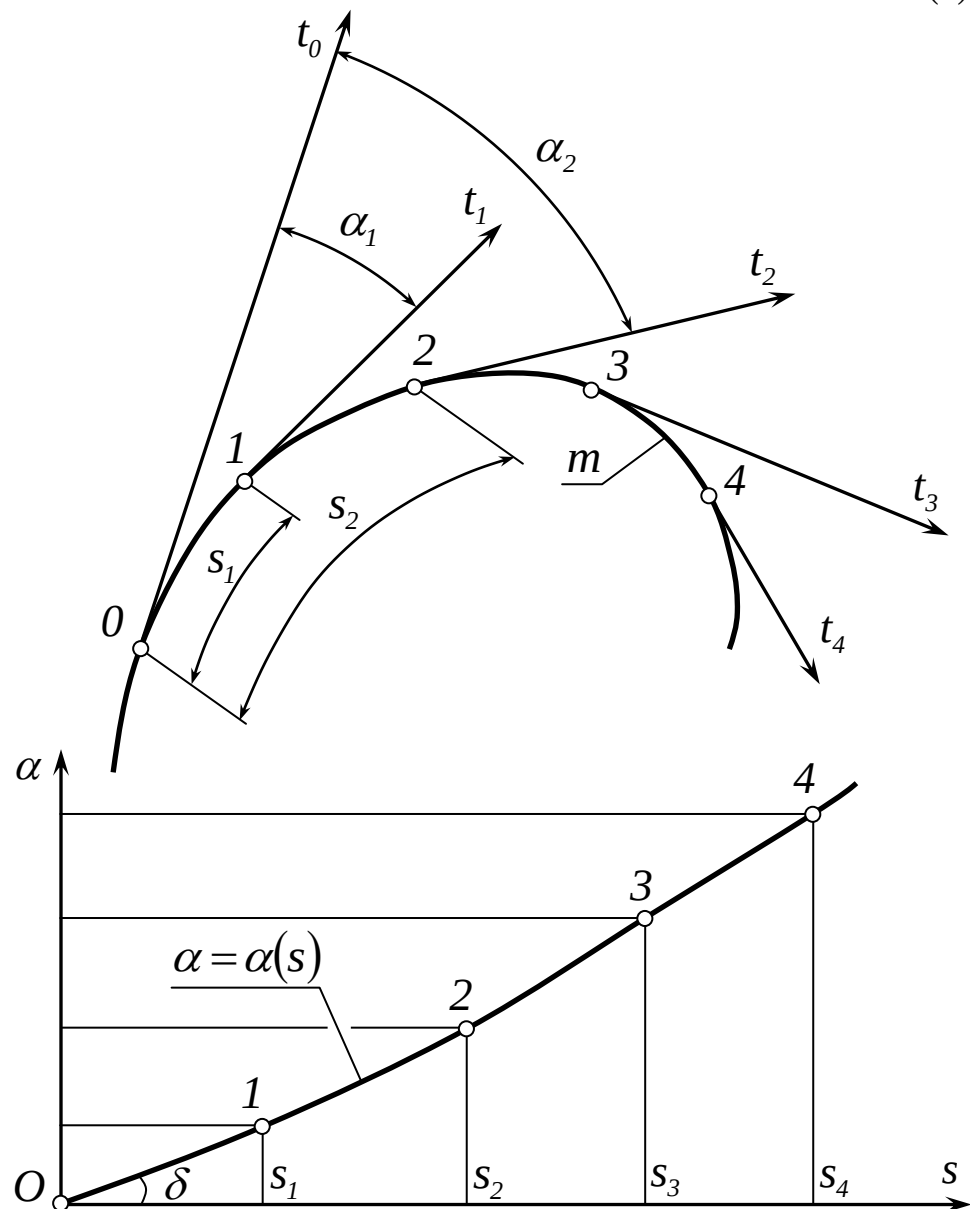


Рисунок 2.28 – Подання кривої в координатах  $\alpha$  і  $s$

кола на ділянці 0-1 самої кривої  $m$ , ламаній лінії 0-1-2-3-4 графіка  $\alpha(s)$  відповідає коробова крива з дуг кіл. Це видно з наступних міркувань. Відрізок прямої лінії графіка  $\alpha(s)$  має рівняння

$$s = \alpha \cdot \operatorname{ctg} \delta,$$

де  $\delta$  – кут нахилу відрізка до осі  $Os$ . Довжина дуги кола 0-1 кривої  $m$  дорівнює

$$s = \alpha \cdot R,$$

де  $R$  – радіус кола,  $\alpha$  – кут у радіанах.

Зіставляючи рівняння, помічаємо, що

$$R = \operatorname{ctg} \delta.$$

Розглянемо, як усе це реалізується в дискретному варіанті.

Якщо задана деяка ДПК  $\alpha_i = \alpha(s_i)$ , див. рис. 2.29, разом зі своєю СЛЛ,

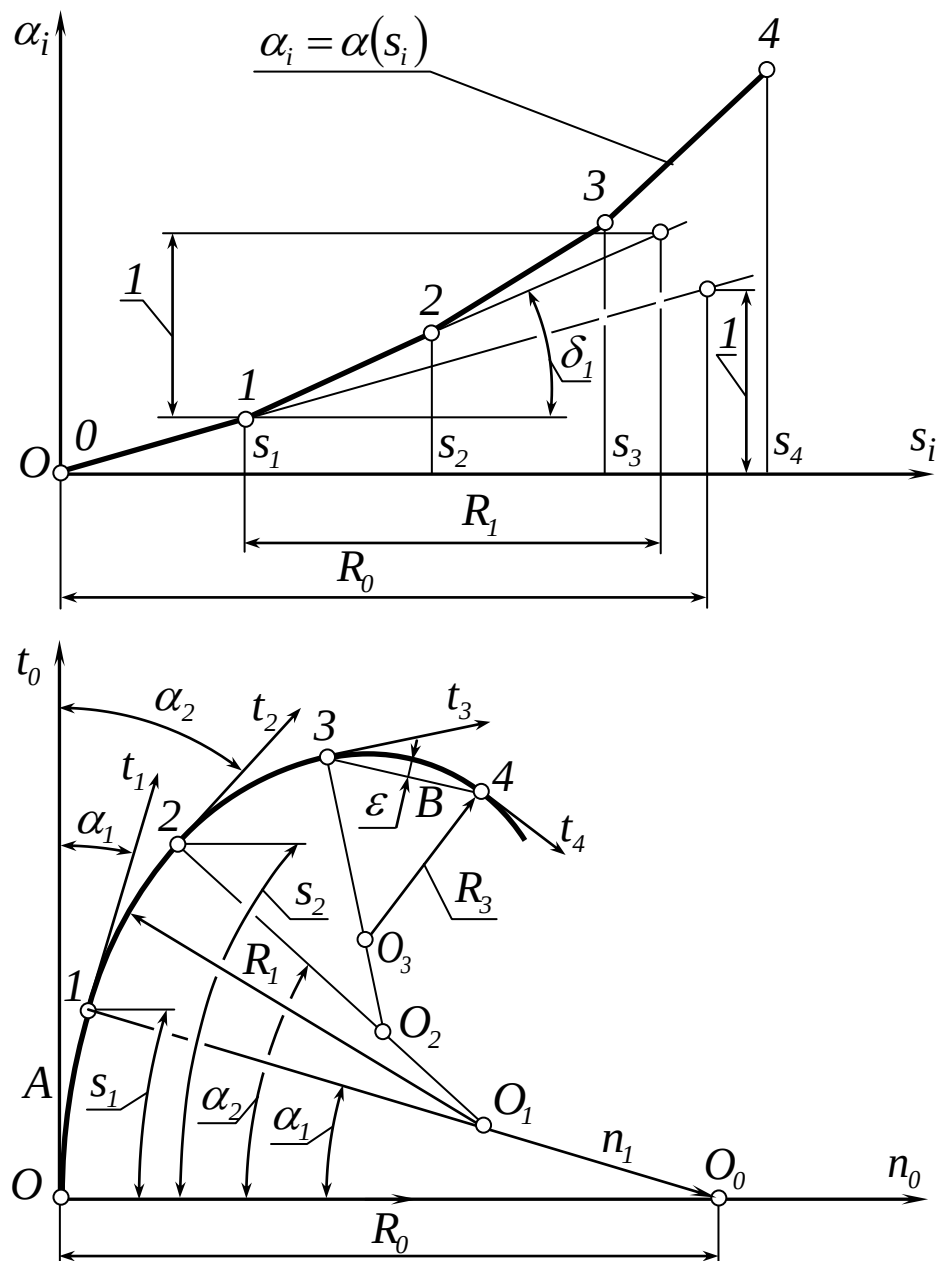


Рисунок 2.29 – Побудова обводу із дуг кіл, відповідного ламаній лінії  $\alpha_i = \alpha(s_i)$

то можна вважати, що кожній ланці СЛЛ відповідає дуга деякого кола, а всій ламаній лінії відповідає обвід із зістикованих дуг кіл.

**Алгоритм** їхніх побудов полягає в наступному:

1. Скориставшись графіком  $\alpha_i = \alpha(s_i)$ , визначаємо початковий радіус  $R_0 = \text{ctg} \delta_0$ .
2. Намічаємо початкову точку  $O$  дуги обводу і проводимо дотичну  $t_0$  і нормаль  $n_0$  майбутньої кривої в т. $O$ .
3. На напрямку нормалі відкладаємо від т. $O$  величину початкового радіуса  $R_0$  (точка  $O_0$ ) і проводимо дугу початкового кола обводу.
4. З т. $O$  на побудованій дузі відкладаємо величину  $s_0, s_1$  з графіка  $\alpha(s_i)$ . Одержуємо точку 1 – початок наступної дуги. Її нормаль  $n_1$  з'єднує отриману точку 1 з т.  $O_0$ . Кут між  $n_0$  і  $n_1$  дорівнює куту суміжності  $\alpha_1$  дотичних  $t_0$  і  $t_1$ .
5. На напрямку нормалі  $n_1$  від т.1 відкладаємо величину  $R_1 = \text{ctg} \delta_1$  і намічаємо центр  $O_1$  другої дуги обводу радіуса  $R_1$  і т.д.

Точність описаного моделювання обводу з дуг кіл на основі СЛЛ ДПК графіка  $\alpha(s_i)$  визначається максимальним значенням перевищення точок однієї з дуг обводу над стягуючою її хордою. На рис.2.29 це відрізок  $\varepsilon$  на дузі 3-4. Якщо він перевищує припустиме значення, то доцільно згустити ДПК  $\alpha(s_i)$ , особливо в області дуги 3-4. Це дає нову ДПК, ланки СЛЛ у якій будуть значно коротше ланок СЛЛ колишньої ДПК. Число дуг кіл буде більше, а довжина кожної з них буде менше. Отже, зменшиться і величина відрізка  $\varepsilon$ . У такий спосіб для наявної ДПК  $\alpha_i = \alpha(s_i)$  завжди можна шляхом згущення цього графіка побудувати з заданою точністю відповідний обвід з дуг кіл.

У приведеному вище викладі ДПК  $\alpha(s_i)$  передбачається заданою і на її основі будується відповідна їй вихідна ДПК (вузли коробової кривої) чи сама коробова крива. Це зворотна задача моделювання. Раніше ми вирішували пряму задачу, тобто для наявної ДПК  $(x_i, y_i)$  будували відповідну їй ДПК  $\rho_i = \rho(s_i)$  у натуральних координатах  $\rho_i, s_i$  де  $\rho_i$  – радіус кривини в  $i$  – й точці визначався, як радіус кола, що проходить через точки  $i-1, i, i+1$ . Покажемо ще одну можливість визначення радіуса кривини в точках вихідної кривої (Бубенніков А.В. [27]).

На рис. 2.30 зображена довільна опукла крива  $m$ . В обраних на ній точках  $0, 1, 2, \dots$  проведені відповідні дотичні  $t_0, t_1, t_2, \dots$  і на них від точок дотику  $0, 1, 2, \dots$  відкладені однакові відрізки  $d$ . Отримані точки  $0', 1', 2', \dots$  визначають еквітангенціальну криву  $m'$ . Щоб визначити радіус кривини (напри-

клад у т.2 кривої  $m$ ) будуюмо нормаль  $n_2 \perp t_2$ , а також  $n'_2 \perp t'_2$  у точці  $2'$  кривої  $m'$ . Їхній перетин дає центр кривини  $O_2$ , а відстань  $O_2 2$  – радіус кривини  $\rho_2$ . У такий спосіб можна визначити радіуси  $\rho_i$  у всіх вузлах кривої  $m$  і побудувати графік  $\rho_i = \rho(s_i)$ .

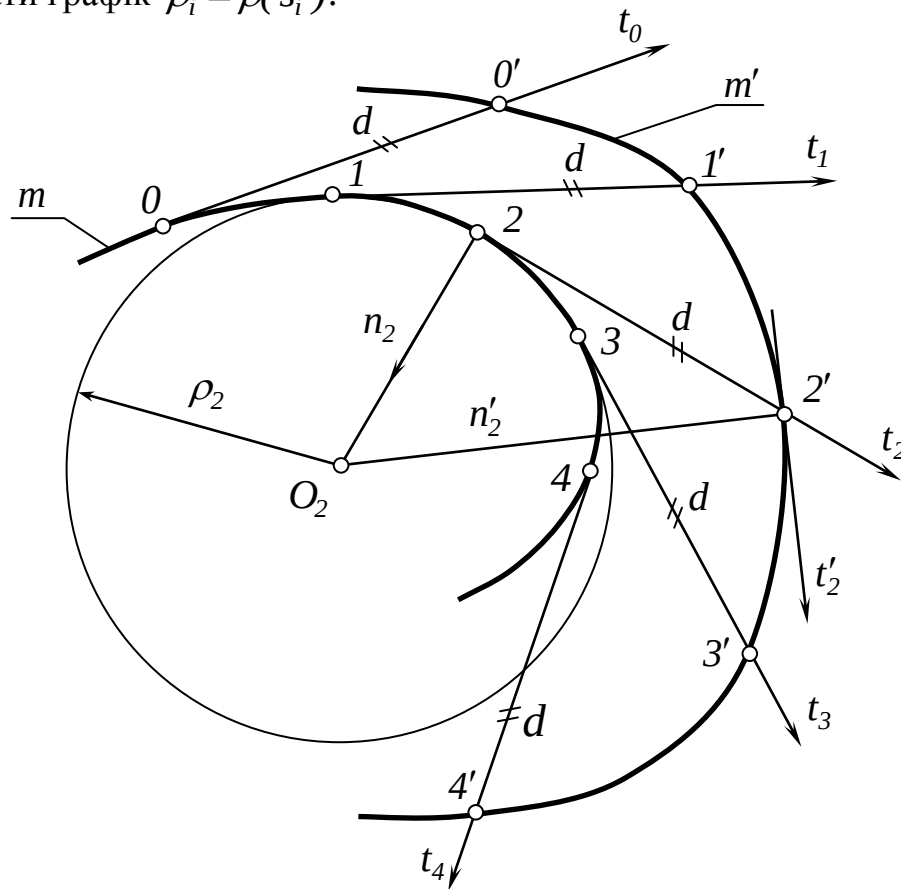


Рисунок 2.30 – Визначення радіуса кривини  $\rho_2$  в т. 2 за допомогою еквітангенціальної кривої

У дискретному варіанті, коли крива  $m$  представлена точковим рядом  $0,1,2,\dots$  можна діяти в такий спосіб:

1. Сформулювати СЛЛ ДПК, з'єднавши задані точки її ланками.
2. Шляхом дискретного диференціювання отриманої ДПК визначити дотичні  $t_i$  в кожному її вузлі.
3. На побудованих дотичних відкласти від точок дотику задану відстань  $d$  і одержати точки еквітангенціальної ДПК  $m'$ .
4. Шляхом дискретного диференціювання ДПК  $m'$  визначити дотичні  $t'_i$  в її вузлах.
5. Побудувати центри кривини  $O_i$  і визначити радіуси  $\rho_i$  для кожного з вузлів ДПК  $m$ .
6. Маючи довжини ланок СЛЛ ДПК  $m$  і значення радіусів  $\rho_i$ , можна побудувати графік  $\rho_i = \rho(s_i)$  (див. рис.2.26).



При необхідності можна визначити кути нахилу  $\delta_i = \arctg \rho_i$  ланок СЛЛ ДПК  $\alpha_i = \alpha(s_i)$  і побудувати ламану лінію  $\alpha(s_i)$  аналогічно рис. 2.29.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке внутрішнє (натуральне) рівняння кривої?
2. Як побудувати дискретний графік натуральних координат ДПК? Що розуміється під натуральними координатами в дискретному варіанті?

## 2.9. ФОРМОУТВОРЕННЯ ПЛОСКИХ ДПК ЗА ЗАДАНИМИ УМОВАМИ

Формування ДПК є основою всякого дискретного геометричного моделювання і містить у собі розрахунок сітки, якщо вона не задана, і ординат точок відповідно до вимог конкретної задачі. Ці вимоги виявляються так, що між точками ряду установлюються певні залежності, що визначають його форму, характеристики, параметри і т.п. Навіть у випадку, коли просто заданий точковий ряд невідомої природи (наприклад, таблицею значень координат), все одно ми будемо припускати в ньому наявність деякої *внутрішньої геометрії*, обумовленої сукупністю значень параметрів, що не залежать від наявності системи координат (довжини ланок СЛЛ, кути їхньої суміжності, перевищення точок над хордами, що стягують сусідні вузли, і т.п.).

Задачею будь-якого виду моделювання є установлення відповідності між параметрами модельованого явища чи процесу і параметрами моделі, у рамках якої формуються вимоги до моделі і її параметрів, виходячи зі специфіки плину явища і зміни його параметрів чи характеристик. Стосовно до геометричної моделі це формування вимог позиційного, метричного, диференціально-геометричного характеру стосовно геометричного образу, що служить ядром моделі. Ми спробуємо сформулювати ці вимоги, абстрагуючись від того, яким конкретним явищам і характеристикам можуть вони відповідати, залишаючи це на розсуд розроблювача моделі чи дослідника явища.

До числа геометричних умов формоутворення ДПК відносяться:

- інцидентність (приналежність) деяким заздалегідь заданим точкам: початковим  $Y_0, Y_1$ ; кінцевим (граничним)  $Y_{n-1}, Y_n$ ; характерним точкам  $Y_e, Y_p \dots$  (точки екстремуму, нулі ДПК і ін.);
- заданий закон зміни параметрів ДПК або задана сукупність їхніх значень  $(\alpha_i, \alpha_i, l_i, \Delta y_i)$ ;
- задані диференціально-геометричні властивості у вигляді заданого закону зміни чи заданої сукупності значень скінченної чи поділеної різниці чи заданої похідної в точках ряду;
- додаткові залежності між координатами точок формованого ряду, у т.ч. і між ординатами й абсцисами;

- ланки СЛЛ заданої довжини, в окремому випадку умова формування рівноланкової СЛЛ;
- множина значень кутових параметрів неоднозначних ДПК чи їхніх параметричних представлень з дотриманням перерахованих вище умов;
- відсутність осциляції формованого точкового ряду.

Остання умова є найважливішою при моделюванні. Від її дотримання залежить стабільність форми ДПК, дотримання диференціально-геометричних характеристик і досягнення заданої точності моделювання. Для ілюстрації звернемося до рис. 2.31. Поставимо задачу формування *опуклої* ДПК через дві початкові 0 і 1 і дві задані 9 і 10 точки. Якщо виконати вимогу відсутності осциляції, то проміжні точки будуть 2, 3, ..., 7, 8... Якщо вимогу не виконати, то можна одержати точки 2', 3', ..., 7', 8', з'єднані штриховою СЛЛ. У першому випадку ДПК опукла, другі різниці у всіх точках від'ємні (крім нульової й останньої, де вони не визначені). В другому випадку опуклі ділянки 2', 3', 4' і 6', 7', 8' чергуються з увігнутими 4'5'6 і 7'8'9', чергуються і знаки других різниць. Це і є явище осциляції.

Визначення. Явище непередбаченої зміни знаку другої різниці при формоутворенні плоскої ДПК називається *осциляцією* [9].

На рис 2.31 штрихова ДПК виникла *всупереч* поставленій задачі, непередбачено, у результаті роботи алгоритмів, де вимога запобігання осциляції не була поставлена. Помітимо, що обидві ДПК (і штрихова, і суцільна) через задані точки 0, 1, 9, 10 проходять.

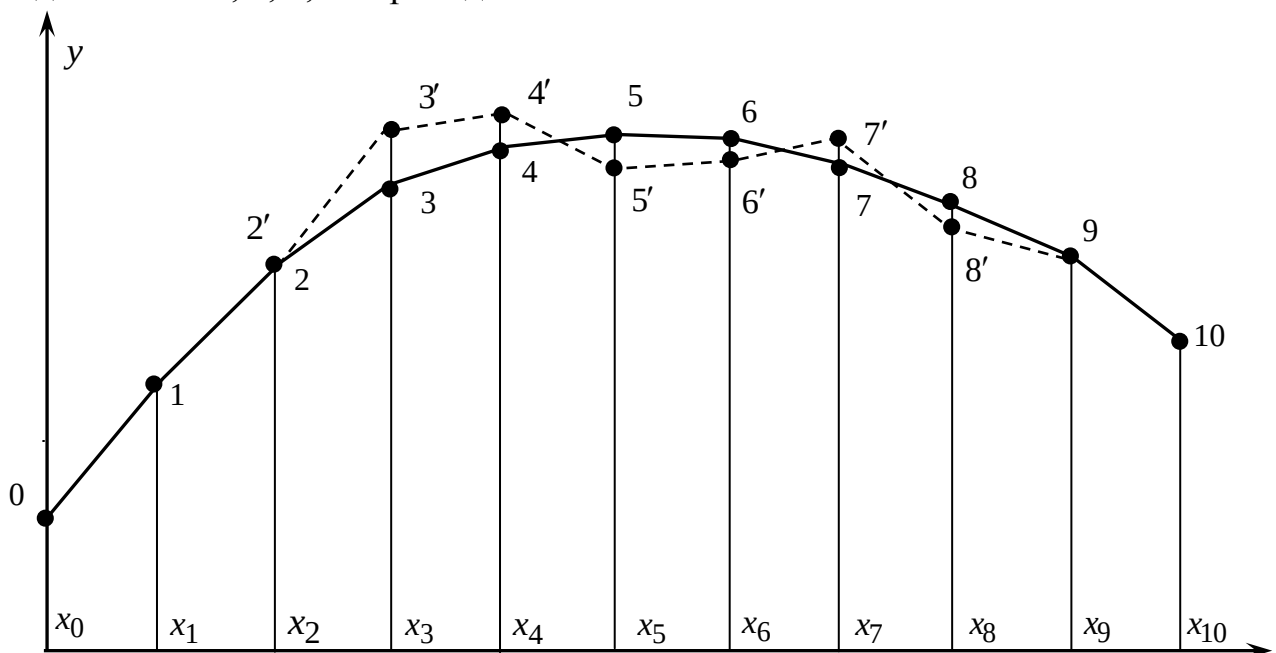


Рис.2.31 – Явище осциляції при формоутворенні ДПК

Явище осциляції дуже широко поширене при неперервному моделюванні. Практичні застосування алгебраїчних поліномів степеня 3 і вище неминуче приводять до появи осциляції. Причому, дотепер не знайдено, як позбутися цього явища.

Вихід був знайдений нами при роботі з дискретними точковими рядами. Деякі з запропонованих способів будуть розглядатися пізніше.

Розглянемо розв'язання задач формоутворення відповідно до заздалегідь заданих умов. Оскільки в алгебраїчних поліномів найбільш прості дискретні представлення, саме їх ми будемо використовувати при розв'язанні поставлених задач.

**Задача 1.** Сформувані ДПК, інцидентну заданим точкам  $A(x_0=10, y_0=20)$ ,  $B(x_1=20, y_1=50)$ ,  $C(x_9=100, y_9=74)$ ,  $D(x_{10}=100, y_{10}=34)$  на рівномірній сітці з кроком 10мм і перевірити опуклість ДПК.

В основу розв'язання задачі приймається підрахунок числа точок інцидентів (приналежності). Їхня кількість повинна дорівнювати числу незалежних параметрів у дискретному представленні полінома. Число заданих точок – 4. Отже, треба прийняти скінченну різницю 4-го порядку:

$$\begin{aligned} y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 &= 0 \\ y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 &= 0 \\ y_2 - 4y_3 + 6y_4 - 4y_5 + y_6 &= 0 \\ y_3 - 4y_4 + 6y_5 - 4y_6 + y_7 &= 0 \\ y_4 - 4y_5 + 6y_6 - 4y_7 + y_8 &= 0 \\ y_5 - 4y_6 + 6y_7 - 4y_8 + y_9 &= 0 \\ y_6 - 4y_7 + 6y_8 - 4y_9 + y_{10} &= 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Усього ряд має 11 точок, з них 4 – відомі. Невідомих – 7. Число рівнянь системи (2.37) – 7. У такий спосіб при розв'язанні системи одержимо однозначно значення ординат відсутніх точок, а саме

|     |    |    |     |     |     |     |     |
|-----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $i$ | 2  | 3  | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   |
| $y$ | 76 | 97 | 114 | 124 | 126 | 119 | 102 |

Помітимо, що якщо число заданих умов у вигляді точок інцидентів дорівнює порядку різниці, то завжди число рівнянь системи, аналогічної (2.37), дорівнює числу невідомих точок.

Для перевірки опуклості побудованої ДПК розрахуємо другі різниці за формулою

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = \Delta^2 y_i, i = \overline{1;9}$$

|              |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
|--------------|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| $i$          | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7   | 8   | 9   |
| $\Delta^2 y$ | -4 | -5 | -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | -11 | -12 |

Як бачимо, всі значення  $\Delta^2 y$  від'ємні. Отже, ДПК – опукла. Крім того, як і слід було очікувати, закон зміни других скінченних різниць від номера

точки – лінійний, що дійсно має місце для 3 – полінома. Нагадаємо, що в 2 – полінома другі скінченні різниці стали, у 3 – полінома змінюються за лінійним законом, у K-полінома – за законом  $(K - 2)$  – полінома.

Помітимо, що алгоритм розв’язання задач, подібних розглянутій, не залежить від того, які точки інцидентів задані. Це можуть бути не обов’язково початкові чи граничні точки. Це можуть бути будь-які проміжні точки. Інші точки визначаються із системи, аналогічної (2.37).

Алгоритм розв’язання задач інцидентів.

1. Визначаємо кількість точок інцидентів.
2. Приймаємо порядок скінченної різниці формуючого полінома, що дорівнює числу точок інцидентів.
3. Складаємо систему рівнянь на основі скінченної різниці обраного в п.2 порядку.
4. З отриманої системи визначаємо ординати невідомих точок.

**Задача 2.** Сформувати ДПК від  $i = 0$  до  $i = 11$ , інцидентну заданій точці А  $(x_0 = 10, y_0 = 90)$ , на рівномірній сітці з кроком  $h = 10\text{мм}$  за заданою сукупністю значень кутів нахилу  $\alpha_i$  ланок СЛЛ до осі Ох

|          |             |             |             |
|----------|-------------|-------------|-------------|
| $i$      | 2           | 6           | 9           |
| $\alpha$ | $-58^\circ$ | $-10^\circ$ | $+47^\circ$ |

Ордината довільної точки ДПК на рівномірній сітці з кроком  $h$ , початковою точкою  $(x_0, y_0)$  і множиною значень  $\alpha_i, i = \overline{0;10}$ , визначається за формулою

$$y_{i+1} = y_0 + h \sum_{k=0}^i \operatorname{tg} \alpha_k; i = \overline{0;10}. \quad (2.38)$$

Очевидно, для побудови ДПК треба мати *повний* набір кутів  $\alpha_i$ , а потім за формулою (2.38) розрахувати шукані ординати. Множину  $\alpha_i$  можна сформувати, вирішуючи задачу 1 для наших вихідних даних  $\alpha_2 = -58^\circ, \alpha_6 = -10^\circ, \alpha_9 = 47^\circ$ . Маємо 3 значення. Порядок різниці дорівнює 3. Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \alpha_0 - 3\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 + 3\alpha_3 - \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_2 - 3\alpha_3 + 3\alpha_4 - \alpha_5 &= 0 \\ \alpha_3 - 3\alpha_4 + 3\alpha_5 - \alpha_6 &= 0 \\ \alpha_4 - 3\alpha_5 + 3\alpha_6 - 3\alpha_7 &= 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\alpha_5 - 3\alpha_6 + 3\alpha_7 - 3\alpha_8 = 0$$

$$\alpha_6 - 3\alpha_7 + 3\alpha_8 - 3\alpha_9 = 0$$

$$\alpha_7 - 3\alpha_8 + 3\alpha_9 - 3\alpha_{10} = 0$$

Усього кутів 11, невідомих – 8, число рівнянь системи – теж 8. Підставляємо в цю систему відомі  $\alpha_2 = -58^\circ$ ,  $\alpha_6 = -10^\circ$  й  $\alpha_9 = 47^\circ$  і визначаємо шукані  $\alpha_i$ . На основі отриманих  $\alpha_i$  визначаємо шукані ординати згідно з (2.38). Контрольна перевірка опуклості за допомогою значень других різниць від ординат точок свідчить, що всі значення додатні, сформована ДПК – увігнута. Це слід було очікувати на основі множини значень  $\alpha_i$ . Оскільки множина  $\alpha_i$  монотонно зростає, то формована на цій основі ДПК – увігнута. Результати розрахунків зведені в табл.2.7.

Таблиця 2.7 – Результати розрахунків задачі 2

| $i$                       | 0      | 1      | 2      | 3      | 4       | 5       | 6       | 7      | 8      | 9     | 10     | 11     |
|---------------------------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|--------|--------|-------|--------|--------|
| $\alpha$<br>град          | -70    | -65    | -58    | -49    | -38     | -25     | -10     | 7      | 26     | 47    | 70     | –      |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | -2,747 | -2,145 | -1,600 | -1,150 | -0,7813 | -0,4663 | -0,1763 | 0,1228 | 0,4877 | 1,072 | 2,247  | –      |
| $y$                       | 90     | 62,53  | 41,08  | 25,08  | 13,58   | 5,767   | 1,104   | 0,659  | 0,569  | 5,446 | 16,166 | 38,636 |
| $\Delta^2 y$              | –      | 6,02   | 5,22   | 4,5    | 3,587   | 3,15    | 2,9     | 2,991  | 3,649  | 5,843 | 11,75  | –      |

Графіки сформованої ДПК і кутів  $\alpha_i$  представлені на рис.2.32.

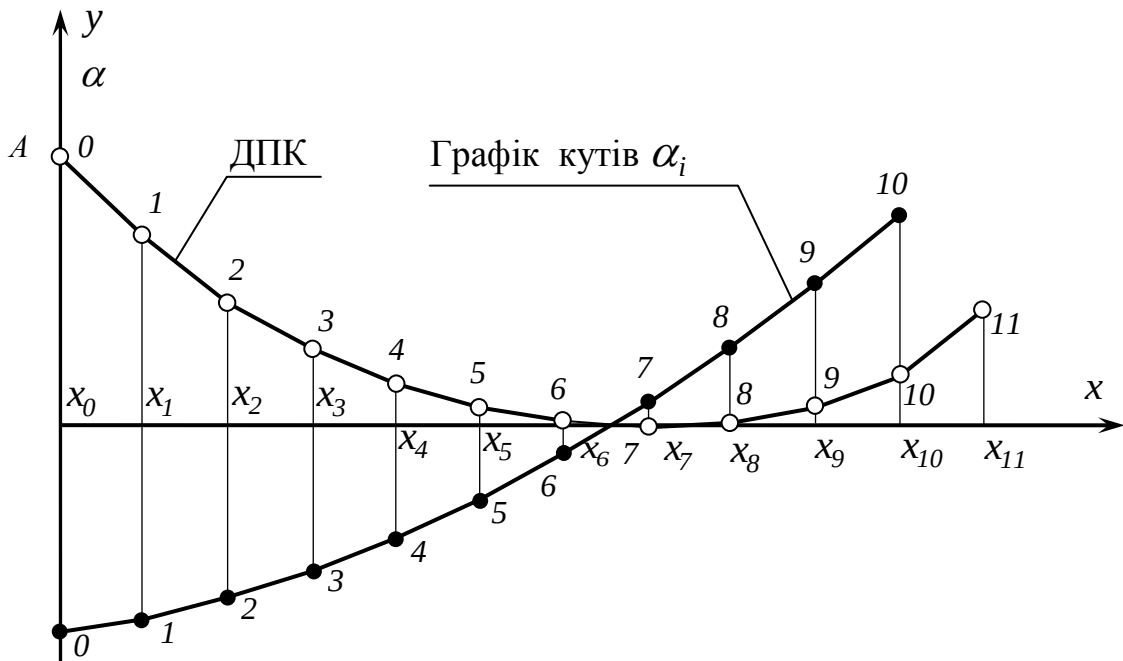


Рисунок 2.32 – Графік ДПК і її кутів  $\alpha_i$

Звернемо увагу на одну особливість отриманого розв'язку. Відповідно до теорії неперервних кривих екстремальна точка графіка функції (у нас дис-

кретний аналіз – формована ДПК) і нуль графіка її 1-ї похідної (дискретний аналог – графік  $\alpha_i$ ) повинні мати ту саму абсцису. У нашому випадку екстремальна точка ДПК – т.7 має абсцису  $x_7$ , а графік  $\alpha_i$  перетинає вісь  $Ox$  між  $x_6$  і  $x_7$ . Така неузгодженість не значить, що розв’язок отримано невірно. Він є вірним у межах нашої точності. Якщо ущільнити точкові ряди ДПК і  $\alpha_i$  на ділянці 6-7, то екстремальна точка ДПК зміститься вліво, а нуль графіка  $\alpha_i$  – вправо. Чим більше побудованих точок згущення, тим ближче абсциси екстремальної і нульової точок. Зрештою вони можуть збігтися з точністю до заданого як завгодно малого  $\varepsilon > 0$ .

При формоутворенні ДПК із регламентованою екстремальною точкою цю обставину треба враховувати, а саме: перетин графіка  $\alpha_i$  з віссю  $Ox$  повинен бути на ділянці *передбачуваної* (після згущення) екстремальної точки, а не фактично отриманої на даній сітці.

Розглянемо це докладніше.

**Задача 3.** Сформувати ДПК від  $i = 0$  до  $i = 11$ , інцидентну заданій точці  $A(x_0 = 10, y_0 = 90)$ , на рівномірній сітці з кроком  $h = 10 \text{ мм}$  за заданою сукупністю значень кутів нахилу  $\alpha_i$  до осі  $Ox$ :  $\alpha_2 = -58^\circ$ ,  $\alpha_4 = -40^\circ$ ,  $\alpha_9 = 40^\circ$ , за умови, що екстремальна точка ДПК повинна знаходитися на ділянці 7-8.

Поставлена задача відрізняється від попередньої тим, що задано кут  $\alpha_4 = -40^\circ$  замість  $\alpha_6 = -10^\circ$  і додалася ще одна умова: наявність точки екстремуму на заданій ділянці. Останнє значить, що графік  $\alpha_i$  повинний перетинати вісь  $Ox$  не на ділянці 6-7, а на ділянці 7-8, тобто в умову формування графіка  $\alpha_i$  введена ще одна вимога: до точки  $\alpha_7$  включно значення  $\alpha_0, \dots, \alpha_7 < 0$ , потім  $\alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10} > 0$ . Для реалізації цього в різницеву формулу графіка  $\alpha_i$  треба ввести ще один параметр (тобто порядок різницевого рівняння треба збільшити на одиницю), щоб цей параметр використовувати для керування формою графіка  $\alpha_i$  з метою виконання поставленої умови.

Система різницевих рівнянь для кутів  $\alpha_i$  аналогічно (2.39) має вигляд

$$\begin{aligned}
\alpha_0 - 4\alpha_1 + 6\alpha_2 - 4\alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\
\alpha_1 - 4\alpha_2 + 6\alpha_3 - 4\alpha_4 + \alpha_5 &= 0 \\
\alpha_2 - 4\alpha_3 + 6\alpha_4 - 4\alpha_5 + \alpha_6 &= 0 \\
\alpha_3 - 4\alpha_4 + 6\alpha_5 - 4\alpha_6 + \alpha_7 &= 0 \\
\alpha_4 - 4\alpha_5 + 6\alpha_6 - 4\alpha_7 + \alpha_8 &= 0 \\
\alpha_5 - 4\alpha_6 + 6\alpha_7 - 4\alpha_8 + \alpha_9 &= 0 \\
\alpha_6 - 4\alpha_7 + 6\alpha_8 - 4\alpha_9 + \alpha_{10} &= 0
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Маємо 7 рівнянь, невідомих, як і раніше 8. Це значить, що одне з невідомих, наприклад,  $\alpha_7$ , можна вибрати (призначити) так, щоб нуль графіка  $\alpha_i$  був між  $\alpha_7$  і  $\alpha_8$ . Щоб визначити межі вибору  $\alpha_7$ , потрібно виразити решту  $\alpha_i$ ,  $i \neq 7$ , через  $\alpha_7$  і відомі  $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_9$ , з умови  $\alpha_0, \dots, \alpha_7 < 0$ ,  $\alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10} > 0$  визначити ці межі. Скориставшись пакетом Maple, знаходимо зазначені залежності:

$$\begin{aligned}
&\alpha_7 < 0, \\
\alpha_0 &= \frac{18}{5}\alpha_2 - \frac{21}{5}\alpha_4 + \frac{12}{5}\alpha_7 - \frac{4}{5}\alpha_9 < 0, \\
\alpha_1 &= \frac{72}{35}\alpha_2 - \frac{8}{5}\alpha_4 + \frac{4}{5}\alpha_7 - \frac{9}{35}\alpha_9 < 0, \\
\alpha_3 &= \frac{12}{35}\alpha_2 + \frac{4}{5}\alpha_4 - \frac{1}{5}\alpha_7 + \frac{2}{35}\alpha_9 < 0, \\
\alpha_5 &= \frac{4}{35}\alpha_2 + \frac{4}{5}\alpha_4 + \frac{2}{5}\alpha_7 - \frac{3}{35}\alpha_9 < 0, \\
\alpha_6 &= -\frac{3}{35}\alpha_2 + \frac{2}{5}\alpha_4 \pm \frac{4}{5}\alpha_7 - \frac{4}{35}\alpha_9 < 0, \\
\alpha_8 &= \frac{2}{35}\alpha_2 - \frac{1}{5}\alpha_4 + \frac{4}{5}\alpha_7 + \frac{12}{35}\alpha_9 > 0, \\
\alpha_{10} &= -\frac{9}{35}\alpha_2 + \frac{4}{5}\alpha_4 - \frac{8}{5}\alpha_7 + \frac{72}{35}\alpha_9 > 0.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Увівши на (2.41) задані обмеження для  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_7 < 0$ ,  $\alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10} > 0$ , одержуємо при заданих  $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_9$  обмеження на вибір  $\alpha_7$ .

$$\begin{aligned}
&\alpha_7 < 15,3333 ; \quad \alpha_7 < 56,29; \quad \alpha_7 > -230,86; \quad \alpha_7 < 74,86; \quad \alpha_7 < 20,57; \\
&\alpha_7 > -23,7; \quad \alpha_7 < 39,14.
\end{aligned}$$

Звідси

$$-23,7^\circ < \alpha_7 < 0.$$

Нехай  $\bar{\alpha}_7 = -10^\circ$ . Тепер з урахуванням прийнятого  $\alpha_7 = \bar{\alpha}_7 = -10^\circ$  з (2.41) визначаємо інші кути й ординати точок згідно з (2.38).

Таблиця 2.8 – Результати розрахунків задачі 3

| $i$                      | 0      | 1      | 2      | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8      | 9      | 10     | 11   |
|--------------------------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|------|
| $\alpha,$<br><i>град</i> | -60,8  | -53,03 | -48    | -44,17  | -40     | -33,94  | -24,46  | -10     | -10,97 | 40     | 78,63  | –    |
| $tg\alpha$               | -1,792 | -1,327 | -1,111 | -0,9713 | -0,8391 | -0,6494 | -0,4556 | -0,1763 | 0,1944 | 0,8391 | 4,989  | –    |
| $y$                      | 90     | 72,08  | 58,81  | 47,7    | 37,987  | 29,596  | 23,102  | 18,546  | 16,783 | 18,727 | 27,118 | 77,0 |

Як бачимо, у порівнянні з задачею 2, отримані інші значення  $\alpha_i$  й ординати  $y_i$  формованої ДПК. Її екстремальна точка, як і було потрібно за умовою задачі, знаходиться на відрізку 7-8.

При розв'язанні задачі 3 нами вперше був застосований *алгоритм керування формою ДПК*, що полягає в наступному:

1. Визначаємо порядок  $k$  різницевого рівняння (скінченної різниці), що дорівнює числу параметрів розв'язуваної задачі.
2. Приймаємо *остаточний* порядок  $k+1$  скінченної різниці, на одиницю більший визначеного в п.1.
3. Складаємо систему скінченних різниць порядку  $k+1$  для точок формованого ряду. Число рівнянь виявляється на одне менше числа невідомих.
4. Одне з невідомих призначаємо керуючим параметром.
5. Вирішуючи систему (п.3), визначаємо залежність кожного з невідомих від відомих параметрів і керуючого параметра.
6. Для кожного з отриманих рівнянь вводимо обмеження на форму ДПК. Одержуємо систему нерівностей з одним керуючим параметром.
7. Розв'язуємо систему нерівностей і визначаємо межі зміни керуючого параметра, що забезпечують виконання вимог задачі.
8. Усередині отриманого відрізка вибору керуючого параметра призначаємо прийнятне його значення, виходячи з умов задачі.
9. Розраховуємо значення невідомих за залежностями п.5 на основі призначеного значення керуючого параметра. Вони задовольняють вимогам задачі.

Якщо у формоутворенні ДПК беруть участь інші параметри  $(\gamma_i l_i, \Delta y_i)$  – у різних сполученнях, то основу розв'язку задачі складають:

- вибір порядку різницевого рівняння за числом заданих значень невідомих або параметрів;
- застосування алгоритму керування формою ДПК, якщо це потрібно.

В іншій задачі розв'язуються через систему лінійних різницевого рівнянь аналогічно одній з вище розглянутих задач.



Розглянемо задачу, у якій як параметр виступає довжина ланок формованої СЛЛ ДПК.

**Задача 4.** Сформувати ДПК від  $i = 0$  до  $i = 11$ , якщо заздалегідь задані  $l_2 = 18\text{мм}$  (довжина ланки 2-3),  $l_6 = 12\text{мм}$ ,  $l_8 = 16\text{мм}$ , кути нахилу ланок СЛЛ:  $\alpha_3 = 30^\circ$ ,  $\alpha_5 = 15^\circ$ ,  $\alpha_9 = -30^\circ$  і точка інциденції  $x_3 = 40, y_3 = 60$ .

Шлях розв'язання задачі полягає у формуванні відсутніх значень довжин ланок  $l_i$  і значень кутів  $\alpha_i$  у залежності від номера вузла  $i$ . Звернемо увагу на те, що сітка не задана. Зважаючи на те, що довжини ланок  $l_i$  і кути  $\alpha_i$  їхнього нахилу незалежні, якщо сітка не задана, будемо формувати їхні графіки незалежно один від одного.

Вихідними даними для формування графіка  $l_i$  є 3 значення:  $l_2$ ,  $l_6$  і  $l_8$ . Ці три точки визначають 2-параболу, якій відповідає система різницьових рівнянь:

$$\begin{aligned} l_0 - 2l_1 + l_2 &= a, \\ l_1 - 2l_2 + l_3 &= a, \\ l_2 - 2l_3 + l_4 &= a, \\ l_3 - 2l_4 + l_5 &= a, \\ l_4 - 2l_5 + l_6 &= a, \\ l_5 - 2l_6 + l_7 &= a, \\ l_6 - 2l_7 + l_8 &= a, \\ l_7 - 2l_8 + l_9 &= a, \\ l_8 - 2l_9 + l_{10} &= a, \end{aligned} \tag{2.42}$$

де  $a$  – параметр параболи.

Усього невідомих – 12, з них задані – 3, підлягають визначенню – 9 (параметр  $a$  і 8 значень  $l_i$ ). У наявності в (2.42) є 9 рівнянь. Підставляючи в систему відомі  $l_2$ ,  $l_6$  і  $l_8$ , визначаємо інші  $l_i$  і  $a$ . Результати розрахунків зведені в таблицю 2.9.

Аналогічно визначаємо відсутні значення кутів  $\alpha_i$  із системи різницьових рівнянь, що збігається з (2.42), при заданих  $\alpha_3$ ,  $\alpha_5$  і  $\alpha_9$ . Результати розрахунків представлені в табл.2.9. Параметр  $a$  для розрахунків  $l_i$  дорівнює  $a_l = 1,167$ , для розрахунків кутів  $\alpha_i$  -  $a_\alpha = -1,25$ .

Таблиця 2.9 – Результати розрахунків задачі 4

|                |        |        |           |           |        |           |           |        |           |            |         |       |
|----------------|--------|--------|-----------|-----------|--------|-----------|-----------|--------|-----------|------------|---------|-------|
| $i$            | 0      | 1      | 2         | 3         | 4      | 5         | 6         | 7      | 8         | 9          | 10      | 11    |
| $l, мм$        | 28     | 22,417 | <b>18</b> | 14,75     | 12,667 | 11,75     | <b>12</b> | 13,417 | <b>16</b> | 19,752     | 24,671  | -     |
| $\alpha, град$ | 43,125 | 40     | 35,625    | <b>30</b> | 23,125 | <b>15</b> | 5,625     | -5     | -16,875   | <b>-30</b> | -44,375 | -     |
| $x, мм$        | -12,3  | 8,18   | 25,35     | <b>40</b> | 52,77  | 64,43     | 75,78     | 87,72  | 101,09    | 116,39     | 133,5   | 151,1 |
| $y, мм$        | 16,04  | 35,14  | 49,55     | <b>60</b> | 67,375 | 72,32     | 75,36     | 76,5   | 75,33     | 70,65      | 60,77   | 43,48 |

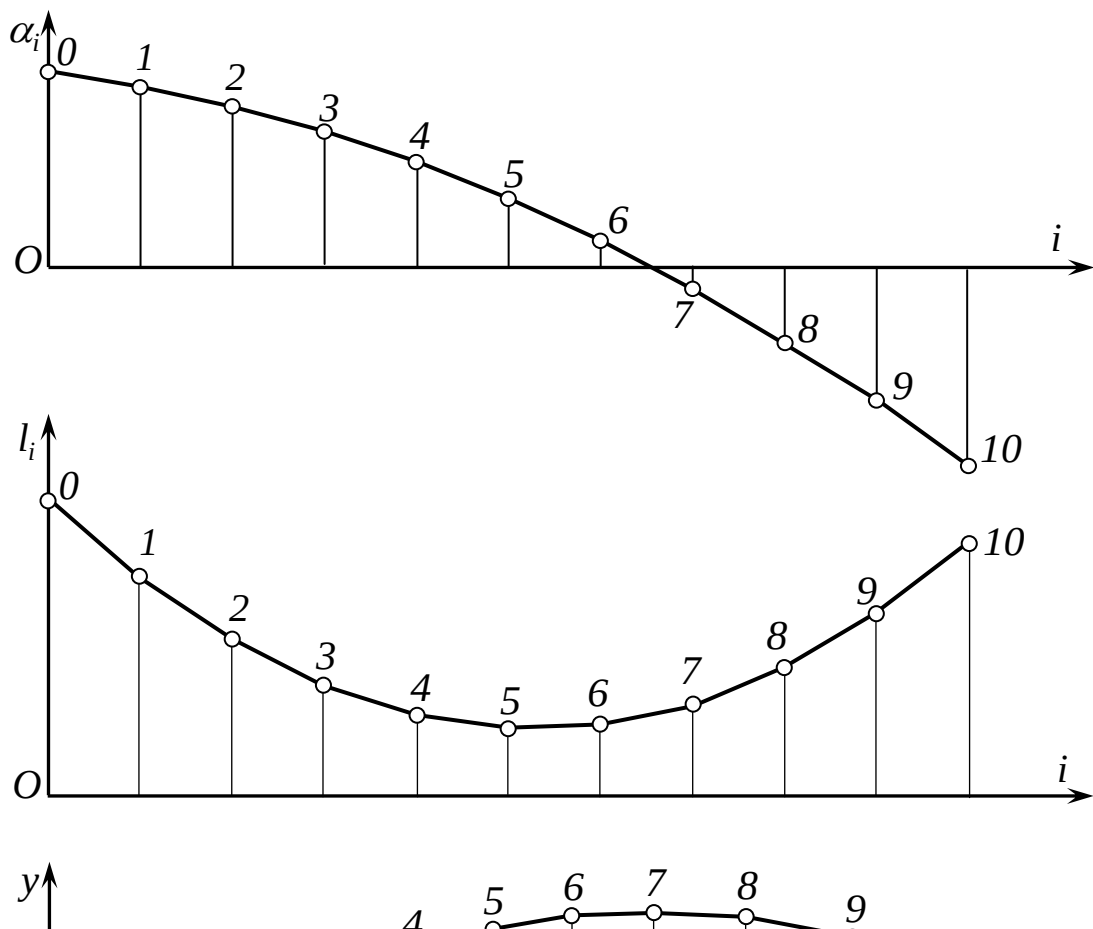
Маючи повну множину значень  $l_i$  і  $\alpha_i$ , можна побудувати ДПК, інцидентну заданій точці ( $x_3 = 40, y_3 = 60$ ). Вправо від цієї точки (по зростанню індексу  $i$ ) координати точок будемо визначати за формулами:

$$\begin{aligned} x_i &= x_3 + \sum_{p=3}^i l_p \cos \alpha_p, \\ y_i &= y_3 + \sum_{p=3}^i l_p \sin \alpha_p, \quad i = \overline{4;11} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Уліво від заданої точки

$$\begin{aligned} x_j &= x_3 - \sum_j^2 l_j \cos \alpha_j, \\ y_j &= y_3 - \sum_j^2 l_j \sin \alpha_j, \quad j = \overline{0;2}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Результати розрахунків зведені в табл.2.9. Графіки  $\alpha(i)$ ,  $l(i)$  і сформованої ДПК представлені на рис.2.33.



При розв'язанні задачі 4 ми скористалися принципом незалежності параметрів і спочатку сформували параметричні представлення  $l(i)$  і  $\alpha(i)$ , а потім на їхній основі побудували шукану ДПК. Цей принцип покладений в основу формоутворення неоднозначних ДПК.

**Задача 5.** Сформувати ДПК від  $i=0$  до  $i=11$ , інцидентну заданим точкам  $A(x_2=70, y_2=70)$ ,  $B(x_4=90, y_4=40)$ ,  $C(x_7=50, y_7=10)$ ,  $D(x_9=30, y_9=30)$ .

Розташування заданих точок свідчить про те, що формована ДПК неоднозначна. Сформуємо її параметричні представлення  $x(i)$  і  $y(i)$ , скориставшись принципом незалежності параметрів (у даному випадку – координат). Задані 4 точки інцидентній. Отже, порядок різницевого рівняння дорівнює 4. Його вигляд буде однаковим і для  $x(i)$  і для  $y(i)$ . Запишемо його для  $x(i)$ :

$$\begin{aligned}
 x_0 - 4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 &= 0, \\
 x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 + x_5 &= 0, \\
 x_2 - 4x_3 + 6x_4 - 4x_5 + x_6 &= 0, \\
 x_3 - 4x_4 + 6x_5 - 4x_6 + x_7 &= 0, \\
 x_4 - 4x_5 + 6x_6 - 4x_7 + x_8 &= 0, \\
 x_5 - 4x_6 + 6x_7 - 4x_8 + x_9 &= 0, \\
 x_6 - 4x_7 + 6x_8 - 4x_9 + x_{10} &= 0, \\
 x_7 - 4x_8 + 6x_9 - 4x_{10} + x_{11} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Маємо усього невідомих 12, що підлягають визначенню – 8, рівнянь – 8. Підставляючи в цю систему задані  $x_2, x_4, x_7, x_9$  визначаємо абсциси інших точок.

Аналогічно розв'язуємо цю ж систему для  $y(i)$  при відомих  $y_2, y_4, y_7$  і  $y_9$ .

Результати розрахунків зведені в табл.2.10.

Таблиця 2.10 – Результати розрахунків задачі 5

| $i$ | 0   | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         | 8     | 9         | 10    | 11  |
|-----|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------|-----------|-------|-----|
| $x$ | -30 | 32,2<br>8 | <b>70</b> | 87,7<br>1 | <b>90</b> | 81,4<br>3 | 66,5<br>7 | <b>50</b> | 36,29 | <b>30</b> | 35,71 | 58  |
| $y$ | 84  | 80,2<br>9 | <b>70</b> | 55,7<br>1 | <b>40</b> | 25,4<br>3 | 14,5<br>7 | <b>10</b> | 14,29 | <b>30</b> | 59,71 | 106 |

Графік сформованої ДПК представлений на рис.2.34. Помітимо, що точка перетину ланок 1-2 і 10-11 – це точка самоперетину майбутньої кривої, що проходить через вузли ДПК, у самім грубому наближенні. Щоб уточнити

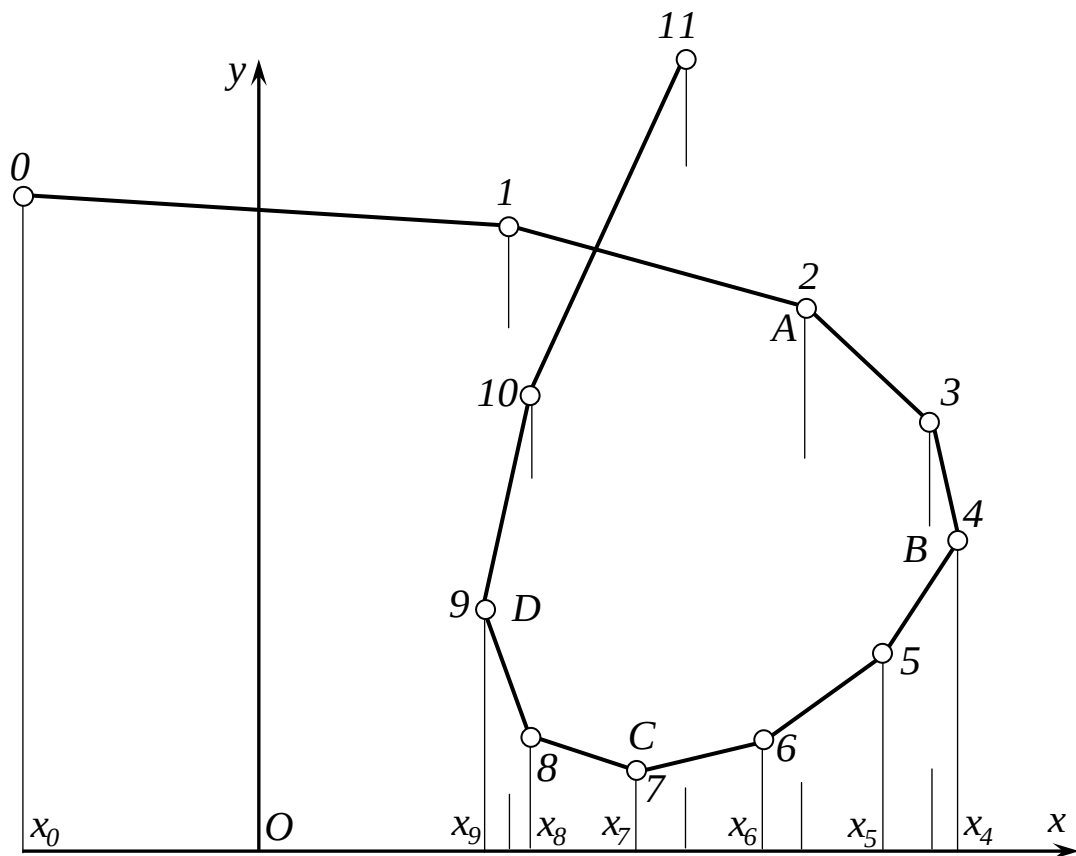


Рисунок 2.34 – Неоднозначна ДПК (задача 5)

положення цієї точки, необхідно ущільнити ділянки 1-2 і 10-11 за спеціальними алгоритмами (будуть розглянуті пізніше).

Ми розглянули досить просту задачу формоутворення неоднозначної ДПК, коли задані тільки точки інциденції. Природно, що реальні задачі можуть містити більш складні умови. Зокрема, можуть бути використані підходи до розв'язання і розрахункові алгоритми, продемонстровані нами в попе-

редніх задачах. Наприклад, формування ДПК на основі кутів  $\alpha_i$ , довжин ланок СЛЛ, з регламентацією форми кривої і т.п.

Найбільш складними умовами формування ДПК є такі, де порушується принцип незалежності координат (параметрів) і вводяться деякі зв'язуючі їх залежності. У такому випадку при підрахунку параметрів кожна залежність вважається додатковою вимогою, що підвищує порядок різницевого рівняння. Крім того, якщо раніше (задача №5) системи рівнянь для  $x(i)$  і  $y(i)$  розв'язувались окремо, то тепер ці дві системи разом із уведеними залежностями між координатами включаються в одну (досить об'ємну) систему. Крім того, оскільки основою формування ДПК є розв'язання системи лінійних рівнянь, то і додаткові залежності між координатами повинні бути лінійними. Розглянемо це на прикладі.

**Задача 6.** Сформувати ДПК від  $i=0$  до  $i=10$ , інцидентну точкам  $A(x_2=70, y_2=70)$ ,  $B(x_5=80, y_5=25)$ ,  $C(x_8=36, y_8=14)$  і таку, що задовольняє умовам:  $y_3 - y_1 = -0,45(x_3 - x_1)$ ,  $y_6 - y_4 = x_6 - x_4$ ,  $y_3 = y_{10}$ .

Виконаємо параметричний аналіз задачі. Для точкового ряду  $y(i)$  враховуємо 3 точки інциденції і залежність  $y_3 = y_{10}$ . Отже, потрібно взяти скінченну різницю 4-го порядку. Для ряду  $x(i)$  - три точки інциденції і 2 залежності, що залишилися, тобто необхідна різниця 5-го порядку. Остаточно сумарна система має вигляд:

$$\begin{aligned}
 y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 &= 0, \\
 y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 &= 0, \\
 y_2 - 4y_3 + 6y_4 - 4y_5 + y_6 &= 0, \\
 y_3 - 4y_4 + 6y_5 - 4y_6 + y_7 &= 0, \\
 y_4 - 4y_5 + 6y_6 - 4y_7 + y_8 &= 0, \\
 y_5 - 4y_6 + 6y_7 - 4y_8 + y_9 &= 0, \\
 y_6 - 4y_7 + 6y_8 - 4y_9 + y_{10} &= 0, \\
 y_3 &= y_{10}, \\
 y_3 - y_1 &= -0,45(x_3 - x_1), \\
 y_6 - y_4 &= x_6 - x_4,
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}
x_0 - 5x_1 + 10x_2 - 10x_3 + 5x_4 - x_5 &= 0, \\
x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 10x_4 + 5x_5 - x_6 &= 0, \\
x_2 - 5x_3 + 10x_4 - 10x_5 + 5x_6 - x_7 &= 0, \\
x_3 - 5x_4 + 10x_5 - 10x_6 + 5x_7 - x_8 &= 0, \\
x_4 - 5x_5 + 10x_6 - 10x_7 + 5x_8 - x_9 &= 0, \\
x_5 - 5x_6 + 10x_7 - 10x_8 + 5x_9 - x_{10} &= 0.
\end{aligned}$$

Усього маємо 16 рівнянь і 16 невідомих  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $i = \overline{0;10}$ ,  $i \neq 2,5,8$ . Розв'язуючи цю систему при заданих  $x_2, y_2, x_5, y_5, x_8, y_8$ , знаходимо значення координат шуканих точок (табл.2.11).

Таблиця 2.11 – Результати розв'язання задачі 6 (система (2.46))

| $i$ | 0      | 1     | 2         | 3     | 4     | 5         | 6     | 7     | 8         | 9     | 10    |
|-----|--------|-------|-----------|-------|-------|-----------|-------|-------|-----------|-------|-------|
| $x$ | -47,43 | 24,43 | <b>70</b> | 88,32 | 89,56 | <b>80</b> | 65,03 | 49,15 | <b>36</b> | 28,30 | 27,9  |
| $y$ | 89,56  | 82,29 | <b>70</b> | 54,89 | 39,16 | <b>25</b> | 14,62 | 10,22 | <b>14</b> | 28,16 | 54,89 |

На рис.2.35 зображені параметричні ряди  $x(i)$  й  $y(i)$  і сформована ДПК.

Помітимо, що при виборі порядку різниць для  $x(i)$  і  $y(i)$  розподіл заданих залежностей між ними є чисто умовним. Можна було для  $y(i)$  умовно дві залежності звести до купи з трьома точками інциденції і взяти різницю 5-го порядку. Тоді  $x(i)$  описувався б різницею 4-го порядку. Результат звичайно,



буде відрізнятися від попереднього, але поставлені умови повинні виконуватися. Цей варіант розв'язання дає наступні результати (табл.2.12).

Таблиця 2.12 – Результати розв'язання задачі 6 (другий варіант)

| $i$ | 0      | 1     | 2         | 3     | 4     | 5         | 6     | 7     | 8         | 9     | 10    |
|-----|--------|-------|-----------|-------|-------|-----------|-------|-------|-----------|-------|-------|
| $x$ | -34,95 | 30,77 | <b>70</b> | 87,87 | 89,49 | <b>80</b> | 64,5  | 48,13 | <b>36</b> | 33,23 | 44,94 |
| $y$ | 85,38  | 80,96 | <b>70</b> | 55,27 | 39,42 | <b>25</b> | 14,43 | 10,03 | <b>14</b> | 28,42 | 55,27 |

Як бачимо, краї ДПК (точки 0,1 і 9,10) у таблицях 2.11 і 2.12 різні, середини – практично збігаються. Це явище нагромадження помилок на краях ДПК властиве переважній більшості обчислювальних процесів. Наприклад, похибки алгебраїчної інтерполяції максимальні на початку і в кінці таблиці значень абсцис. Тому в якості точки інцидентів намагаються задавати початкову й останню (граничну) точки. Представлені в задачі 6 залежності  $y_3 - y_1 = -0,45(x_3 - x_1)$ ,  $y_6 - y_4 = x_6 - x_4$  можна представити через дискретні аналоги похідних у відповідних вузлах ДПК:

$$y'_2 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = -0,45 ; \quad y'_5 = \frac{y_6 - y_4}{x_6 - x_4} = 1$$

на підставі формули, відомої з теорії чисельних методів

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}. \quad (2.47)$$

Таким чином можна вважати, що в задачі 6 сформована ДПК враховує значення похідних у вузлах 2 і 5.

Більш точні результати при формоутворенні з урахуванням похідних можна одержати тоді, коли застосовуються формули чисельного диференціювання, що представляють собою залежність значення похідної в даній точці від значень ординат сусідніх вузлових точок ДПК. Вони складаються на основі алгебраїчних інтерполяційних формул і відповідають поліному визначеного степеня. Наприклад, для 3-полінома, обумовленого послідовною четвіркою точок ряду, маємо [1]:

$$\begin{aligned} y'_0 &= \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3), \\ y'_i &= \frac{1}{6h}(-2y_{i-1} - 3y_i + 6y_{i+1} - y_{i+2}), i = \overline{1; n-2}, \\ y'_{i+1} &= \frac{1}{6h}(y_{i-1} - 6y_i + 3y_{i+1} + 2y_{i+2}), i = \overline{1; n-2}, \\ y'_n &= \frac{1}{6h}(-2y_{n-3} + 9y_{n-2} - 18y_{n-1} + 11y_n). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Недоліком цих формул є те, що вони призначені для ДПК на рівномірній сітці (крок  $h$ ).



У літературі можна знайти (чи самостійно одержати) формули, аналогічні (2.48) для похідної заданого порядку і полінома довільного степеня. Вони можуть бути досить громіздкими, хоча для розрахунків на ЕОМ це особливо-го значення не має. Помітимо, що при цьому різницеве рівняння для формування ДПК повинне відповідати формулам чисельного диференціювання. Конкретно: якщо для формування ДПК застосовується скінченна різниця 4-го порядку, що відповідає 3-поліному, то і формули чисельного диференціювання повинні бути отримані для 3-полінома (див. (2.48)). Розглянемо приклад.

**Задача 7.** Сформувати ДПК від  $i = 0$  до  $i = 10$  на рівномірній сітці з кроком  $h = 10 \text{ мм}$ , інцидентну точкам  $A(x_2 = 40, y_2 = 80)$ ,  $B(x_8 = 100, y_8 = 10)$  і таку, що відповідає заданим значенням похідних:  $y'_1 = -1$ ,  $y'_5 = -2$ .

Усього задано 4 умови: 2 точки інциденцій і два значення 1-ї похідної. Отже, порядок скінченної різниці для формування ДПК дорівнює 4, що відповідає 3-поліному. Скориставшись формулами чисельного диференціювання (2.48) для 3-полінома, запишемо  $y'_1$  і  $y'_5$  через сусідні з ними точки:

$$\begin{aligned} y'_1 &= \frac{1}{60}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) = -1 \\ y'_5 &= \frac{1}{60}(y_3 - 6y_4 + 3y_5 + 2y_6) = -2 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Основна система

$$\begin{aligned} y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 &= 0 \\ y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 &= 0 \\ y_2 - 4y_3 + 6y_4 - 4y_5 + y_6 &= 0 \\ y_3 - 4y_4 + 6y_5 - 4y_6 + y_7 &= 0 \\ y_4 - 4y_5 + 6y_6 - 4y_7 + y_8 &= 0 \\ y_5 - 4y_6 + 6y_7 - 4y_8 + y_9 &= 0 \\ y_6 - 4y_7 + 6y_8 - 4y_9 + y_{10} &= 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Спільна система (2.49) + (2.50) нараховує 9 рівнянь. Нам треба визначити 9 значень невідомих  $y_i$ ,  $i \neq 2; 8$ . Розв'язуємо цю систему з урахуванням  $y_2 = 80$ ,  $y_8 = 10$ . Маємо

| $i$ | 0     | 1 | 2         | 3 | 4 | 5    | 6    | 7     | 8         | 9     | 10     |
|-----|-------|---|-----------|---|---|------|------|-------|-----------|-------|--------|
| $y$ | 98,15 |   | <b>80</b> |   |   | 6,25 | -8,5 | -9,12 | <b>10</b> | 54,40 | 129,63 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

На основі формул чисельного диференціювання можна вирішувати задачі формоутворення ДПК за заданими диференціально-геометричними умовами для всієї ДПК. Суть розв'язку складається в заміні похідних їх скінченно-різницеви́ми аналогами, складанні на цій основі лінійної різницевої системи, з якої визначаються шукані координати точок ДПК. Розглянемо приклад.

**Задача 8.** Сформулювати ДПК від  $x=0$  до  $x=50$  на рівномірній сітці з кроком  $h=10\text{мм}$ , що відповідає диференціальному рівнянню  $10y'' - y' = -1$  і інцидентну точкам  $y_0=40$ ,  $y_5=30$ .

Вводимо в задане диференціальне рівняння дискретні аналоги похідних:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; \quad y''_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}; \quad i = \overline{1; n-1}. \quad (2.51)$$

Після підстановки і перетворення маємо систему різницевих рівнянь

$$3y_{i-1} - 4y_i + y_{i+1} = -20; \quad i = \overline{1; 4}, \quad (2.52)$$

або докладніше:

$$\begin{aligned} 3y_0 - 4y_1 + y_2 &= -20, \\ 3y_1 - 4y_2 + y_3 &= -20, \\ 3y_2 - 4y_3 + y_4 &= -20, \\ 3y_3 - 4y_4 + y_5 &= -20. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Усього точок – 6, відомих – 2, рівнянь – 4, невідомих – 4. Вирішуючи (2.53) з урахуванням  $y_0=40$ ,  $y_5=30$ , одержуємо:

|                   |           |       |       |       |        |           |
|-------------------|-----------|-------|-------|-------|--------|-----------|
| $i$               | 0         | 1     | 2     | 3     | 4      | 5         |
| $x$               | 0         | 10    | 20    | 30    | 40     | 50        |
| $y_{\text{ДПК}}$  | <b>40</b> | 49,5  | 58,2  | 63,55 | 60,17  | <b>30</b> |
| $\Delta^2 y$      | -         | -0,98 | -2,99 | -8,91 | -26,79 | -         |
| $y_{\text{теор}}$ | <b>40</b> | 49,3  | 57,4  | 62,23 | 58,19  | <b>30</b> |

Одержали опуклу ДПК, у чому неважко переконатися за знаками других різниць.

Якщо проінтегрувати задане диференціальне рівняння, то одержимо з урахуванням  $y_0=40$ ,  $y_5=30$  рівняння кривої, на якій повинна бути розташована побудована нами ДПК

$$y = 40,407 - 0,407 \cdot e^{0,1x} + x. \quad (2.54)$$

Побудуємо на ній точковий ряд при  $x=0;10;\dots;50$  і порівняємо з ро-

зташованою поруч ДПК (див. у таблиці рядок  $y_{теор}$ ).

Максимальна відносна похибка  $\delta$  відповідає точці 4 і дорівнює  $\delta = \frac{60,17 - 58,19}{60,17} = 0,0329$ , тобто близько 3%, що цілком припустимо для інженерних розрахунків.

Помітимо, що методика заміни похідних їхніми скінченно-різницевиими аналогами (2.51) і одержання системи різницевих рівнянь (2.52) з наступним їхнім розв'язанням є предметом дослідження в теорії різницевих рівнянь. Раніше (див. п.1.6) ми вже розглядали загальні риси теорії лінійних різницевих рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Викладені вище різні підходи і прийоми дозволяють реалізувати практично багато вимог при формоутворенні ДПК. Однак, одна задача, що має важливе практичне значення, для свого розв'язання вимагає окремого підходу. Це задача побудови рівноланкової ДПК, інцидентної заданим точкам. Розглянемо її докладніше. Нехай на ділянці  $AB$  (рис.2.36) треба побудувати точку 1 опуклої ДПК, щоб ланки  $A1$  і  $1B$  були однакові.

Щоб ланки  $A1$  і  $1B$  були однакові, необхідно, щоб т.1 розташовувала-

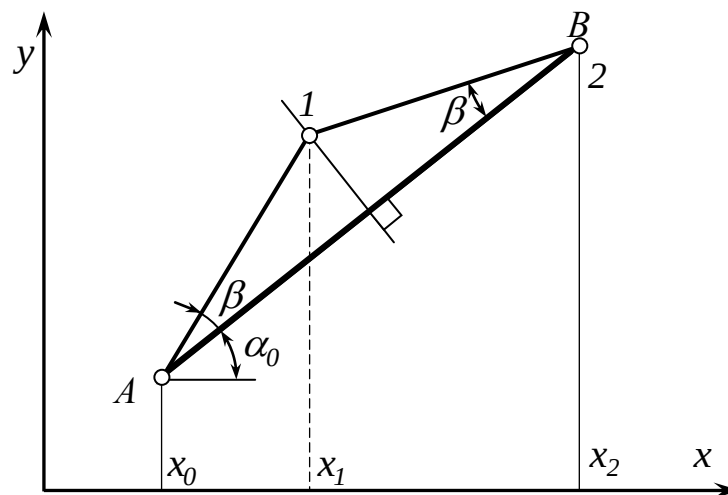


Рисунок 2.36 – Рівноланкова ДПК  $A1B$

ся на медіатрисі (серединному перпендикулярі) відрізка  $AB$ . У такій постановці задача має однопараметричну множину розв'язків, обумовлену положенням т.1 на медіатрисі. Конкретний розв'язок можна вибрати, фіксуючи кут  $\beta$  між новою і старою ланками ламаної, що виходять з т.  $A$ . Очевидно, що при вершині  $B$  буде такий же кут  $\beta$ . Тоді

$$[AB] = 2l \cdot \cos \beta, \quad (2.55)$$

де  $l$  – довжина ланки, що отрималась у результаті вибору кута  $\beta$ ,  $[AB]$  – довжина ланки  $AB$ .

Звідси

$$l = \frac{[AB]}{2 \cos \beta}; \quad (2.56)$$

Координати точки 1 дорівнюють

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + l \cdot \cos(\alpha_0 + \beta); \\ y_1 &= y_0 + l \cdot \sin(\alpha_0 + \beta); \end{aligned} \quad (2.57)$$

Розглянемо тепер випадок, коли на ланці  $BC$  (рис 2.37) необхідно побудувати триланкову ДПК.

За умовою задачі повинно бути  $[B3]=[34]=[4C]=l$ . Для опуклої ДПК очевидно, що побудований тристоронник повинен бути симетричний відносно медіатриси ланки  $BC$ . Це значить, що кути при вершинах  $B$  і  $C$  дорівнюють  $\beta'$ .

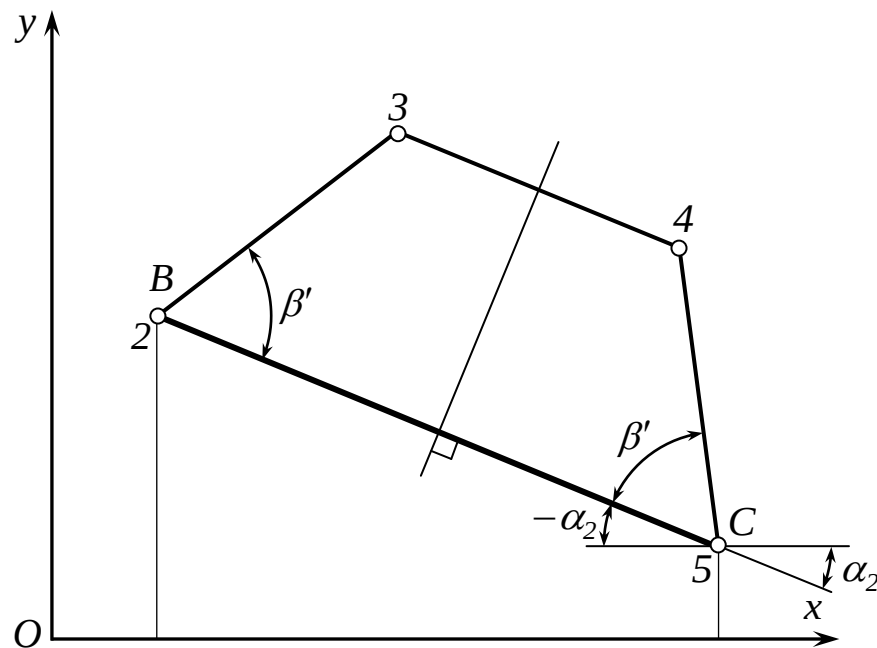


Рисунок 2.37 – Рівноланкова ДПК  $B34C$

Тоді

$$[BC] = l(1 + 2\cos\beta'). \quad (2.58)$$

Звідси

$$l = \frac{[BC]}{1 + 2\cos\beta'}. \quad (2.59)$$

Координати проміжних точок

$$x_3 = x_2 + l \cdot \cos(\alpha_2 + \beta'); \quad (2.60)$$

$$y_3 = y_2 + l \cdot \sin(\alpha_2 + \beta');$$

$$x_4 = x_5 - l \cdot \cos(\alpha_2 - \beta'); \quad (2.61)$$

$$y_4 = y_5 - l \cdot \sin(\alpha_2 - \beta');$$

З'єднаємо тепер дві схеми рис.2.36 і рис.2.37.

**Задача 9.** Через задані 3 точки:  $A(x_0 = 10, y_0 = 10)$ ,  $B(x_2 = 30, y_2 = 80)$ ,  $C(x_5 = 100, y_5 = 20)$  побудувати рівноланкову ДПК із т.1 на інтервалі  $AB$  і точками 3 і 4 на інтервалі  $BC$ .

Для того, щоб на всьому інтервалі  $ABC$  побудувати рівноланкову ланку, треба виконати умову, щоб  $l$  з (2.56) дорівнювало  $l$  з (2.59), тобто

$$\frac{[AB]}{2\cos\beta} = \frac{[BC]}{1+2\cos\beta'} \quad (2.62)$$

У рівнянні (2.62) невідомі кути  $\beta$  і  $\beta'$ . Завдання одного з них визначає другий. У цьому і складається суть розв'язання.

Визначаємо довжини ланок  $AB$  і  $BC$ :

$$[AB] = \sqrt{(30-10)^2 + (80-10)^2} = 72,80,$$

$$[BC] = \sqrt{(100-30)^2 + (20-80)^2} = 92,195.$$

Нехай  $\beta = 15^\circ$ ,  $\cos\beta = 0,9659$ . З (2.62) визначаємо  $\cos\beta'$  і сам кут  $\beta'$ .

$$\cos\beta' = \left( \frac{[BC] \cdot 2\cos\beta}{[AB]} - 1 \right) \cdot \frac{1}{2}; \quad (2.63)$$

$$\cos\beta' = \left( \frac{92,195 \cdot 2 \cdot 0,9659}{72,80} - 1 \right) \cdot \frac{1}{2} = 0,7231, \quad \beta' = 43,68^\circ.$$

З (2.56) визначаємо  $l$ :

$$l = \frac{[AB]}{2\cos\beta} = \frac{72,80}{2 \cdot 0,9659} = 37,685.$$

Визначаємо кути  $\alpha_0$  і  $\alpha_2$ :

$$\sin\alpha_0 = \frac{y_2 - y_0}{[AB]} = \frac{70}{72,8} = 0,9615; \quad \alpha_0 = 74^\circ,$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{y_5 - y_2}{[BC]} = \frac{-60}{92,195} = -0,6508; \quad \alpha_2 = -40,58^\circ.$$

Тепер визначаємо координати проміжних точок і результати заносимо в таблицю

| $i$ | 0         | 1       | 2         | 3       | 4       | 5          |
|-----|-----------|---------|-----------|---------|---------|------------|
| $x$ | <b>10</b> | 10,6595 | <b>30</b> | 67,6322 | 96,2202 | <b>100</b> |
| $y$ | <b>10</b> | 47,6775 | <b>80</b> | 82,0558 | 57,4966 | <b>20</b>  |

Абсолютна похибка довжин ланок побудованої ДПК не перевищує  $0,003\text{мм}$ . Графік ДПК зображений на рис.2.38.

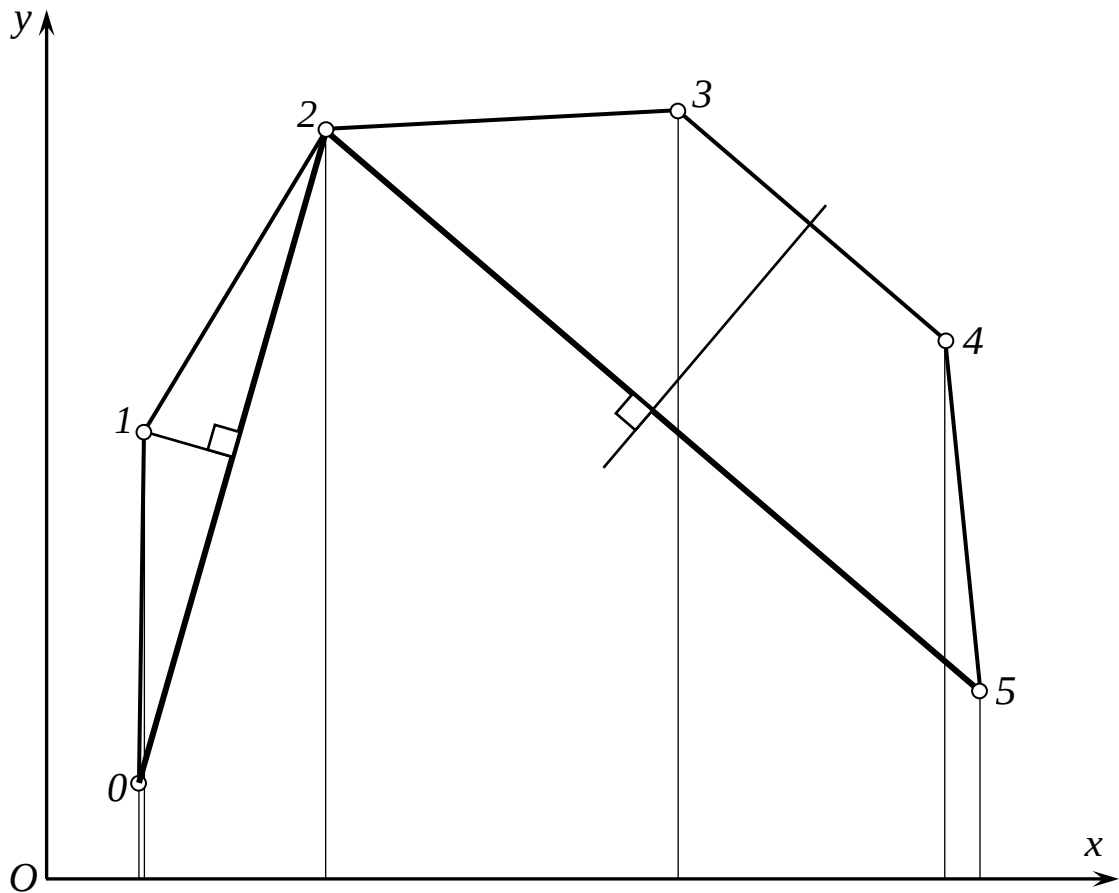


Рисунок 2.38 – Рівноланкова ДПК (Задача 9)

Очевидно, що запропоновану методику можна узагальнити на багатоланкові ламані, як у межах однієї ланки, так і протягом багатоточкової ДПК.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як треба розуміти формоутворення ДПК за заданими умовами?
2. Що таке різницеве рівняння, як воно виходить, як складається система різницевих рівнянь для формоутворення ДПК?
3. Що означає умова інцидентності і як вона відображається в розрахункових алгоритмах?
4. Як сформувати ДПК за заданими лінійними і кутовими параметрами?
5. У чому складається принцип керування формою ДПК? Що складає його математичну основу?
6. Як враховуються диференціально-геометричні умови при формоутворенні ДПК?
7. Що таке початкові, граничні умови?
8. Що таке рівноланкова ДПК і що складає основу її формування?

### РОЗДІЛ 3. ДИСКРЕТНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ДПК

Інтерполяція відіграє важливу роль у неперервному аналізі і є найбільш розвиненою частиною теорії відновлення функції за заданим дискретним набором її значень і характеристик (похідних, моментів, кривин і т.п.). Ми вже згадували про інтерполяційні поліноми Лагранжа і Ньютона, як найбільш прості функції, що дозволяють перейти від дискретної інформації у вигляді точок ряду на довільній сітці до неперервної.

Є інша точка зору на поняття інтерполяції. Більш точний за значенням переклад цього терміна означає визначення значень функцій між (inter) заданими вузлами, заради чого, власне, і визначається інтерполяційний поліном. Виникає думка про те, щоб визначати проміжні значення функції, спираючись на внутрішню геометрію точкового ряду, не знаходячи рівняння інтерполяційного полінома. Такий підхід пов'язаний з певними труднощами в з'ясуванні характеристик внутрішньої геометрії і їхньому використанні при побудові проміжних точок (ми їх назвали *точками згущення*, а сам процес їх побудов-дискретною інтерполяцією або *згущенням*). Зате зазначені труднощі окупаються спрощенням розрахунків, їхньою локальністю, коли побудова даної точки згущення ніяк не впливає на інші точки ряду, запобіганням осциляції, неминучої при алгебраїчній інтерполяції поліномами високих степенів, можливістю корекції розв'язку. Множина методів згущення, розроблених ученими Мелітопольської школи, у повному обсязі вирішує проблему дискретної інтерполяції і дозволяє здійснювати їхні численні впровадження в різних галузях народного господарства. Ми розглянемо тільки основи запропонованих методів, їхні особливості, переваги і недоліки. Докладніше з розробленими методами можна ознайомитися у відповідних дисертаційних роботах у бібліотеці ТДАТА.

#### 3.1. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ЗГУЩЕННЯ ДПК

Згущення точкового ряду ДПК можна виконати багатьма способами. Найпростіше організовувати процес у такий спосіб: посередині кожного проміжку  $(x_i, x_{i+1})$  будується точка згущення з абсцисою  $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ , потім колишні точки і точки згущення перенумеровуються і згущення повторюється. При цьому потрібно враховувати, щоб точка згущення не приводила до випрямлення ділянки  $(x_i, x_{i+1})$  і не викликала осциляції згущеного ряду. Нагадуємо, що осциляція-це непередбачена зміна знака кривини ДПК на розглянутій ділянці. Знак кривини відповідає знаку другої скінченної чи поділеної різниці. Вимога відсутності осциляції полягає в тому, щоб знак другої різниці уздовж згущеного ряду не змінювався. Іншими словами, якщо ДПК до згущення була опуклою, то після згущення вона повинна залишитися опуклою, тобто в результаті згущення не повинні з'явитися увігнуті ділянки і ділянки перегину. Аналогічно для увігнутої ДПК. У результаті згущення вона повинна залишитися увігнутою. При такому неосцилюючому згущенні ДПК із ділянками перегину зазначені ділянки звужуються й уточнюються, врешті-

решт даючи можливість визначити точки перегину.

Розглянемо фрагмент деякої опуклої ДПК (рис. 3.1)

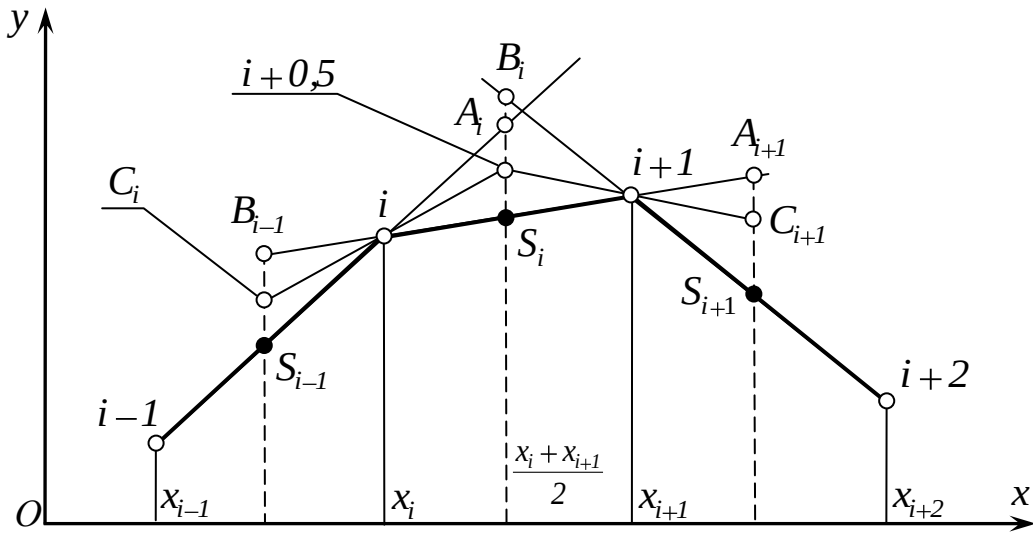


Рисунок 3.1 – Схема згущення ДПК

На ділянці  $(i, i+1)$  точка згущення  $(i+0,5)$ , щоб уникнути осциляції, повинна розташовуватися на відрізку згущення  $S_i A_i$ . Тут  $A_i$  і  $B_i$  – точки на продовженнях сусідніх ланок СЛЛ. Визначимо ординати цих точок.

$$\begin{aligned} y_{S_i} &= \frac{y_i + y_{i+1}}{2}; & y_{A_i} &= y_i + \frac{y_i + y_{i-1}}{2} = \frac{3y_i + y_{i-1}}{2}; \\ y_{B_i} &= y_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_{i+2}}{2} = \frac{3y_{i+1} - y_{i+2}}{2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Визначимо величини відрізків згущення  $S_i A_i$  і  $S_i B_i$ :

$$S_i A_i = y_{A_i} - y_{S_i} = -\frac{1}{2} \Delta^2 y_{i-1}; \quad (3.2)$$

$$S_i B_i = y_{B_i} - y_{S_i} = -\frac{1}{2} \Delta^2 y_i; \quad (3.3)$$

Очевидно, що

$$y_{S_i} < y_{i+0,5} < y_{S_i} + \min(S_i A_i, S_i B_i). \quad (3.4)$$

Для того, щоб вибрати точку  $(i+0,5)$  на відрізку  $S_i A_i$ , уведемо коефіцієнт вибору точки згущення  $\mu \in [0; 1]$

$$\mu = \frac{(i+0,5) S_i}{S_i A_i}, \quad (3.5)$$

так що

$$y_{i+0,5} = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} + \mu \cdot \min\left(\left|\frac{\Delta^2 y_{i-1}}{2}\right|, \left|\frac{\Delta^2 y_i}{2}\right|\right). \quad (3.6)$$



Це і є розрахункова формула для ординати точки згущення опуклої ДПК.

Звернемо увагу на те, що вибір точки  $\langle +0,5 \rangle$  впливає на вибір сусідніх точок згущення  $\langle -0,5 \rangle$  і  $\langle +1,5 \rangle$ , щоб не виникло осциляції у вузлових точках  $i$  і  $i+1$ . Зокрема, якщо вибрати точку згущення  $\langle +1,5 \rangle$  на відрізку  $A_{i+1}C_{i+1}$ , то у вузлі  $\langle +1 \rangle$  виникне осциляція. Тому для точки  $\langle +1,5 \rangle$  верхня межа повинна бути уточнена з урахуванням побудованої точки  $\langle +0,5 \rangle$ . Це буде т.  $C_{i+1}$ . Аналогічно для точки  $\langle -0,5 \rangle$  верхньою межею буде  $C_{i-1}$  замість  $B_{i-1}$ .

Умова відсутності осциляції у вузлі  $\langle +1 \rangle$ :

$$y_{i+0,5} - 2y_{i+1} + y_{i+1,5} < 0 \quad (3.7)$$

або для будь-якої точки ряду, крім першої й останньої

$$y_{i-0,5} + y_{i+0,5} < 2y_i, \quad i = \overline{1; n-1}. \quad (3.8)$$

Процес згущення здійснюється в такий спосіб:

1. Визначаються межі зміни  $y_{i+0,5}$ ,  $i = \overline{1; n-1}$ , згідно з (3.4).
2. На початковій ділянці вибирається точка  $y_{0,5}$ .
3. Уточнюються межі зміни точок згущення уздовж ряду з урахуванням обраного  $y_{0,5}$ .
4. Приймається деяке значення  $\mu = \overline{\mu}$ .
5. Розраховуються ординати точок згущення згідно з (3.6) з урахуванням уточнених меж.

Алгоритм згущення розглянемо на конкретному прикладі. Побудувати 1 крок згущення точкового ряду ДПК на рівномірній сітці з кроком  $h = 20 \text{ мм}$ , заданого таблицею ординат точок (рис. 3.2).

Розрахунок згущення

1. Визначаємо нижні межі  $S_i$  ординат  $y_{S_i}$  точок згущення згідно з (3.1).

Результати розрахунків зведені в таблицю 3.1.

2. Розраховуємо другі різниці:

$$\Delta^2 y_i = y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}, \quad i = \overline{1; n-2}. \quad (3.9)$$

3. Визначаємо довжини відрізків згущення, тобто  $\min \left( \left| \frac{\Delta^2 y_{i-1}}{2} \right|, \left| \frac{\Delta^2 y_i}{2} \right| \right)$ .
4. На початковій ділянці  $(0;1)$  довжина відрізка згущення  $S_0 B_0$  дорівнює  $0,5 \left| \Delta^2 y_0 \right|$ , на кінцевому  $(n-1; n)$  — дорівнює  $0,5 \left| \Delta^2 y_{n-2} \right|$ .

5. Приймаємо деяке значення  $\mu$  (наприклад,  $\mu = 0,3$  для всіх точок згущення).
6. Визначаємо точку  $y_{0,5}$

$$y_{0,5} = \frac{y_0 + y_1}{2} + 0,3 \cdot \left| \frac{\Delta^2 y_0}{2} \right| \quad (3.10)$$

$$y_{0,5} = \frac{30 + 74}{2} + 0,3 \cdot 11 = 55,3$$

7. Уточнюємо верхні межі точок згущення згідно з (3.8) з урахуванням розрахованого  $y_{0,5}$ .

$$y_{0,5} + y_{1,5} < 2y_1, \quad y_{1,5} < 2y_1 - y_{0,5}, \quad y_{1,5} < 2 \cdot 74 - 55,3 = 92,7$$

Верхня межа змінилася, замість 96 стала 92,7.

Згідно з (3.6) маємо

$$y_{1,5} = 85 + (92,7 - 85) \cdot 0,3 = 87,31.$$

Для точки  $y_{2,5}$  маємо:

$$y_{2,5} < 2y_2 - y_{1,5} = 2 \cdot 96 - 87,31 = 104,69.$$

Верхня межа не змінилася, вона дорівнює 104.

$$y_{2,5} = 93 + (104 - 93) \cdot 0,3 = 96,3.$$

Аналогічно для інших точок (див. табл. 3.1)

8. Розраховуємо другі різниці нового ряду:

$$\Delta^2 y_i = y_i - 2y_{i+0,5} + y_{i+1}, \quad i = \overline{0; n-1}, \quad (3.11)$$

$$\Delta^2 y_{i+0,5} = y_{i+0,5} - 2y_i + y_{i+1,5}, \quad i = \overline{0; n-2}. \quad (3.12)$$

Результати представимо в таблиці 3.2.

Таблиця 3.1 – Результати згущення ДПК

| $i$                                                                                                    | 0    | 1     | 2    | 3    | 4    | 5   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-------|------|------|------|-----|
| $x$                                                                                                    | 0    | 20    | 40   | 60   | 80   | 100 |
| $y$                                                                                                    | 30   | 74    | 96   | 90   | 62   | 16  |
| $y_S$                                                                                                  | 52   | 85    | 93   | 76   | 39   | -   |
| $\Delta^2 y$                                                                                           | -22  | -28   | -22  | -18  | -    | -   |
| $\min \left( \left  \frac{\Delta^2 y_{i-1}}{2} \right , \left  \frac{\Delta^2 y_i}{2} \right  \right)$ | +11  | +11   | +11  | +9   | +9   | -   |
| Верхня межа                                                                                            | 63   | 96    | 104  | 85   | 48   | -   |
| Уточнена межа                                                                                          | 63   | 92,7  | 104  | 85   | 48   | -   |
| $y_{i+0,5}$                                                                                            | 55,3 | 87,31 | 96,3 | 78,7 | 41,7 | -   |

Таблиця 3.2 – Другі різниці згущеного ряду

| $i$          | 0    | 0,5   | 1     | 1,5   | 2    | 2,5 | 3    | 3,5  | 4    | 4,5 |
|--------------|------|-------|-------|-------|------|-----|------|------|------|-----|
| $\Delta^2 y$ | -6,6 | -5,39 | -4,62 | -8,39 | -6,6 | -5  | -5,4 | -3,6 | -5,4 | -   |

Як бачимо по знаках різниць, згущений ряд опуклий, різниці не мають значних відхилень. Графік згущеної ДПК представлений на рис. 3.2.

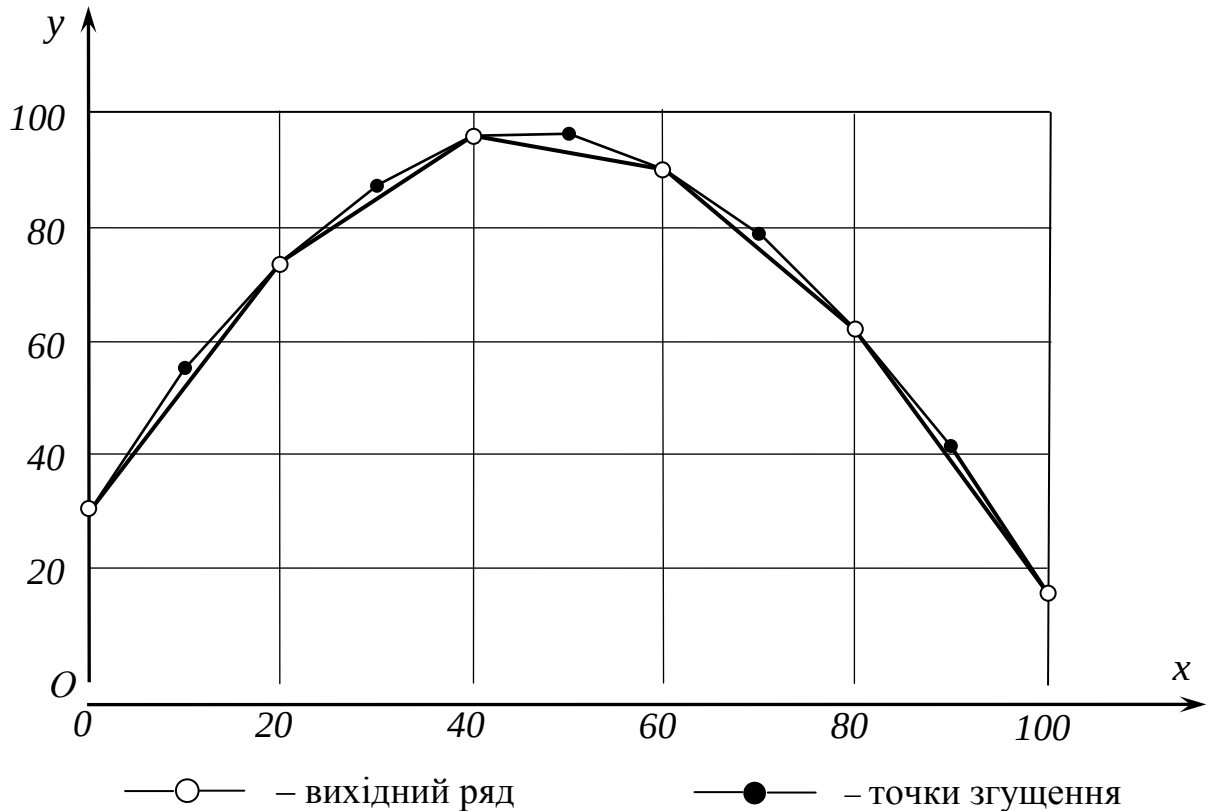


Рисунок 3.2 – Графік згущеної ДПК

Запропонований тут метод враховує геометричні співвідношення елементів ДПК, тому названий нами *методом згущення на основі геометричних співвідношень*. У нашому прикладі коефіцієнт  $\mu = \text{const} = 0,3$ . Очевидно, що, приймаючи його значення локально, можна коректувати точки згущення, домагаючись бажаного розподілу значень других різниць чи інших параметрів згущення. Крім того, збільшуючи  $0,3 < \mu = \text{const} < 1$ , можна побудувати ДПК, точки згущення якої будуть розташовані далі від стягуючих сусідніх точки хорд. ДПК буде більш “повною”. Або навпаки при зменшенні  $\mu$ .

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке дискретна інтерполяція й у чому її особливість?
2. Які вимоги пред'являються до розташування точки згущення?
3. У чому складається метод згущення на основі геометричних співвідношень?
4. Як визначається відрізок згущення в цьому методі?
5. Що таке коефіцієнт вибору точки згущення?

6. Де знаходиться точка згущення при  $\mu = 0$ , при  $\mu = 1$ ?
7. Яка умова відсутності осциляції у вузлах ДПК при згущенні?
8. Як досягається варіативність згущення в методі геометричних співвідношень?

### 3.2. МЕТОД ТОТОЖНОСТЕЙ ЗГУЩЕННЯ

У теорії інтерполяції широко застосовується поняття «центральної різниці»  $\delta$ . Це скінченні різниці, віднесені до середньої точки або середнього інтервалу для множини точок, що беруть участь у її визначенні. Наприклад, центральна різниця другого порядку в т.  $i$ :

$$\delta_i = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}, \quad i = \overline{1; n-1}. \quad (3.14)$$

Вона зручна тим, що її значення зв'язане з перевищенням  $m_i$  середньої точки ряду над хордою, що з'єднує сусідні з нею точки.

$$m_i = y_i - \frac{y_{i-1} + y_{i+1}}{2}. \quad (3.15)$$

Очевидно, що

$$\delta_i = -2m_i, \quad m_i = \frac{-\delta_i}{2}. \quad (3.16)$$

Надалі будемо позначати:  $\delta_i^0$  – центральна різниця в  $i$ -й точці до згущення (верхній індекс);  $\delta_i^1$  – центральна різниця в  $i$ -й точці після 1-го кроку згущення.

Розглянемо фрагмент деякої опуклої ДПК (рис. 3.3)

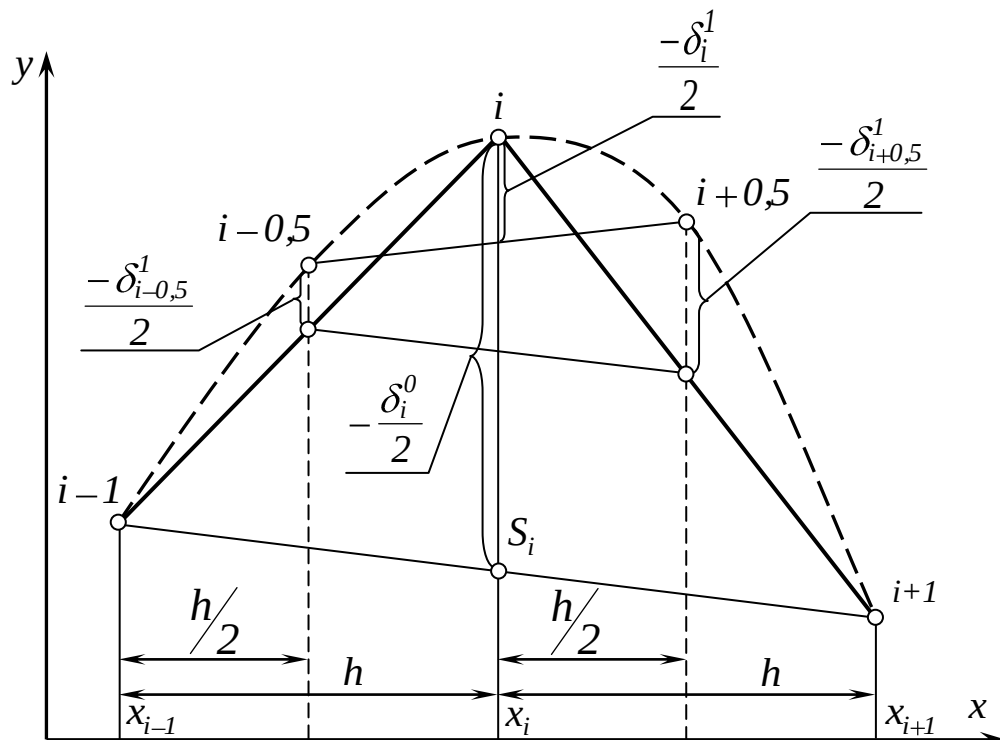


Рисунок 3.3 – До виведення тотожності згущення

Для заданої трійки точок  $i-1, i, i+1$  певним чином побудовані точки згущення  $i-0,5$  і  $i+0,5$ . Запишемо отримані при цьому центральні різниці:

$$\begin{aligned} y_{i-1} - 2y_{i-0,5} + y_i &= \delta_{i-0,5}^1, \\ y_{i-0,5} - 2y_i + y_{i+0,5} &= \delta_i^1, \\ y_i - 2y_{i+0,5} + y_{i+1} &= \delta_{i+0,5}^1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Виключимо з цієї системи невідомі  $y_{i-0,5}$  і  $y_{i+0,5}$ . Маємо (названу нами) *основну тотожність згущення*

$$\boxed{\delta_{i-0,5}^1 + 2\delta_i^1 + \delta_{i+0,5}^1 = \delta_i^0}, i = \overline{1; n-1}, \quad (3.18)$$

не залежну від способу згущення, номера точки і конфігурації точкового ряду.

Як видно з рис. 3.3, рівняння (3.18) можна було одержати геометричним шляхом. З урахуванням (3.16) можна одержати основну тотожність у перевищеннях  $m$

$$\boxed{m_{i-0,5}^1 + 2m_i^1 + m_{i+0,5}^1 = m_i^0} \quad (3.19)$$

Більш докладно система (3.18) має вигляд

$$\begin{aligned} \delta_{0,5}^1 + 2\delta_1^1 + \delta_{1,5}^1 &= \delta_1^0, \\ \delta_{1,5}^1 + 2\delta_2^1 + \delta_{2,5}^1 &= \delta_2^0, \\ &\dots\dots\dots \\ \delta_{n-1,5}^1 + 2\delta_{n-1}^1 + \delta_{n-0,5}^1 &= \delta_{n-1}^0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Вона містить  $(n-1)$  рівнянь і  $(2n-1)$  невідомих. Для одержання єдиного розв'язку треба накласти  $n$  умов. Різноманіття способів накладення зв'язків визначає множину способів згущення на основі (3.18) і (3.20). Найбільш розробленими є:

– спосіб  $\delta_{min}^1$

$$\delta_{i+0,5,min}^1 = \frac{1}{4} \delta_{min}^0, \quad \delta_{min}^0 = \begin{cases} \min_i \delta_i^0, \delta_i^0 > 0, \\ (-1) \min_i |\delta_i^0|, \delta_i^0 < 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Цей спосіб припускає у згущеного ряду центральні різниці однаковими у всіх точках згущення і такими, що дорівнюють  $\frac{1}{4} \delta_{min}^0$ . Він автоматично запобігає осциляції, дуже простий у розрахунках. Однак він не реагує на різну кривину ДПК і викликає асиметрію значень різниць у вузлі. Дійсно, якщо в (3.18) замість  $\delta_{i-0,5}^1$  і  $\delta_{i+0,5}^1$  підставити  $\frac{1}{4} \delta_{min}^0$ , то значення  $\delta_i^1$  може ви-

явитися в кілька разів більше сусідніх з ним значень  $\delta_{i-0,5}^1$  і  $\delta_{i+0,5}^1$ . Метод варто застосовувати тоді, коли розкид значень  $\delta_i^0$  вихідного ряду невеликий;

– спосіб  $\delta_{cp}$ .

$$\delta_{i+0,5,cr}^1 = \frac{1}{8} (\delta_i^0 + \delta_{i+1}^0). \quad (3.22)$$

Спосіб володіє простотою реалізації і відслідковує зміну кривини ДПК. Недоліком може бути те, що всі значення  $\delta_{i+0,5,cr}^1$  визначаються детерміновано, немає можливості корекції розв'язку. Така можливість з'являється, коли (3.18) визначеними співвідношеннями переводиться в різницеву схему, тобто систему різницевих рівнянь, де число рівнянь менше числа невідомих на стільки, який порядок схеми. Раніше ми вже знайомилися з такими схемами (див. системи різницевих рівнянь табл. 1.3). Розглянемо ці можливості.

– спосіб  $\delta_i^1 = \delta_{i+0,5}^1$ . Тоді з (3.18)

$$\delta_{i-0,5}^1 + 3\delta_{i+0,5}^1 = \delta_i^0, \quad i = \overline{1; n-1}. \quad (3.23)$$

Це різницева схема 1-го порядку. Досить задати одне значення, наприклад,  $\delta_{0,5}^1$ , як всі інші визначаються однозначно з (3.23). Важливою властивістю цієї схеми є її *стійкість* до похибок вхідних даних і тих, що з'являються при розрахунках. Дійсно, якщо при розрахунку  $\delta_{i-0,5}^1$  допущена похибка  $\Delta$ , то при розрахунку  $\delta_{i+0,5}^1 = \frac{1}{3} (\delta_i^0 - \delta_{i-0,5}^1)$  вона зменшується в 3 рази, на наступному кроці – ще в 3 рази і т.д.

– спосіб  $\delta_{i-0,5}^1 = \delta_i^1$ . Тоді маємо іншу схему

$$3\delta_{i-0,5}^1 + \delta_{i+0,5}^1 = \delta_i^0, \quad i = \overline{1; n-1} \quad (3.24)$$

Щоб не накопичувалися похибки, схему (3.24) треба розраховувати в зворотному порядку, тобто задавати початкове значення  $\delta_{n-0,5}^1$  і з останньої

рівності системи визначати  $\delta_{n-1,5}^1 = \frac{1}{3} (\delta_{n-1}^0 - \delta_{n-0,5}^1)$ , що, також як і в (3.23), не веде до накопичення похибки. Очевидно, що результати при розв'язанні системами (3.23) і (3.24) будуть різними. І в тій, і в іншій системі *корекція розв'язку* досягається варіацією (змінною) початкового значення (у (3.23) – це  $\delta_{0,5}^1$ , у (3.24) – це  $\delta_{n-0,5}^1$ ).

Більш гнучким є наступний спосіб

– спосіб  $\delta_i^1 = \frac{1}{2} (\delta_{i-0,5}^1 + \delta_{i+0,5}^1)$ . (3.25)

Тоді маємо систему

$$\delta_{i-0,5}^1 + \delta_{i+0,5}^1 = \frac{1}{2} \delta_i^0, \quad i = \overline{1; n-1}. \quad (3.26)$$

Очевидно, що у вузлах згущеного ряду значення  $\delta_i^1$  розраховуються однозначно

$$\delta_i^1 = \frac{1}{4} \delta_i^0, \quad i = \overline{1; n-1}, \quad (3.27)$$

а в точках згущення можуть регулюватися відповідно до (3.26).

Розглянемо розв'язання тестової задачі (таблиця 3.1). Перепишемо таблицю вихідних даних відповідно до позначень центральних різниць.

Таблиця 3.3 – Згущення ДПК методом тотожностей (система (3.26)).

|            |           |      |           |     |           |     |           |      |           |     |           |
|------------|-----------|------|-----------|-----|-----------|-----|-----------|------|-----------|-----|-----------|
| $i$        | 0         | 0,5  | 1         | 1,5 | 2         | 2,5 | 3         | 3,5  | 4         | 4,5 | 5         |
| $x$        | 0         | 10   | 20        | 30  | 40        | 50  | 60        | 70   | 80        | 90  | 100       |
| $y$        | 30        | –    | 74        | –   | 96        | –   | 90        | –    | 62        | –   | 16        |
| $\delta^0$ | –         | –    | -22       | –   | -28       | –   | -22       | –    | -18       | –   | –         |
| $\delta^1$ | –         | -5   | -5,5      | -6  | -7        | -8  | -5,5      | -3   | -4,5      | -6  | –         |
| $U_{згущ}$ | <u>30</u> | 54,5 | <u>74</u> | 88  | <u>96</u> | 97  | <u>90</u> | 77,5 | <u>62</u> | 42  | <u>16</u> |

Для розв'язання задачі застосуємо схему (3.26) на основі вибору значення керуючого параметра  $\delta_{0,5}$  з метою корекції згущеної ДПК і запобігання осциляції.

Запишемо систему (3.26):

$$\begin{aligned} \delta_{0,5}^1 + \delta_{1,5}^1 &= -11, \\ \delta_{1,5}^1 + \delta_{2,5}^1 &= -14, \\ \delta_{2,5}^1 + \delta_{3,5}^1 &= -11, \\ \delta_{3,5}^1 + \delta_{4,5}^1 &= -9. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Виразимо усі  $\delta_{i+0,5}^1$  через один *керуючий параметр*  $\delta_{0,5}^1$ .

Поставимо умову, щоб вони мали від'ємні значення, і знайдемо відрізок вибору  $\delta_{0,5}^1$ .

$$\begin{aligned}
&\delta_{0,5}^1 < 0, \\
&\delta_{1,5}^1 = -11 - \delta_{0,5}^1 < 0, \quad \delta_{0,5}^1 > -11, \\
&\delta_{2,5}^1 = -3 + \delta_{0,5}^1 < 0, \quad \delta_{0,5}^1 < 3, \\
&\delta_{3,5}^1 = -8 - \delta_{0,5}^1 < 0, \quad \delta_{0,5}^1 > -8, \\
&\delta_{4,5}^1 = -1 + \delta_{0,5}^1 < 0, \quad \delta_{0,5}^1 < 1.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

З огляду на те, що  $\delta_{0,5}^1 < 0$ , маємо відрізок вибору значення  $\delta_{0,5}^1$ , що гарантує відсутність осциляції:

$$-8 < \delta_{0,5}^1 < 0. \tag{3.30}$$

Нехай  $\delta_{0,5}^1 = -5$ . Тоді з (3.29) маємо

$$\delta_{1,5}^1 = -11 + 5 = -6, \quad \delta_{2,5}^1 = -8, \quad \delta_{3,5}^1 = -3, \quad \delta_{4,5}^1 = -6.$$

Після цього можна розрахувати ординати точок згущення за формулою

$$y_{i+0,5} = \frac{1}{2} (y_i + y_{i+1} - \delta_{i+0,5}^1). \tag{3.31}$$

Результати зведені в таблицю 3.3. Як бачимо, результати близькі до отриманих в таблиці 3.1. Простота розрахунку і можливість корекції вибором  $\delta_{0,5}^1$  з відрізка (3.30) роблять спосіб перспективним.

Відомі інші реалізації методу, з ними можна познайомитися в дисертаційних роботах і статтях учених ТДАТА. Ми переконані, що подальші дослідження методу тотожностей обіцяють дати обнадійливі результати.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Запишіть основну тотожність згущення в термінах різниць, у термінах перевищень.
2. У чому складається розв'язання системи рівнянь, отриманої з основної тотожності?
3. Які Ви знаєте способи розв'язання системи тотожностей?
4. Як перейти від системи тотожностей до різницевої схеми?
5. Яка різницева схема називається стійкою? Приведіть приклад.
6. У чому суть корекції згущеної ДПК на основі керуючого параметра? Як вибирається його значення?



### 3.3. МЕТОД БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ

Метод базисних функцій є найпростішим і легко реалізованим методом згущення. Виходячи з заданої точності наближення й інших вимог моделювання, вибирається базисна функція інтерполяції, припустимо алгебраїчний поліном 3-го порядку, обумовлений 4-ма точками. Через обрані 4 точки  $y_{i-1}$ ,  $y_i$ ,  $y_{i+1}$ ,  $y_{i+2}$  (там, де потрібно виконати згущення) проводиться вказаний поліном (рис.3.4) і розраховується приналежна йому середня точка  $y_{i+0,5}$  за формулою

$$y_{i+0,5} = \frac{+1}{16} \left[ y_{i-1} + 9y_i + 9y_{i+1} - y_{i+2} \right], \quad i=1; \overline{n-2}. \quad (3.33)$$

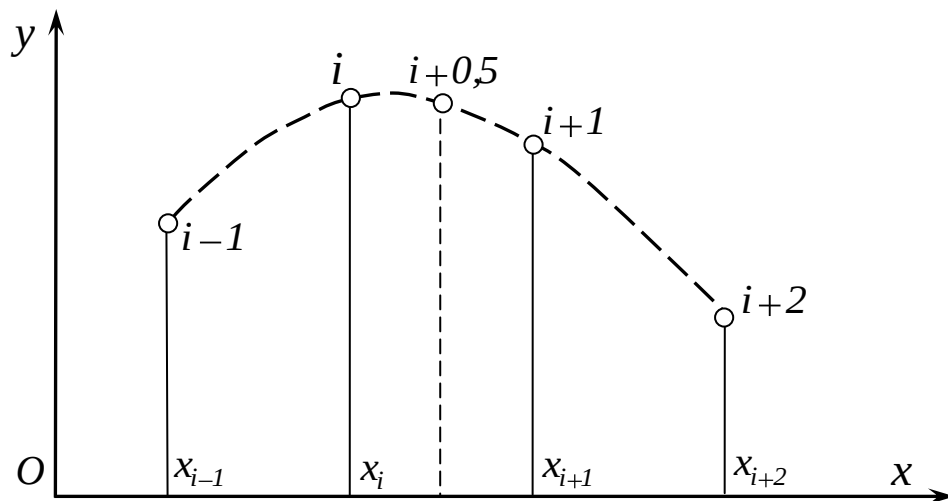


Рисунок 3.4 – Схема згущення за допомогою 3-полінома

Далі проводиться зрушення на 1 інтервал вправо чи вліво й аналогічно розраховується наступна точка згущення на основі наступної четвірки точок. Помітимо, що ця четвірка має з попередньою четвіркою 3 спільні точки, забезпечуючи в такий спосіб тісне ув'язування геометричних параметрів сусідніх ділянок. Але сусідня точка згущення  $y_{i+1,5}$  належить іншому 3-поліному, ніж точка  $y_{i+0,5}$ . Більш того, доведено, що будь-які п'ять підряд розташовані точки згущеного ряду не належать одному 3-поліному. Це можливо тільки тоді, коли вузлові точки вихідного ряду розташовані на одному 3-поліномі.

Поліном, використаний для побудови точки згущення  $i+0,5$ , названий нами *базисним поліномом*. Очевидно, що як базисні функції можна застосовувати не тільки поліноми і не тільки алгебраїчні. Тому метод названий *методом базисних функцій*.

З теорії інтерполяції відомо, що мінімальна похибка має місце приблизно посередині середнього проміжку  $(i, i+1)$ . Саме там і будується точка згущення  $(i+0,5)$ . Очевидно, що число проміжків (щоб похибка у точці згущення була мінімальною) повинне бути непарним. Звідси: степінь алгебраїчного полінома повинна бути непарною. Звичайно, можна застосовувати і поліном парного степеня, але тоді точка згущення буде розташована не на середній ділянці (її просто немає) і умова мінімуму похибки не буде витримана.

При необхідності більш щільного згущення на наступному кроці точки перенумеруються й алгоритм згущення повторюється.

Помітимо, що формула (3.33) не дає можливості визначити точки згущення на відрізках  $(x_0, x_1)$  і  $(x_{n-1}, x_n)$ . Можна погодитися, що точка  $y_{0,5}$  будується на поліномі, обумовленому 4-ма початковими точками  $y_0, y_1, y_2, y_3$  (звичайно, похибка при цьому не мінімальна, вона більше, ніж у точки  $y_{1,5}$  на цьому ж поліномі). Тоді

$$y_{0,5} = \frac{1}{16} (y_0 + 15y_1 - 5y_2 + y_3). \quad (3.34)$$

Аналогічно

$$y_{n-0,5} = \frac{1}{16} (y_{n-3} - 5y_{n-2} + 15y_{n-1} - y_n). \quad (3.35)$$

Різноманіття розрахункових формул визначається множиною базисних функцій і їхніх параметрів.

Недоліками методу є детермінованість згущення, відсутність вибору, а, отже, і корекції розв'язку. Для запобігання осциляції треба вживати заходів, що виходять за рамки методу.

Як приклад, розрахуємо 1 крок згущення тестової ДПК, розглянутої в попередніх підрозділах. Результати розрахунків зведені в таблицю 3.4.

Таблиця 3.4 – Згущення ДПК за допомогою 3-полінома.

| $i$        | 0         | 0,5   | 1         | 1,5   | 2         | 2,5   | 3         | 3,5  | 4         | 4,5 | 5         |
|------------|-----------|-------|-----------|-------|-----------|-------|-----------|------|-----------|-----|-----------|
| $x$        | 0         | 10    | 20        | 30    | 40        | 50    | 60        | 70   | 80        | 90  | 100       |
| $y$        | 30        | -     | 74        | -     | 96        | -     | 90        | -    | 62        | -   | 16        |
| $y_{згущ}$ | <b>30</b> | 54,37 | <b>74</b> | 88,12 | <b>96</b> | 96,12 | <b>90</b> | 78,5 | <b>62</b> | 41  | <b>16</b> |
| $\delta$   | -         | -4,35 | -5,7      | -6,25 | -7,75     | -6,25 | -5,37     | -5   | -4,5      | -4  | -         |

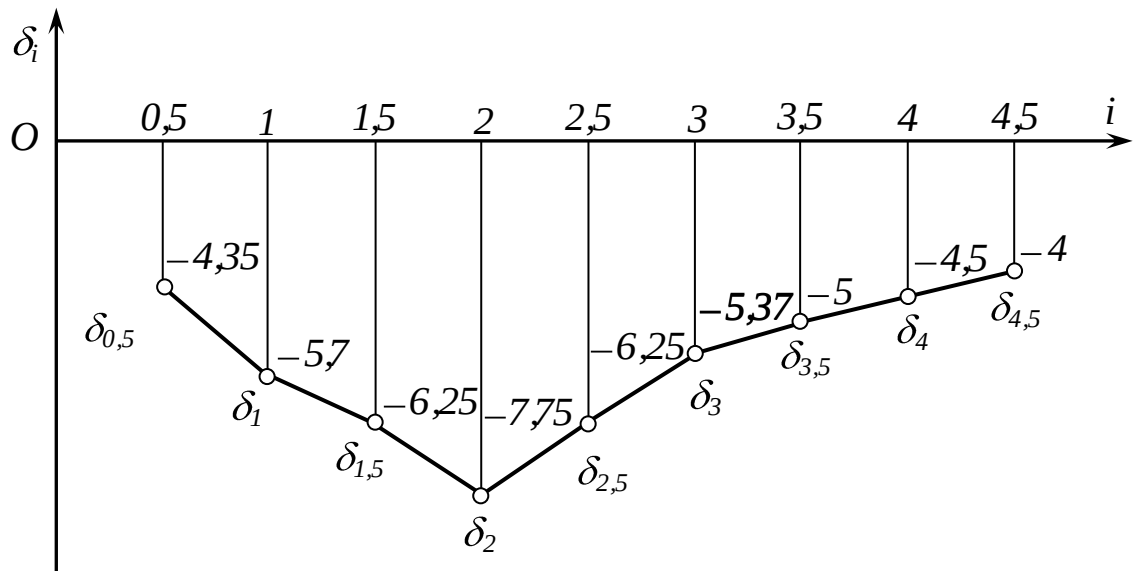


Рисунок 3.5 – Графік залежності  $\delta_i$

Розрахунок других різниць згущеного ряду показав, що згущена ДПК-опукла, а розподіл значень других різниць є більш закономірним у порівнянні з раніше виконаними згущеннями (див. табл. 3.1 і 3.3). Це забезпечено саме зв'язком сусідніх четвірок точок, описаним вище. Графік залежності  $\delta_i$  представлений на рис.3.5.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому суть методу базисних функцій?
2. Як вибирається базисний поліном?
3. Чому точка згущення розраховується посередині відрізка визначення полінома?
4. У чому переваги і недоліки базисних функцій?

### 3.4. ЗГУЩЕННЯ НА ОСНОВІ КУТОВИХ ПАРАМЕТРІВ

#### 3.4.1. ОСНОВНА ТОТОЖНІСТЬ ЗГУЩЕННЯ

Приймемо схему згущення відповідно до рис.3.6, де точки згущення будуються на серединних перпендикулярах до відповідних ланок СЛЛ вихідної ДПК. Зіставлення кутів суміжності в околі кута  $i$  приводить до основної тотожності згущення на основі кутів суміжності:

$$\gamma_{i-0,5}^1 + 2\gamma_i^1 + \gamma_{i+0,5}^1 = 2\gamma_i^0, \quad i = \overline{1; n-1}. \quad (3.36)$$

Система (3.36) має  $(n-1)$  рівнянь з  $(2n-1)$  невідомими. Отже для одержання єдиного розв'язку необхідно задати  $n$  умов. Помітимо, що система (3.36) не є різницевою схемою 2-го порядку, оскільки відсутні проміжні рівняння, що зв'язують кути суміжності ланок СЛЛ згущеної ДПК у двох сусідніх вузлових точках  $\gamma_i^1$  і в точці згущення  $\gamma_{i+0,5}^1$  між ними. Додаткової інформації про складання таких рівнянь немає. Тому необхідно шукати інші шляхи розв'язання системи (3.36), зокрема, накладенням додаткових умов на співвідношення між кутами  $\gamma^1$ . При реальному проектуванні краще залишити один параметр вільним для керування формою ДПК при згущенні.

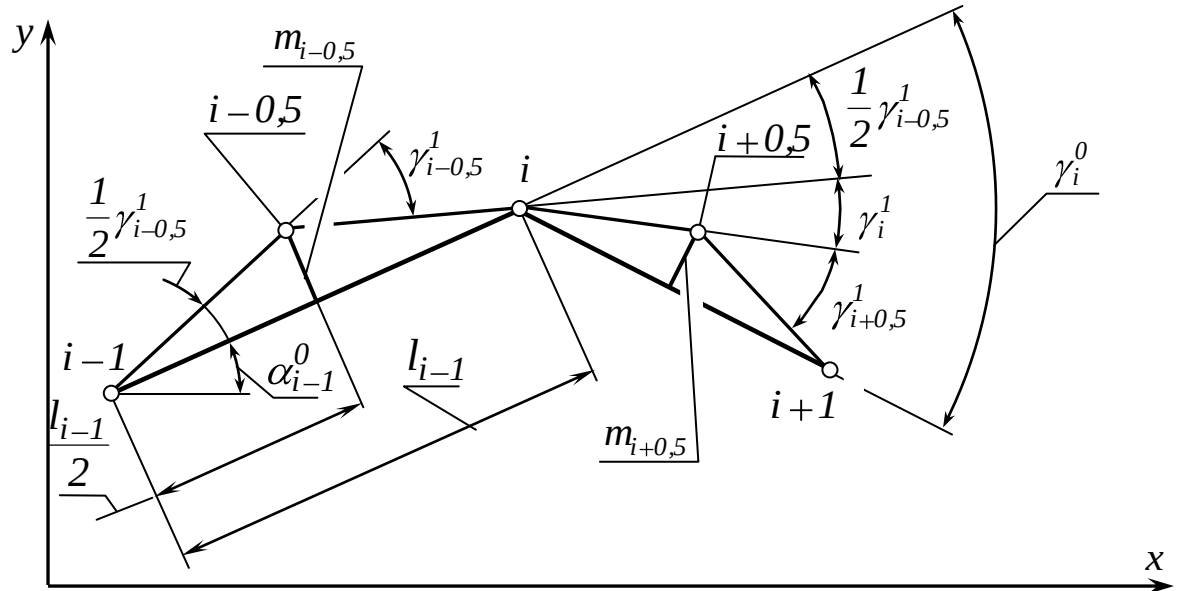


Рисунок 3.6 – Згущення на основі серединних перпендикулярів

Основний алгоритм згущення ДПК на основі серединних перпендикулярів полягає в наступному:

1. Розраховуються кути суміжності  $\gamma_{i-0,5}^1, i = \overline{1; n}$ , ланок згущеної ДПК. Умовою опуклості згущеної ДПК є дотримання нерівностей

$$\gamma_{i-0,5}^1 < 0, \quad i = \overline{1;n}.$$

2. Визначаються довжини ланок вихідної СЛЛ:

$$l_{i-1} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}; \quad i = \overline{1;n}. \quad (3.37)$$

3. Знаходяться перевищення точок згущення над відповідними хордами:

$$m_{i-0,5}^1 = \frac{-1}{2} l_{i-1} \operatorname{tg} \frac{\gamma_{i-0,5}^1}{2}, \quad i = \overline{1;n}. \quad (3.38)$$

4. Визначаються координати точок згущення:

$$\begin{aligned} x_{i-0,5} &= \frac{x_i + x_{i-1}}{2} - m_{i-0,5}^1 \sin \alpha_{i-1}^0, \\ y_{i-0,5} &= \frac{y_i + y_{i-1}}{2} + m_{i-0,5}^1 \cos \alpha_{i-1}^0, \quad i = \overline{1;n} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Переваги запропонованої схеми згущення неоднозначних ДПК полягають у наступному:

- у максимальній мірі використовуються геометричні параметри вихідної ДПК, оскільки в розрахунках беруть участь довжини ланок  $l_i$ , їхнє положення щодо осей координат (кути  $\alpha_i$ ) і взаємне розташування (кути  $\gamma_i$ );
- на параметри згущення і взаємне розташування точок не накладається ніяких додаткових обмежень, крім умови опуклості точок вихідної ДПК;
- розрахунки спираються на основну тотожність згущення (3.36), що має дуже просту форму і великі можливості в накладенні додаткових умов;
- широка варіація початкових умов при одночасному дотриманні умов опуклості згущеної ДПК;
- схема легко реалізується простими геометричними побудовами;
- процес згущення можна провести локально з урахуванням кривини вихідної ДПК, тобто на ділянках з більшою кривиною можна виконати більше кроків згущення в порівнянні з ділянками з меншою кривиною. При цьому, критерієм закінчення згущення на даній ділянці є досягнення для перевищення  $m_{i-0,5}^1$  (на  $k$ -му кроці згущення) значення  $|m_{i-0,5}^1| \leq \varepsilon$ , де  $\varepsilon \geq 0$  - як завгодно мале наперед задане число. По досягненні цієї умови точки згущеної ДПК з'єднуються відрізками СЛЛ, що і вважається остаточною формою кривої, що інтерполуює. Для побудови довільної точки цієї кривої при  $X = \bar{X}$  визначаємо інтервал  $X_p < \bar{X} < X_{p+1}$  у який укладається задане зна-

чення  $X = \bar{X}$  і розраховуємо значення ординати  $\bar{y}$  точки згущення з умови її приналежності до ланки  $[p, p+1]$  СЛЛ згущеної ДПК

$$\bar{y} = \frac{y_{p+1} - y_p}{x_{p+1} - x_p} (\bar{x} - x_p) + y_p. \quad (3.40)$$

Аналогічно розраховується абсциса  $\bar{x}$  точки згущення, якщо задана її ордината  $y = \bar{y}$ .

Розглянемо докладніше розрахунок кутів суміжності згущеної ДПК на підставі накладення додаткових співвідношень між кутами суміжності в то-тожності (3.36).

Можна запропонувати різні варіанти.

Найбільш простими з них є наступні:

- вибір  $\gamma_{min}^1$  мінімального з усіх можливих для того, щоб усі кути суміжності ланок у точках згущення прийняти рівними знайденому  $\gamma_{min}^1$ . При цьому

$$\gamma_{min}^1 = \frac{1}{2} \gamma_{min}^0, \text{ де } \gamma_{min}^0 = \begin{cases} \min_i \gamma_i^0, & \gamma_i^0 > 0; \\ -1 \cdot \min_i |\gamma_i^0|, & \gamma_i^0 < 0; \end{cases} \quad (3.41)$$

- вибір  $\gamma_{opt}^1$  з умов

$$\gamma_{i-0,5,opt}^1 = \frac{1}{2} \gamma_{opt}^0, \text{ де } \gamma_{opt}^0 = \begin{cases} \min_i \gamma_{i-1}^0, \gamma_i^0, & \gamma_i^0 > 0, \\ -1 \cdot \min_i |\gamma_{i-1}^0|, |\gamma_i^0|, & \gamma_i^0 < 0, \end{cases} \quad (3.42)$$

так що кут суміжності в точках згущення приймається рівним половині меншого з кутів суміжності ланок СЛЛ вихідної ДПК у сусідніх вузлах, що примикають до точки згущення.

Очевидно, що при такій організації обчислювального процесу жодне з рівнянь системи (3.36) не буде порушено, оскільки верхньою межею значення кута суміжності у вузловій точці, коли ще не можлива осциляція, є  $\gamma_i^1 = 0$ . Тоді  $\gamma_{i+0,5}^1$  або  $\gamma_{i-0,5}^1$  виявиться рівним  $\gamma_i^0$ , що неможливо ні в (3.41), ні в (3.42). Отже, усі значення кутів суміжності СЛЛ згущеної ДПК

будуть від'ємними, що гарантує відсутність її осциляції при побудові згущення як тим, так і іншим способом.

Розглянемо їх по черзі.

Алгоритм розрахунку точок згущення способом  $\gamma_{min}$  полягає в наступному:

1. Визначаються кути нахилу  $\alpha_i^0$  ланок СЛЛ вихідної ДПК

$$\alpha_i^0 = \arcsin \frac{y_{i+1} - y_i}{l_{i+1}}, \quad i = \overline{0; n-1}. \quad (3.43)$$

2. Розраховуємо кути суміжності  $\gamma_i^0$  вихідної ДПК за формулою

$$\gamma_i^0 = \alpha_i^0 - \alpha_{i-1}^0, \quad i = \overline{1; n-1} \quad (3.44)$$

3. З множини кутів  $\gamma_i^0$  вибирається мінімальний  $|\gamma_{min}^0|$  за модулем

$$\gamma_{min}^0 = \min \left\{ \gamma_i^0 \right\} \quad (3.45)$$

На підставі  $\gamma_{min}^0$  розраховується, згідно з (3.41), значення  $\gamma_{min}^1$  для всіх точок згущення.

4. Використовуючи формули (3.37), (3.38), (3.39), визначаються послідовно довжини  $l_{i-1}$  ланок СЛЛ, перевищення  $m_{i-0,5}^1$ , де  $\gamma_{i-0,5}^1 = \gamma_{min}^1$ , і координати  $x_{i-0,5}$  і  $y_{i-0,5}$  точок згущення.

При необхідності продовження згущення точки ряду перенумеровуються і розрахунок повторюється до досягнення умови  $m_{i-0,5}^1 \leq \varepsilon$ .

Перевагами способу  $\gamma_{min}$  є:

- автоматичне дотримання умови опуклості згущеної ДПК;
- простота розрахунків;
- висока точність, унаслідок незалежності розрахункових формул згущення від значень  $\gamma_i^0$  вихідної ДПК.

Недоліком способу є поява стрибків кривини згущеної ДПК у точках, що є вузлами вихідної ДПК, оскільки внаслідок малості значення  $\gamma_{min}^1$  на кожній з ділянок згущення відбувається його “випрямлення”. При наявності якої-небудь трійки послідовно розташованих на одній прямій точок, ав-

томатично виконується умова  $\gamma_{min}^1 = 0$  і згущена ДПК стає супровідною ламаною лінією вихідної ДПК.

Тому спосіб  $\gamma_{min}$  найбільш ефективний тоді, коли множина значень  $\gamma_i^0$  має невеликий розкид, а  $\gamma_{min}^0 \neq 0$ .

Дискретна інтерполяція відповідно до способу  $\gamma_{opt}^1$  здійснюється у відповідності з наступним алгоритмом:

Пункти 1 і 2 алгоритму  $\gamma_{opt}^1$  збігаються з алгоритмом  $\gamma_{min}^0$ .

3. Розраховуються значення кутів суміжності ланок СЛЛ згущеної ДПК за формулою (3.42). Звернемо увагу на те, що згідно з (3.42) розраховуються кути суміжності  $\gamma_{1,5}, \gamma_{2,5}, \dots, \gamma_{n-1,5}$ . Для незамкненої ДПК невідзначеними виявляються значення  $\gamma_{0,5}^1$  і  $\gamma_{n-0,5}^1$ . Можна прийняти  $\gamma_{0,5}^1 = \gamma_i^1$  і  $\gamma_{n-0,5}^1 = \gamma_{n-1}^1$ . Тоді на підставі тотожності (3.36)

$$\gamma_{0,5}^1 = \frac{1}{3} (\gamma_1^0 - \gamma_{1,5}^1),$$

$$\gamma_{n-0,5}^1 = \frac{1}{3} (\gamma_{n-1}^0 - \gamma_{n-1,5}^1); \quad (3.46)$$

Для замкненої ДПК  $\gamma_0^0 = \gamma_n^0$ , тоді з умови (3.42) кути суміжності визначаються у всіх точках згущення однозначно.

Надалі розрахунки координат точок згущення здійснюються відповідно до п. 2,3 і 4. основного алгоритму згущення (формули (3.37), (3.38), (3.39)).

Приведемо приклад.

Для того, щоб проілюструвати роботу алгоритму, виберемо координати точок тестової ДПК таким чином, щоб її ланки 2-3 і 3-4 збіглися, тобто виявилися відрізком прямої, що з'єднує точки 2 і 4. Тоді  $\gamma_{min}^0 = 0$ . Алгоритм

$\gamma_{min}$  у цьому випадку непридатний. Результати розрахунків за алгоритмом  $\gamma_{opt}^1$  після двох кроків згущення приведені в табл.3.5., а графік згущеної ДПК на рис.3.7.



Таблиця 3.5 – Розрахунок двох кроків згущення при обраній умові  $\gamma_{i-0,5,opt}$ 

| $i$  | $x_i^0$ | $y_i^0$ | $l_i^0$ | $\alpha_i^0$ | $\gamma_i^0$ | $\gamma_{i-0,5,opt}^1$ | $m_i^1$ | $x_i^1$ | $y_i^1$ | $l_i^1$ | $\alpha_i^1$ | $\gamma_{i-0,5,opt}^e$ | $m_i^e$ | $x_i^e$ | $y_i^e$ |
|------|---------|---------|---------|--------------|--------------|------------------------|---------|---------|---------|---------|--------------|------------------------|---------|---------|---------|
| 0    | 17      | 63      | 28,425  | 50,7         | -60,54       |                        |         | 17      | 63      | 14,4    | 59,974       |                        |         | 17      | 63      |
| 0,25 |         |         |         |              |              |                        |         |         |         |         |              | -9,26                  | 0,583   | 20,1    | 69,53   |
| 0,5  |         |         |         |              |              | 18,52                  | 2,318   | 24,206  | 75,468  | 14,4    | 41,447       | -9,26                  |         | 24,206  | 75,468  |
| 0,75 |         |         |         |              |              |                        |         |         |         |         |              | -9,26                  | 0,583   | 29,22   | 80,671  |
| 1    | 35      | 85      | 38,079  | 13,67        | -37,04       | 18,52                  |         | 35      | 85      | 19,29   | 22,931       | -9,26                  |         | 35      | 85      |
| 1,25 |         |         |         |              |              |                        |         |         |         |         |              | -9,26                  | 0,781   | 43,579  | 89,477  |
| 1,5  |         |         |         |              |              | 18,52                  | 3,104   | 52,766  | 90,516  | 19,29   | 4,412        | -9,26                  |         | 52,766  | 92,516  |
| 1,75 |         |         |         |              |              |                        |         |         |         |         |              | -9,26                  | 0,781   | 62,323  | 94,04   |
| 2    | 72      | 94      | 32,64   | -40,03       | -53,7        | 44,44                  |         | 72      | 94      | 16,325  | -40,03       | -39,81                 |         | 72      | 94      |
| 2,25 |         |         |         |              |              |                        |         |         |         |         |              | 0                      | 0       | 78,25   | 88,75   |
| 2,5  |         |         |         |              |              | 0                      | 0       | 84,5    | 83,5    | 16,325  | -40,03       | 0                      |         | 84,5    | 83,5    |
| 2,75 |         |         |         |              |              |                        |         |         |         |         |              | 0                      | 0       | 90,75   | 78,25   |
| 3    | 97      | 73      | 32,64   | -40,03       | 0            | 0                      |         | 97      | 73      | 16,325  | -40,03       | 0                      |         | 97      | 73      |
| 3,25 |         |         |         |              |              |                        |         |         |         |         |              | 0                      | 0       | 103,25  | 67,75   |
| 3,5  |         |         |         |              |              | 0                      | 0       | 109,5   | 62,5    | 16,325  | -40,03       | 0                      |         | 109,5   | 62,5    |
| 3,75 |         |         |         |              |              |                        |         |         |         |         |              | 0                      | 0       | 115,75  | 57,25   |
| 4    | 122     | 52      | 32,802  | -127,6       | -87,54       | 77,725                 |         | 122     | 52      | 16,645  | -117,76      | -72,818                |         | 122     | 52      |
| 4,25 |         |         |         |              |              |                        |         |         |         |         |              | -9,815                 | 0,715   | 118,76  | 44,302  |
| 4,5  |         |         |         |              |              | 19,63                  | 2,837   | 114,25  | 37,27   | 16,645  | -137,38      | -9,815                 |         | 114,249 | 37,27   |
| 4,75 |         |         |         |              |              |                        |         |         |         |         |              | -9,815                 | 0,715   | 108,61  | 31,109  |
| 5    | 102     | 26      | 48,27   | -166,8       | -39,26       | 19,63                  |         | 102     | 26      | 24,493  | -157,02      | -9,815                 |         | 102     | 26      |
| 5,25 |         |         |         |              |              |                        |         |         |         |         |              | -9,815                 | 1,052   | 91,136  | 20,25   |
| 5,5  |         |         |         |              |              | 19,63                  | 4,175   | 79,45   | 16,435  | 24,493  | -176,64      | -9,815                 |         | 79,45   | 16,435  |
| 5,75 |         |         |         |              |              |                        |         |         |         |         |              | -9,815                 | 1,052   | 67,287  | 14,67   |
| 6    | 55      | 15      | 26,833  | -206,6       | -39,7        | 19,99                  |         | 55      | 15      | 13,62   | -196,63      | -10,115                |         | 55      | 15      |
| 6,25 |         |         |         |              |              |                        |         |         |         |         |              | -9,935                 | 0,592   | 48,306  | 16,382  |
| 6,5  |         |         |         |              |              | 19,87                  | 2,35    | 41,95   | 18,898  | 13,62   | -216,51      | -9,935                 |         | 41,95   | 18,898  |
| 6,75 |         |         |         |              |              |                        |         |         |         |         |              | -9,935                 | 0,592   | 36,123  | 22,473  |
| 7    | 31      | 27      | 36,686  | -248,8       | -42,1        | 21,7                   |         | 31      | 27      | 19,645  | -228,5       | -11,46                 |         | 31      | 27      |
| 7,25 |         |         |         |              |              |                        |         |         |         |         |              | -10,545                | 0,906   | 25,146  | 34,748  |
| 7,5  |         |         |         |              |              | 21,09                  | 3,595   | 20,65   | 43,697  | 19,645  | -261,46      | -10,545                |         | 20,65   | 43,697  |
| 7,75 |         |         |         |              |              |                        |         |         |         |         |              | -10,545                | 0,906   | 17,929  | 53,214  |
| 8    | 17      | 63      | –       | -309,3       | -60,54       | 40,735                 |         | 17      | 63      | –       | -300,03      | -30,833                |         | 17      | 63      |

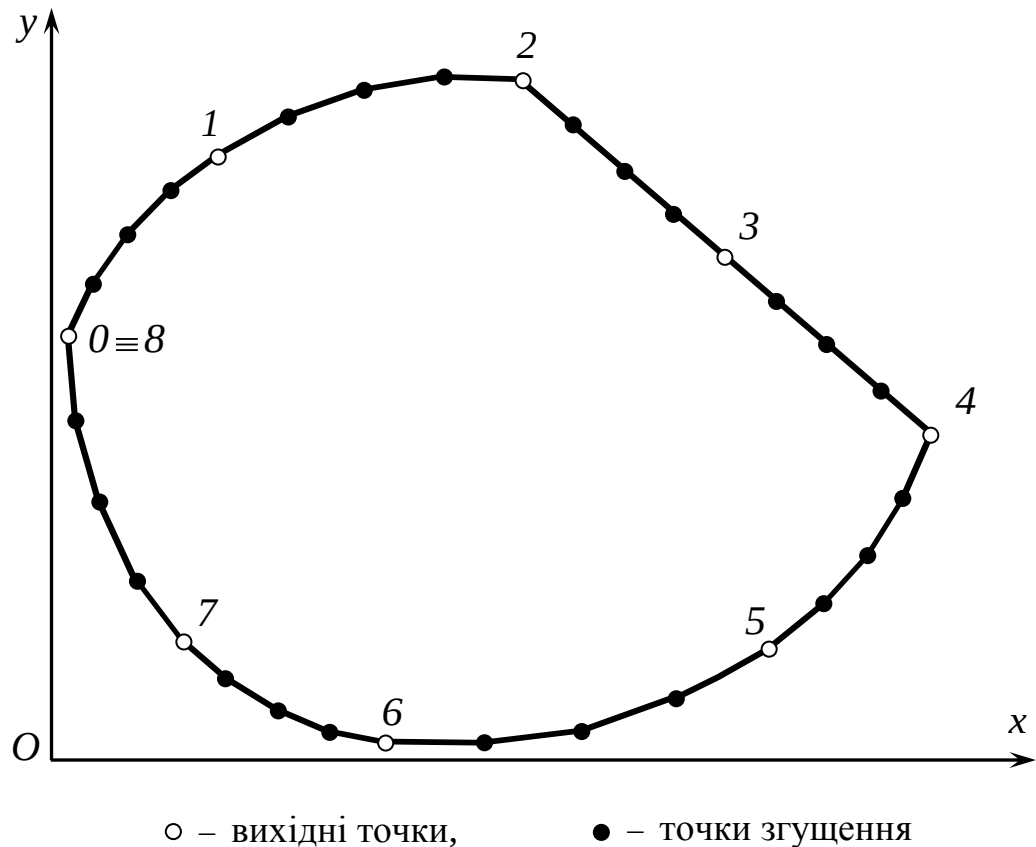


Рисунок 3.7 – Два кроки згущення за  $\gamma_{i-0,5,opt}^1$  тестової ДПК і її СЛЛ

Як бачимо, точки згущення на ділянці випрямлення (точки 2,3,4) розташовуються на прямолінійному відрізку 2...4 у той час, коли інші точки згущення відслідковують зміну кривини вихідної ДПК. Таким чином, можна зробити наступні висновки:

- алгоритм відслідковує при згущенні не тільки ділянки випрямлення, але і зміни кривини вихідної ДПК, гарантуючи при цьому відсутність осциляції;
- спосіб  $\gamma_{opt}$  простий в обчислювальній реалізації і має високу точність.

При розгляді замкнених опуклих ДПК з урахуванням вище викладеного можна прийти до наступних висновків:

- графік кутів нахилу ланок СЛЛ на будь-якому кроці згущення повинний бути монотонно спадним;
- з кожним кроком згущення кути суміжності зменшуються за модулем, у середньому в два рази.

Недоліком способу є його однозначність, неможливість керування формою кривої і варіації кривини в точках згущення.

## 3.4.2. КУТИ ЗГУЩЕННЯ

Розглянемо фрагмент  $\llbracket -2, \dots, i+2 \rrbracket$  опуклої СЛЛ деякої ДПК (рис. 3.8) і в околі т.  $i$  побудуємо дві точки згущення  $\llbracket -0,5 \rrbracket$  і  $\llbracket +0,5 \rrbracket$ . Більш докладно розглянемо побудову т.  $\llbracket +0,5 \rrbracket$ . З вузла  $i$  під кутом  $\beta_{i+}^1$  до ланки  $\llbracket i, i+1 \rrbracket$  проводимо промінь до перетину в т.  $\llbracket +0,5 \rrbracket$  з аналогічним променем, проведеним з вузла  $(i+1)$  під кутом  $\beta_{i+1-}^1$ . Тут індекс 1 вгорі означає перший крок згущення. Усі кутові параметри вихідної СЛЛ (до згущення) мають вгорі індекс 0. Унизу  $i$  (чи  $\llbracket +1 \rrbracket$ ) означає вузол, до якого відноситься побудований промінь, а знак  $+$  чи  $-$  показує, що промінь йде в напрямку обходу  $(+)$  чи проти напрямку обходу  $(-)$ . Інакше: передує куту  $(-)$  чи виходить з нього  $(+)$ .

Оскільки кути  $\beta_{i+}^1$  і  $\beta_{i+1-}^1$  беруть участь у побудові точки згущення, назвемо їх *кутами згущення*. Очевидно, що кути згущення – це кути між ланками згущеної і вихідної СЛЛ. Для опуклої СЛЛ вони завжди від’ємні і визначаються за формулами:

$$\beta_{i-}^1 = \alpha_{i-0,5}^1 - \alpha_{i-1}^0; \beta_{i+}^1 = \alpha_i^0 - \alpha_i^1; \quad i = \overline{1; n-1}. \quad (3.47)$$

Звідси кути нахилу ланок згущеної СЛЛ

$$\alpha_{i-0,5}^1 = \alpha_{i-1}^0 + \beta_{i-}^1; \alpha_i^1 = \alpha_i^0 - \beta_{i+}^1; \quad i = \overline{1; n-1}. \quad (3.48)$$

Розглянемо рис. 3.8. У вузлі  $i$  кут суміжності до згущення є  $\gamma_i^0$ , після побудови точок згущення він стає  $\gamma_i^1$ . Тоді відповідно до рис. 3.8 маємо

$$\beta_{i-}^1 + \beta_{i+}^1 + \gamma_i^1 = \gamma_i^0, \quad i = \overline{1; n-1} \quad (3.49)$$

Умова від’ємності кутів  $\beta_{i-}^1, \beta_{i+}^1, \gamma_i^1 < 0$  відповідає опуклій згущеній СЛЛ в околі ланки  $(i, i+1)$ .

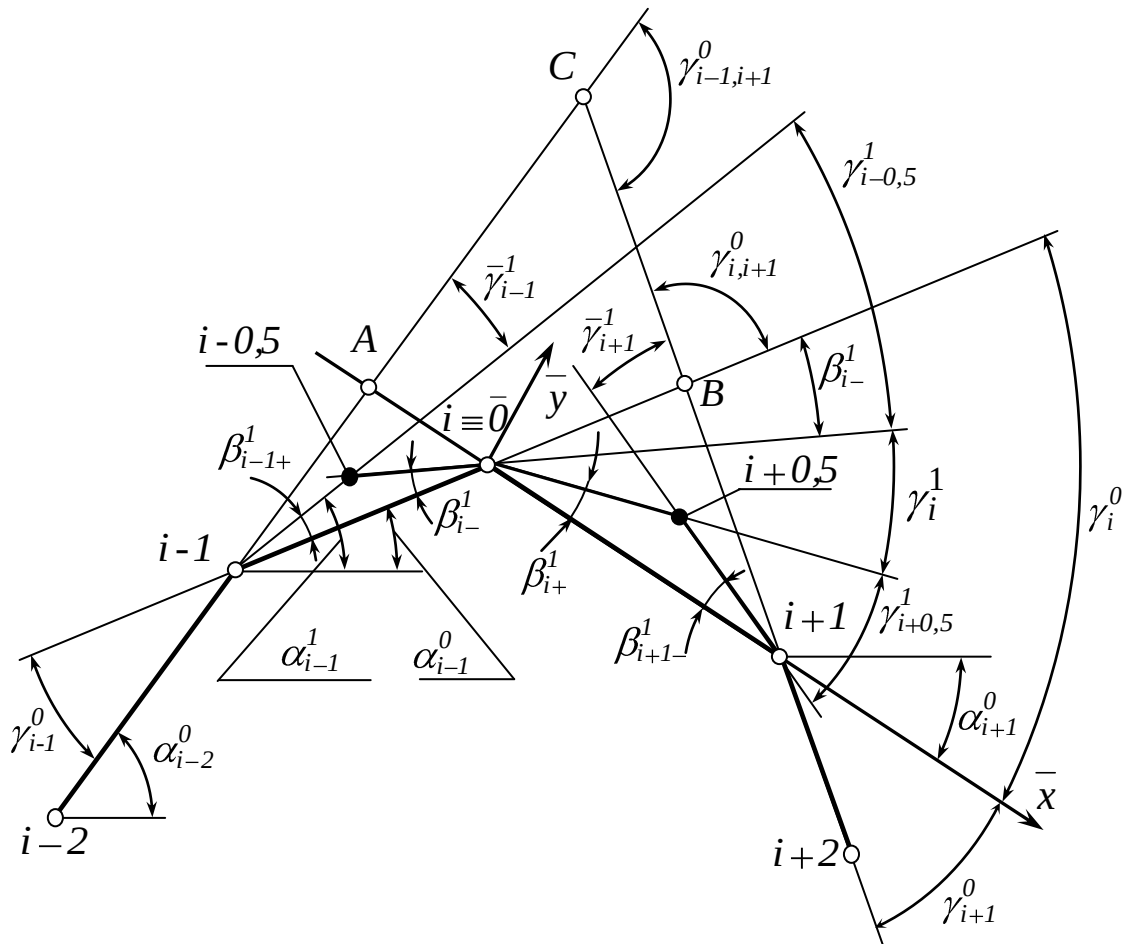


Рисунок 3.8 – Співвідношення кутових параметрів в точках ДПК

Для координування точки згущення введемо локальну декартову систему координат з початком  $\bar{O}$  у точці  $i$  (рис. 3.8), де вісь  $\bar{Ox}$  збігається з ланкою  $(i, i+1)$ . Тоді

$$\begin{aligned} \bar{x}_{i+0,5} &= \llbracket i+1 \rrbracket^- \cdot \frac{tg\beta_{i+1-}^1}{-tg\beta_{i+}^1 + tg\beta_{i+1-}^1}; \\ \bar{y}_{i+0,5} &= -\bar{x}_{i+0,5} \cdot tg\beta_{i+}^1. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Очевидно, що при  $\beta_{i+}^1 = \beta_{i+1-}^1$  маємо  $\bar{x}_{i+0,5} = \frac{1}{2} \llbracket i+1 \rrbracket^-$ , тобто точка згущення розташовується на медіатрисі ланки  $(i, i+1)$ , а кути суміжності СЛЛ задовольняють основній тотожності згущення (3.36).

Перехід від локальних координат  $\bar{x}_{i+0,5}$  і  $\bar{y}_{i+0,5}$  до глобальних  $x_{i+0,5}$  і  $y_{i+0,5}$  здійснюється за формулами (рис. 3.9):

$$\begin{aligned} x_{i+0,5} &= x_i + \bar{x}_{i+0,5} \cdot \cos \alpha_i^0 - \bar{y}_{i+0,5} \cdot \sin \alpha_i^0, \\ y_{i+0,5} &= y_i + \bar{x}_{i+0,5} \cdot \sin \alpha_i^0 + \bar{y}_{i+0,5} \cdot \cos \alpha_i^0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

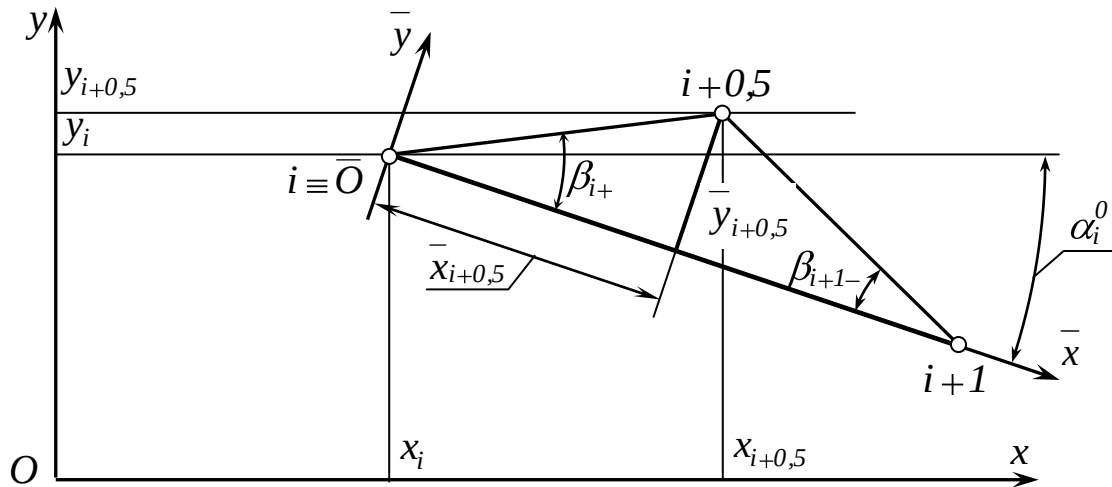


Рисунок 3.9 – Перехід від локальних координат точки  $(i+0,5)$  до глобальних

У процесі згущення двох сусідніх ділянок  $(i, i+1)$  і  $(i+1, i+2)$  змінюється величина кута суміжності ланок СЛЛ у вузлі  $(i+1)$ . Якщо цей процес не контролювати, то може виявитися, що  $\gamma_{i+1}^1$  змінить свій знак і у вузлі  $(i+1)$  виникне осциляція.

Таким чином згущення на основі кутових параметрів повинне враховувати наступні співвідношення:

- між  $\beta_{i-}$ ,  $\gamma_i^1$ ,  $\beta_{i+}$  у межах одного  $i$ -го вузла;
- між  $\beta_{i+}$  і  $\beta_{i+1-}$  в межах однієї ланки  $(i, i+1)$ ;
- між кутами суміжності  $\gamma^1$  при глобальному згущенні всього точкового ряду ДПК.

При розробці обчислювальних алгоритмів побудови точок  $\langle +0,5 \rangle$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , візьмемо до уваги наступне:

1. Кути згущення  $\beta_{i+}^1$  і  $\beta_{i+1-}^1$  формуються, виходячи з умови запобігання осциляції як у точці згущення, так і в сусідніх вузлових точках  $i$  і  $i+1$ . Орієнтуючись на рис. 3.8. звернемо увагу на те, що:
  - точка згущення  $\langle +0,5 \rangle$  повинна знаходитися в межах трикутника  $i, B, i+1$ ;
  - ланка згущеної СЛЛ, що передуює вузлу  $i$ , складає з ланкою  $(i-1, i)$  вихідної СЛЛ кут згущення  $\beta_{i-}^1$ ;
  - кут суміжності  $\gamma_i^1$  ланок згущеної СЛЛ у вузлі  $i$  повинний бути від'ємним, точніше, того ж знака, що і  $\gamma_i^0$ ;
  - кути згущення  $\beta_{i+}^1$  і  $\beta_{i+1-}^1$ , відлічувані від ланки  $(i, i+1)$ , також по-

- винні бути від'ємними, тобто  $\beta_{i+}^1, \beta_{i+1-}^1 < 0$ ;
- кутові параметри в кожному вузлі ДПК повинні задовольняти співвідношенню

$$\beta_{i-} + \gamma_i^1 + \beta_{i+} = \gamma_i^0, i = \overline{1, n-1}. \quad (3.49)$$

2. Кути суміжності  $\gamma_i^0$  вихідної СЛЛ ДПК поводяться відповідно до внутрішньої геометрії модельованої кривої і способу її дискретизації. За величинами кутів суміжності ланок згущеної СЛЛ ДПК і за їхнім поводженням можна судити про ступінь наближення до модельованої кривої і про її внутрішню геометрію. Таким чином між законами зміни кутів суміжності вихідної СЛЛ і згущеної СЛЛ ДПК існує визначений взаємозв'язок.
3. Зважаючи на те, що  $0 > \beta_{i+}^1, \beta_{i+1-}^1 > \gamma_i^0$ , а кут суміжності у вузлі  $i$  зменшується (за модулем) при згущенні, то дуже легко одержати ситуацію, коли  $\gamma_i^1 > 0$  (при досить великих за модулем  $\beta_{i+}^1$  і  $\beta_{i-}^1$ ). Оскільки це має місце для будь-якої ланки СЛЛ, то логічно перейти до безрозмірних параметрів, що не залежать від кутів  $\gamma_i^0$ . Нехай для кожного  $i$ -го вузла СЛЛ ДПК кути згущення  $\beta_{i+}^1$  і  $\beta_{i-}^1$  пропорційні куту суміжності  $\gamma_i^0$  з деякими коефіцієнтами  $\mu_{1i}$  і  $\mu_{2i}$ , а кут суміжності  $\gamma_i^1$  ланок СЛЛ після згущення – з коефіцієнтом  $\nu_i$ , тобто

$$\gamma_i^1 = \nu_i \cdot \gamma_i^0; \beta_{i+} = \mu_{1i} \cdot \gamma_i^0; \beta_{i-} = \mu_{2i} \cdot \gamma_i^0 \quad (3.52)$$

$$0 < \nu_i, \mu_{1i}, \mu_{2i} < 1 \quad (3.53)$$

Припущення про пропорційність кутів дає можливість деякою мірою зберегти закономірність зміни кутів суміжності при згущенні, а, отже, не допускати значної розбіжності з внутрішньою геометрією модельованої кривої. Якщо це взяти до уваги, то

$$\nu_i + \mu_{1i} + \mu_{2i} = 1. \quad (3.54)$$

Обґрунтований вибір  $\nu_i$ ,  $\mu_{1i}$  і  $\mu_{2i}$  дозволяє побудувати точку згущення для будь-якої ланки вихідної СЛЛ і уникнути осциляції при співвідношеннях (3.53) і (3.54). Очевидно, що варіантів вибору багато і їхня розмаїтість дає можливість одержати розмаїтість згущень і здійснити локальну корекцію згущеної ДПК.

Дослідження Лебедева В.А. [24] показали, що оптимальними значеннями коефіцієнтів  $\mu_1, \mu_2, \nu$ , що не залежать від конфігурації вихідної ДПК, є наступні:  $\nu = 0.5$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0.25$ . Розглянемо згущення довільної ДПК, дані про яку і результати розрахунку приведені в табл. 3.6.

Таблиця 3.6 – Вихідні дані і результати розрахунків 1-го кроку згущення тестової ДПК при  $\nu=0,5$ ,  $\mu_1=\mu_2=0,25$ .

| $i$ | Вихідні дані |       |        |              |              | Результати згущення |              |              |             |             |         |          |
|-----|--------------|-------|--------|--------------|--------------|---------------------|--------------|--------------|-------------|-------------|---------|----------|
|     | $x_i$        | $y_i$ | $l_i$  | $\alpha_i^0$ | $\gamma_i^0$ | $\gamma_i^1$        | $\beta_{i-}$ | $\beta_{i+}$ | $\bar{x}_i$ | $\bar{y}_i$ | $x_i$   | $y_i$    |
| 0   | 0            | 0     | 38,210 | 47,121       | -24,096      | -12,048             | -6,024       | -6,024       |             |             | 0,000   | 0,000    |
| 0,5 |              |       |        |              |              | -12,048             |              |              | 19,105      | 2,016       | 11,523  | 15,372   |
| 1   | 26           | 28    | 43,463 | 23,025       | -24,096      | -12,048             | -6,024       | -6,024       |             |             | 26,000  | 28,000   |
| 1,5 |              |       |        |              |              | -17,732             |              |              | 28,798      | 3,039       | 51,315  | 42,061   |
| 2   | 66           | 45    | 37,162 | -23,806      | -46,831      | -23,416             | -11,708      | -11,708      |             |             | 66,000  | 45,000   |
| 2,5 |              |       |        |              |              | -15,708             |              |              | 9,376       | 1,943       | 75,362  | 42,993   |
| 3   | 100          | 30    | 39,051 | -39,806      | -16,000      | -8,000              | -4,000       | -4,000       |             |             | 100,000 | 30,000   |
| 3,5 |              |       |        |              |              | -15,691             |              |              | 29,187      | 2,041       | 123,729 | 12,883   |
| 4   | 130          | 5     | 50,090 | -86,566      | -46,761      | -23,381             | -11,690      | -11,690      |             |             | 130,000 | 5,000    |
| 4,5 |              |       |        |              |              | -19,337             |              |              | 19,711      | 4,078       | 135,251 | -14,431  |
| 5   | 133          | -45   | 43,829 | -117,15      | -30,583      | -15,292             | -7,646       | -7,646       |             |             | 133,000 | -45,000  |
| 5,5 |              |       |        |              |              | -9,442              |              |              | 8,295       | 1,114       | 130,206 | -52,889  |
| 6   | 113          | -84   | 49,649 | -124,33      | -7,181       | -3,591              | -1,795       | -1,795       |             |             | 113,000 | -84,000  |
| 6,5 |              |       |        |              |              | -3,591              |              |              | 24,824      | 0,778       | 99,642  | -104,939 |
| 7   | 85           | -125  |        |              | -7,181       | -3,591              | -1,795       | -1,795       |             |             | 85,000  | -125,000 |

Для того, щоб здійснити згущення на ділянці  $(0-1)$  і  $(n-1,n)$  надалі приймаємо  $\gamma_0^0 = \gamma_1^0$  і  $\gamma_{n-1}^0 = \gamma_n^0$ , тому що це не суперечить внутрішній геометрії кривої і не викликає осциляції на зазначених ділянках.

**Алгоритм** згущення тестової ДПК при заданих  $\nu$ ,  $\mu_1, \mu_2$ .

Дані:  $x_i, y_i$ . Виконати згущення при  $\nu=0,5$ ,  $\mu_1=\mu_2=0,25$ .

1. Визначаємо довжини ланок:

$$l_{i+1} = \sqrt{(y_i - y_{i+1})^2 + (x_i - x_{i+1})^2}, i = \overline{0, n-1}.$$

2. Розраховуємо кути  $\alpha_i$  нахилу ланок до осі  $Ox$ :

$$\alpha_i^0 = \arcsin \frac{y_{i+1} - y_i}{l_{i+1}}, i = \overline{0, n-1}.$$

3. Визначаємо кути суміжності  $\gamma_i^0$  у вузлах до згущення

$$\gamma_i^0 = \alpha_i^0 - \alpha_{i-1}^0, i = \overline{1; n-1}.$$

4. Призначаємо в нульовій точці  $\gamma_0^0 = \gamma_1^0$ , в останній точці

$$\gamma_n^0 = \gamma_{n-1}^0.$$

5. Визначаємо після згущення  $\gamma_i^1 = \nu \cdot \gamma_i^0, i = \overline{0; n}$ .

6. Визначаємо кути згущення

$$\beta_{i+} = \mu_1 \cdot \gamma_i^0; i = \overline{0; n-1}; \beta_{i-} = \mu_2 \cdot \gamma_i^0; i = \overline{1; n}.$$

7. Визначаємо точки згущення в локальних системах координат

$$\bar{x}_{i+0,5} = \frac{i+1}{2} \cdot \frac{tg\beta_{i+1-}}{-tg\beta_{i+} + tg\beta_{i+1-}}; \quad \bar{y}_{i+0,5} = -\bar{x}_{i+0,5} \cdot tg\beta_{i+}.$$

8. Визначаємо координати точок згущення в глобальній системі координат

$$x_{i+0,5} = x_i + \bar{x}_{i+0,5} \cdot \cos\alpha_i^0 - \bar{y}_{i+0,5} \cdot \sin\alpha_i^0,$$

$$y_{i+0,5} = y_i + \bar{x}_{i+0,5} \cdot \sin\alpha_i^0 + \bar{y}_{i+0,5} \cdot \cos\alpha_i^0.$$

На рис. 3.10 представлені СЛЛ вихідної ДПК і згущеної (1-й крок) згідно з табл. 3.6.

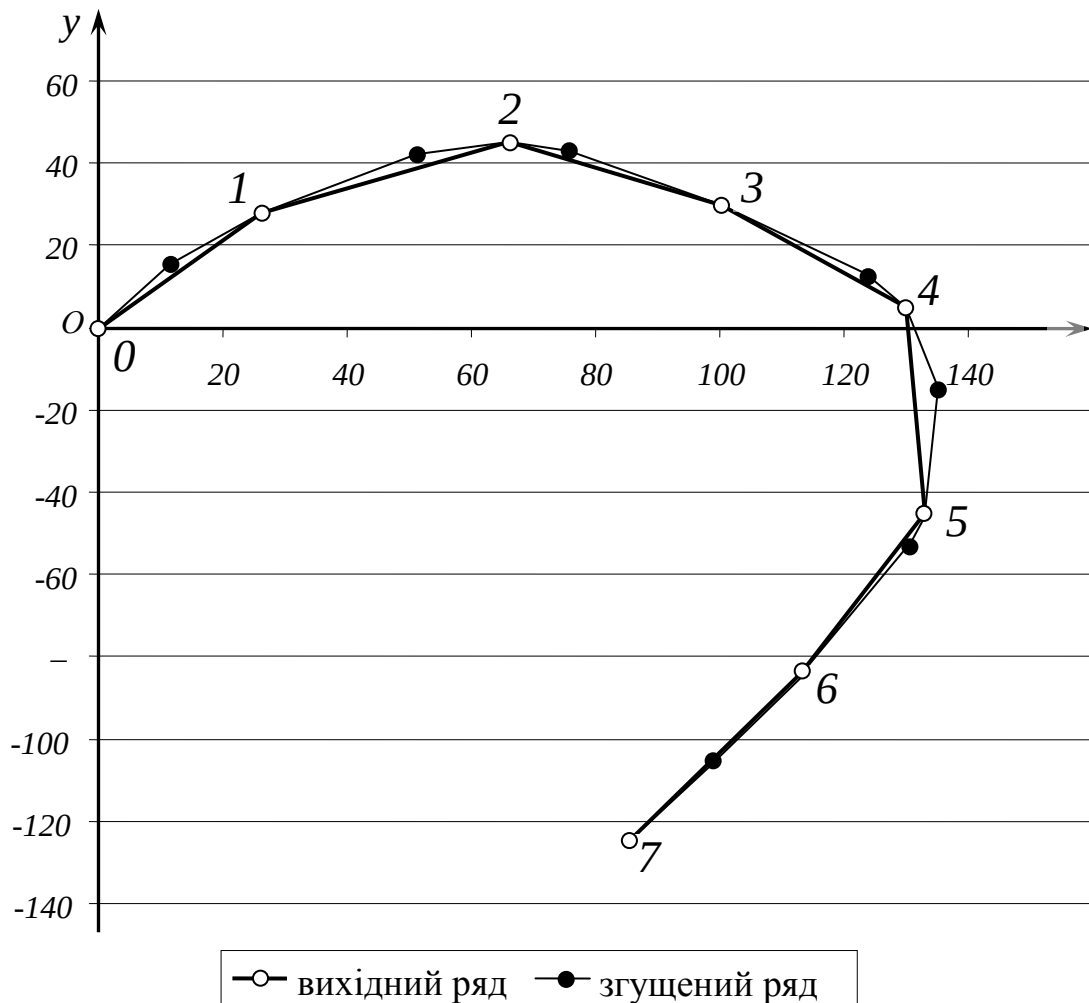


Рисунок 3.10 – Згущення ДПК згідно з табл. 3.6

При необхідності повторного згущення точки перенумеруємо і повторюємо розрахунок.

Тестовий розрахунок показав наступне:

1. Точки згущення на кожній ділянці зміщуються у бік вузлів з більшими кутами суміжності. Якщо  $\gamma_i^0 = \gamma_{i+1}^0$ , як на першій і останній ділянках, то точка згущення розміщується на медіатрисі (серединному перпендикулярі) ланки  $(i, i+1)$
2. Точки згущення ближче усього до своєї хорди там, де кут суміжності



- мінімальний за модулем (див. 3-4 і 6-7 на рис. 3.10).
3. Значення кутів суміжності в точках згущення дорівнює напівсумі сусідніх кутів суміжності незалежно від їхнього співвідношення (при  $\nu = 0,5$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0,25$ ).
  4. Пропорційність кутів суміжності при згущенні з зазначеними коефіцієнтами зберігається.
  5. При необхідності корекції якої-небудь ділянки згущення (зміна кута суміжності чи положення точки згущення) варто змінити співвідношення між коефіцієнтами.
  6. Якщо точки згущення сусідніх ланок виявляються на медіатрисах відповідних хорд, то кути суміжності задовольняють тотожності згущення (3.36). Кути згущення, що примикають до однієї ланки, рівні і, якщо кути суміжності у вузлах до згущення не рівні, то і відповідні коефіцієнти  $\mu_1 \neq \mu_2$ .
  7. Для забезпечення гнучкості розрахункових алгоритмів і самого процесу згущення варто перейти до співвідношень, що виключають рівність коефіцієнтів чи їхню сталість уздовж обводу.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому геометрична суть тотожності згущення в термінах кутових параметрів?
2. У чому складається спосіб розв'язання системи тотожностей кутових параметрів?
3. Які ви знаєте способи розв'язання системи рівнянь тотожностей кутових параметрів?
4. Які кутові параметри при цьому розраховуються?
5. Що таке кути згущення? Як вони зв'язані між собою?
6. Як вибирається локальна система координат при розрахунку за участю кутів згущення?
7. У чому переваги і недоліки методу тотожностей кутових параметрів?
8. У чому переваги і недоліки методу згущення на основі кутів згущення?



$$y_{max} = \min\left(y_i + y'_i \cdot \frac{h}{2}; y_{i+1} - y'_{i+1} \cdot \frac{h}{2}\right). \quad (3.58)$$

З урахуванням коефіцієнта  $\mu \in [0; 1]$  вибору точки згущення

$$\mu = \frac{S_i}{\min(S_i B_i, S_i A_i)} \quad (3.59)$$

знаходимо ординату  $y_{i+0,5}$

$$y_{i+0,5} = y_{S_i} + \mu \cdot \min(S_i B_i, S_i A_i); \quad (3.60)$$

$$S_i A_i = y_i + y'_i \frac{h}{2} - \frac{y_i + y_{i+1}}{2} = \frac{h}{2} \left( y'_i - \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \right); \quad (3.61)$$

$$S_i B_i = y_{i+1} - y'_{i+1} \frac{h}{2} - \frac{y_i + y_{i+1}}{2} = \frac{h}{2} \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - y'_{i+1} \right). \quad (3.62)$$

Після того, як побудована точка  $\langle +0,5 \rangle$ , необхідно визначити в цій точці дотичну до згущеної ДПК. Межі зміни її положення: верхня межа – хорда  $\langle i+0,5 \rangle$ , див. рис. 3.11, нижня межа – хорда  $\langle +0,5, i+1 \rangle$ . У межах кута суміжності цих хорд вибирається дотична  $t_{i+0,5}$ .

Розрахунок носить локальний характер і вибором коефіцієнтів  $\mu$  для точки згущення і  $\mu'$  – для положення  $t_{i+0,5}$  можна здійснювати локальну корекцію результату.

Як приклад, побудуємо точку  $\langle +0,5 \rangle$  і дотичну  $t_{i+0,5}$  для вихідних даних рис. 3.11.

$$\begin{aligned} y_i &= 59 & y_{i+1} &= 47 & h &= 30; \\ y'_i &= 1; & y'_{i+1} &= -1. \end{aligned}$$

#### Алгоритм

1. Визначаємо нижню межу для ординати  $y_{i+0,5}$  згідно з (3.55)

$$y_{S_i} = \frac{59 + 47}{2} = 53.$$

2. Знаходимо відрізок згущення  $\min(S_i B_i, S_i A_i)$  згідно з (3.61) і (3.62)

$$S_i A_i = \frac{30}{2} \left( 1 - \frac{47-59}{30} \right) = 18,$$

$$S_i B_i = \frac{30}{2} \left( 0,2 + 1 \right) = 12.$$

Відрізок згущення дорівнює 12.

3. Приймаємо  $\mu = 0,3$ .

4. Визначаємо  $y_{i+0,5}$  згідно з (3.60)

$$y_{i+0,5} = 53 + 0,3 \cdot 12 = 56,6.$$

5. Розраховуємо верхню і нижню межі  $y'_{i+0,5}$ .

$$y'_{i+0,5,max} = \frac{56,6 - 59}{15} = -0,16,$$

$$y'_{i+0,5,min} = \frac{47 - 56,6}{15} = -0,64.$$

6. Визначаємо  $y'_{i+0,5}$ , прийнявши  $\mu' = \mu = 0,3$

$$y'_{i+0,5} = -0,64 + 0,3(-0,16 + 0,64) = -0,496.$$

Аналогічно розраховується будь-яка ділянка ДПК між сусідніми вузлами.

При необхідності повторного згущення точки перенумеровуються і розрахунок повторюється.

Якщо у вихідних даних дотичних немає, то треба попередньо провести дискретне диференціювання за алгоритмами п. 2.4., визначити вузлові дотичні і застосувати описаний вище алгоритм.

Зараз ми виклали спосіб згущення, найбільш загальний і в найбільшій мірі відповідний варіативному дискретному геометричному моделюванню, коли результат не розраховується однозначно, а вибирається з області, де забезпечені вимоги задачі.

Менш універсальним (у змісті вибору розв'язку) є метод базисних функцій, зокрема, алгебраїчних 3-поліномів, як найбільш простих в обчислювальній реалізації і разом з тим в виконанні багатьох умов, що забезпечують процес моделювання (опуклість, ділянки перегину, прямолінійність, відсутність осциляції і т.п.). Розглянемо застосування цього методу для розв'язання поставленої задачі.

Алгебраїчний 3-поліном однозначно визначається двома вузлами  $i$  і  $(i+1)$ , див. рис. 3.11, і дотичними  $t_i$  й  $t_{i+1}$  у них, точніше значеннями похі-

дних  $y'_i$  і  $y'_{i+1}$ . Ордината  $y_{i+0,5}$  точки, що належить цьому поліному визначається з рівняння

$$y_{i+0,5} = \frac{-1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0,5(x_i + x_{i+1}) & 0,25(x_i + x_{i+1})^2 & 0,125(x_i + x_{i+1})^3 \\ y_i & 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 \\ y_{i+1} & 1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 & x_{i+1}^3 \\ y'_i & 0 & 1 & 2x_i & 3x_i^2 \\ y'_{i+1} & 0 & 1 & 2x_{i+1} & 3x_{i+1}^2 \end{vmatrix}, \quad (3.63)$$

де  $\Delta$  – окреслений визначник.

Значення похідної  $y'_{i+0,5}$  від побудованого 3-полінома в точці згущення визначається з рівняння

$$y'_{i+0,5} = \frac{-1}{\Delta'} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & (x_i + x_{i+1}) & 0,75(x_i + x_{i+1})^2 \\ y'_i & 0 & 1 & 2x_i & 3x_i^2 \\ y'_{i+1} & 0 & 1 & 2x_{i+1} & 3x_{i+1}^2 \\ y_i & 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 \\ y_{i+1} & 1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 & x_{i+1}^3 \end{vmatrix}, \quad (3.64)$$

де  $\Delta'$  – окреслений визначник.

Запропонований спосіб має локальність, не залежить від виду сітки. При необхідності повторити згущення треба попередньо перенумерувати точки.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як визначається відрізок згущення при наявності дотичних у вузлах ДПК?
2. У чому достоїнства методу згущення при наявності дотичних?
3. Як застосувати цей метод, якщо дотичні у вузлах ДПК не задані?
4. Як визначити дотичну в точці згущення?
5. Як вибирається коефіцієнт вибору розв'язку при побудові точки згущення, при виборі дотичної?

### 3.6. ПЕРЕХІД ДО НЕПЕРЕРВНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБРАЗІВ НА ОСНОВІ ЗГУЩЕННЯ

Кінцевою метою практичного дискретного геометричного моделювання є одержання неперервного ГО на основі визначених геометричних, математичних і розрахункових операцій з дискретним ГО, оскільки ці операції набагато простіші в порівнянні з аналогічними для неперервних ГО, а в деяких випадках вирішують задачі, непідсильні неперервному моделюванню (наприклад, запобігання осциляції). Задача таким чином полягає в тому, щоб

від дискретного ГО (у нашому випадку ДПК) перейти до неперервного ГО в межах заданої точності.

Розглянемо деяку ДПК на площині, для простоти розрахунків на рівномірній сітці. Вона характеризується своєю внутрішньою геометрією, наприклад, множиною значень перевищень середніх точок ряду над хордами, що з'єднують сусідні точки. За величиною цього відхилення можна судити про те, наскільки "скривлена" ДПК чи наскільки трійка точок далека від прямолінійного розташування. Якщо в задану криву лінію вписати ламану лінію, то за ступенем перевищення середніх точок можна судити про те, наскільки ця ламана лінія близька до кривої лінії. Ми вже згадували теорему Ремеза про те, що довільну криву на площині можна апроксимувати (замінити) із заданою точністю кусково-лінійною функцією, тобто ламаною лінією, з вузлами на заданій кривій лінії.

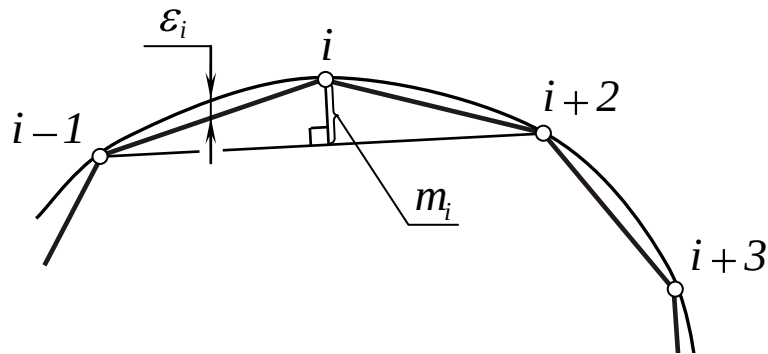


Рисунок 3.12 – Наближення кривої лінії ламаною

Звернемо увагу на рис. 3.12. Якщо в регулярну криву лінію вписана ламана, то перевищення  $m_i$  очевидно більше (іноді значно!) максимального відхилення  $\varepsilon_i$  точок кривої лінії від ланок ламаної. Це ж підтверджує й основна тотожність згущення (3.19) і рис. 3.4.

Таким чином, можна сформулювати зворотну теорему Ремеза:

*Усяку ламану лінію можна уявити неперервною моделлю деякої регулярної кривої лінії з точністю, що не більше максимального з перевищень вузлів ламаної над хордами, що з'єднують сусідні точки.*

Якщо задана конкретна СЛЛ ДПК, то окремі її  $m_i$  (може бути й усі) за модулем можуть значно перевищувати задану точність  $\varepsilon \geq 0$ . Згущенням даного точкового ряду можна домогтися як завгодно малого за модулем  $m_i$ , адже, як виявляється з тотожності (3.19) кожен крок згущення зменшує  $m_i$  приблизно в 4 рази. Оскільки кривина різних ділянок ДПК різна, то метод згущення повинний мати локальність, щоб ділянки з більшою кривиною піддалися більшому числу кроків згущення в порівнянні з іншими, де рівень  $|m_i| < \varepsilon$  досягнуто раніше. Після того, як усі  $|m_i| < \varepsilon$ , отриману на цьому кроці згущення ламану лінію (крок сітки може бути неоднаковим) можна вважати з заданою точністю  $\varepsilon$  неперервною моделлю невідомої кривої і використовувати її в подальших операціях моделювання замість кривої. Оскільки пере-

вищення прямо зв'язане з другою різницею, див. (3.16), зручніше точність наближення оцінювати за модулем другої центральної різниці.

Розглянемо приклад.

На основі даної ДПК (табл. 3.7) наблизити криву лінію ламаною з точністю  $\varepsilon = 1\text{мм}$ . Вихідна ДПК зображена на рис. 3.13. Крок вихідної сітки  $h = 15\text{мм}$ .

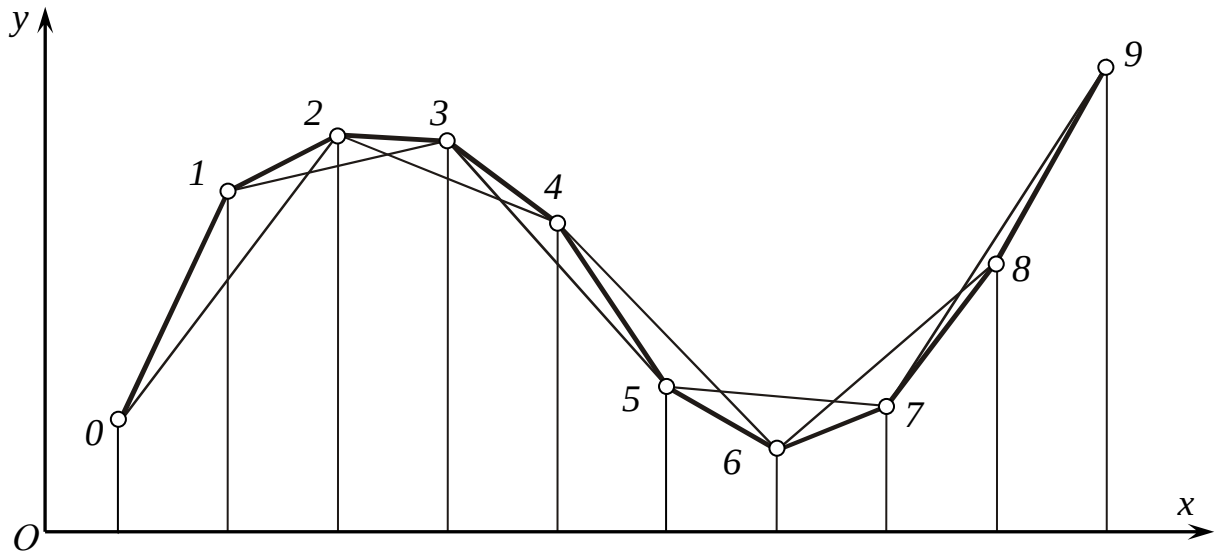


Рисунок 3.13 – Вихідна ДПК

Таблиця 3.7 – Вихідна ДПК до згущення

|          |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|----------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $i$      | 0  | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
| $x$      | 10 | 25  | 40  | 55  | 70  | 85  | 100 | 115 | 130 | 145 |
| $y$      | 16 | 54  | 63  | 62  | 49  | 23  | 13  | 20  | 43  | 74  |
| $\delta$ | -  | -29 | -10 | -12 | -13 | +16 | 17  | 16  | 8   | -   |

$$\text{Для згущення приймемо спосіб } \delta_{i+0,5,cr}^1 = \frac{1}{8} \left( 6\delta_i^0 + \delta_{i+1}^0 \right)$$

1 крок згущення

|          |    |        |        |        |        |       |        |        |        |
|----------|----|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|
| $i$      | 0  | 0,5    | 1      | 1,5    | 2      | 2,5   | 3      | 3,5    | 4      |
| $\delta$ | -  | -8,042 | -8,042 | -4,875 | -1,188 | -2,75 | -3,063 | -3,125 | -5,125 |
| $y$      | 16 | 39,02  | 54     | 60,94  | 63     | 63,87 | 62     | 57,06  | 49     |

|          |       |      |       |       |       |       |     |       |       |    |
|----------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-----|-------|-------|----|
| $i$      | 4,5   | 5    | 5,5   | 6     | 6,5   | 7     | 7,5 | 8     | 8,5   | 9  |
| $\delta$ | 0,375 | 5,75 | 4,125 | 4,375 | 4,125 | 4,438 | 3   | 1,667 | 1,667 | -  |
| $y$      | 35,81 | 23   | 15,94 | 13    | 14,44 | 20    | 30  | 43    | 57,67 | 74 |

Крок сітки  $h_1 = 7,5\text{мм}$

Після розрахунку різниць  $\delta_{i+0,5,cr}^1$ ,  $i=0; \overline{n-1}$ , розраховуємо нові різниці  $\delta_i^1$  у вузлових точках за допомогою основної тотожності (3.18):

$$\delta_i^1 = \frac{1}{2} [y_i^0 - y_{i-0,5}^1 + \delta_{i+0,5}^1] \quad (3.65)$$

Ординати  $y_{i+0,5}$  точок згущення визначаємо за формулою:

$$y_{i+0,5} = \frac{1}{2} [y_i + y_{i+1} - \delta_{i+0,5}^1] \quad (3.31)$$

Визначаємо граничне значення  $\delta$ , при якому можна вважати, що точність досягнута. Орієнтуючись на рис. 3.12 і співвідношення  $m_i = \frac{-\delta_i}{2}$ , дійдемо

висновку, що  $\varepsilon_i \approx \frac{1}{2} m_i$ . Тоді граничне  $|\delta_i|_{гран.}$  дорівнює

$$|\delta_i|_{гран.} \approx 4\varepsilon = 4\text{мм}$$

Після першого кроку згущення багато із  $\delta^1$  знаходяться в критичній зоні. Виконаємо другий крок згущення

2 крок згущення

|          |    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----------|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $i$      | 0  | 0,25  | 0,5   | 0,75  | 1     | 1,25  | 1,5   | 1,75  | 2     | 2,25  | 2,5   |
| $\delta$ | —  | -2,01 | -2,01 | -2,01 | -2,21 | -1,62 | -1,25 | -0,76 | -0,03 | -0,49 | -0,77 |
| $y$      | 16 | 25,52 | 39,02 | 47,52 | 54    | 58,28 | 60,94 | 61,59 | 63    | 63,68 | 63,87 |

|          |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $i$      | 2,75  | 3     | 3,25  | 3,5   | 3,75  | 4     | 4,25  | 4,5   | 4,75  |
| $\delta$ | -0,73 | -0,78 | -0,77 | -0,66 | 1,03  | -1,75 | -0,59 | 0,10  | 0,77  |
| $y$      | 63,30 | 62    | 59,92 | 57,06 | 53,55 | 49    | 42,70 | 35,81 | 29,02 |

|          |       |       |       |       |       |       |       |        |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|
| $i$      | 5     | 5,25  | 5,50  | 5,75  | 6     | 6,25  | 6,5   | 6,75   | 7     |
| $\delta$ | 1,875 | 1,234 | 0,914 | 1,063 | 1,125 | 1,063 | 0,996 | 1,07   | 1,219 |
| $y$      | 23    | 18,85 | 15,94 | 13,94 | 13    | 12,90 | 14,44 | 16,685 | 20    |

|          |       |       |       |       |       |       |       |    |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $i$      | 7,25  | 7,5   | 7,75  | 8     | 8,25  | 8,5   | 8,75  | 9  |
| $\delta$ | 0,93  | 0,556 | 0,958 | 0,146 | 0,417 | 0,417 | 0,417 | —  |
| $y$      | 24,54 | 30    | 36,02 | 43    | 50,13 | 57,67 | 65,63 | 74 |



Тепер очевидно, що задана точність досягнута. Отже, замість шуканої кривої можна взяти отриману нами ламану лінію після 2-го кроку згущення і вважати її неперервною моделлю кривої.

Звернемо увагу на те, що до згущення ділянка перегину була (4-5), після другого кроку згущення – (4,25-4,5). З кожним наступним кроком згущення ця ділянка буде зменшуватися, уточнюючи точку перегину.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому складається перехід від ДПК до неперервної функції при дискретному геометричному моделюванні?
2. Що є критерієм наближення ламаної лінії до неперервної кривої?
3. Що контролюють при згущенні з метою побудови кусково-лінійної моделі?
4. Як визначити момент припинення розрахунків, коли необхідна точність наближення досягнута?

## РОЗДІЛ 4. ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНІ ПРОСТОРОВІ КРИВІ ЛІНІЇ

Просторові лінії відіграють значну роль у геометричному моделюванні явищ і процесів. Це лінії струму газів і рідин у лопатних апаратах турбін, часток суцільного середовища, що обтікає робочі знаряддя і пристрої (наприклад, ґрунту при русі його по лемішно-відвальній поверхні), лінії струму технологічних газів і повітря в очисних і сепаруючих пристроях і т.п. На жаль, питання дискретного представлення, формоутворення і, особливо, моделювання просторових кривих ліній майже не розроблені. Дослідження стосуються в основному застосування способів двовимірного моделювання для параметричних представлень просторових ДПК, а також їхніх узагальнень на випадок 3-х і більш вимірів. Правда, ці спроби узагальнень на багатовимірні простори обтяжені численними неточностями і помилками, оскільки немає серйозної доказової бази і солідної теорії.

Наше завдання: викласти основи дискретних представлень просторових кривих ліній, освітити можливості їхнього формоутворення за заданими умовами аналогічно п. 2.9, вивчити питання їхньої дискретної інтерполяції (згущення) і формування диференціально-геометричних характеристик ДПК.

### 4.1. ЗАВДАННЯ ПРОСТОРОВИХ ДПК

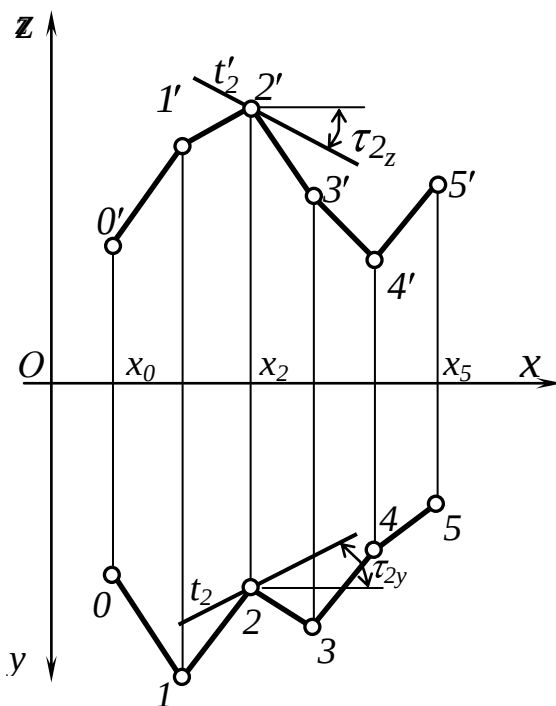


Рисунок 4.1 – Подання просторової ДПК своїми проекціями

Просторова ДПК являє собою упорядкований точковий ряд, між точками якого встановлені (існують) визначені позиційні, метричні, диференційно-геометричні співвідношення. Кожна точка цього ряду визначається в просторі своїми координатами. Як прийнято в нарисній геометрії, кожна точка простору визначається своїми двома проекціями: на площинах  $xOy$  і  $xOz$ . У такий спосіб упорядкованому просторовому точковому рядові будуть відповідати два упорядкованих *плоских* точкових рядів на зазначених площинах проекцій. Якщо точки ряду в просторі з'єднати просторовою ламаною лінією, то на площинах проекцій їй будуть відповідати дві супровідні ламані лінії. Для можливо-

сті однозначного представлення просторової ДПК і її моделювання необхідно, щоб координати  $x_i$  сусідніх точок ряду не збігалися. На рис. 4.1 представлена деяка просторова ДПК своїми плоскими ДПК-проекціями.

Важливою проблемою такого представлення є можливість розв'язання просторових задач на отриманому в такий спосіб кресленні. Багато в чому тут може допомогти теорія і практика нарисної геометрії.

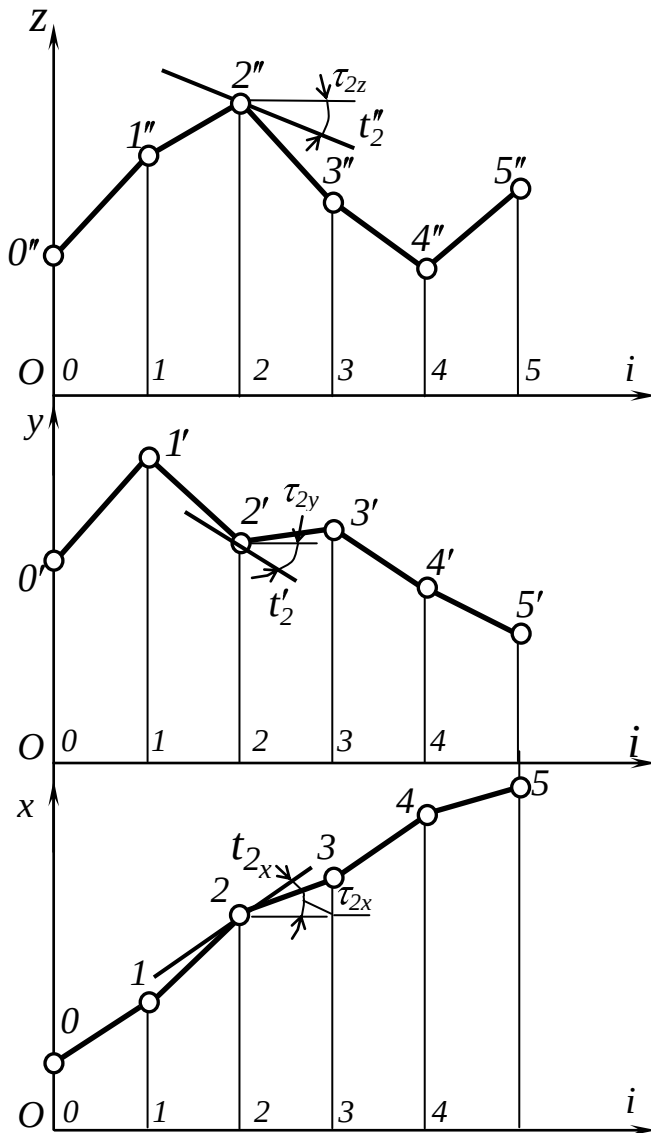


Рисунок 4.2 – Параметричне представлення ДПК від  $i$

Якщо у вихідних даних дві сусідні точки мають однакові координати  $x$ , то доцільно перейти до параметричного представлення ДПК від номера точки  $i$ . На рис. 4.2 представлені ряди  $x(i)$ ,  $y(i)$ , і  $z(i)$  деякої просторової ДПК. Звернемо увагу на наступну обставину. Для однозначної ДПК графік  $x(i)$  (нижнє зображення на рис. 4.2) є монотонно зростаючою ДПК. Очевидно зворотнє: якщо графік  $x(i)$  є монотонно зростаючою ДПК, то параметричні ДПК (рис. 4.2) представляють однозначну (відносно осі  $Ox$ ) ДПК.

Стосовно параметрів представлень відзначимо, що прості узагальнення параметрів двовимірного представлення (кути  $\alpha, \gamma$ , перевищення  $\Delta y$ ) на простір 3-х вимірів не мають сенсу, тому що не дозволяють організовувати на їхній основі ефективний обчислювальний процес. Єдине, що знадобиться при моделюванні просторових ДПК, це довжина ланок СЛЛ, що визначається за формулою

$$l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}. \quad (4.1)$$

В іншому успішно працює традиційна методика суперпозиції двох (для рис. 4.1) або трьох (для рис. 4.2) задач двовимірного моделювання. Якщо не висувати складних умов або вимог до результату моделювання, то цього цілком достатньо для досягнення шуканих результатів. Окремих, специфічних задач, властивих тільки просторовим ДПК, ми торкнемося пізніше.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яким чином можна задати точковий ряд просторової ДПК?
2. У чому різниця дискретного представлення плоскої і просторової ДПК?
3. Назвіть поля проєкцій параметричного представлення просторової ДПК.

### 4.2. ДОТИЧНА У ВУЗЛІ ПРОСТОРОВОЇ ДПК. НОРМАЛЬНА ПЛОЩИНА. ТРИГРАННИК ФРЕНЕ

Дотична у вузлі просторової ДПК будується на основі відомого положення нарисної геометрії: дотична до кривої лінії в просторі проєціюється в дотичні до однойменних її проєкцій. Це значить, що дотичний  $t_2$ , заданий у вузлі 2 просторової ДПК, відповідають на площинах  $yOx$  і  $zOx$  також дотичні у вузлі 2 плоских ДПК (рис. 4.1). Очевидно, що це має місце і для параметричних рядів (див.  $t_2$  на кожному із графіків рис. 4.2). Просторовий вектор  $\vec{t}_2$  визначається своїми проєкціями:

на рис. 4.1 
$$\vec{t}_2 \left\{ 1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx} \right\} \quad \text{або} \quad \vec{t}_2 \left[ tg\tau_{2y}, tg\tau_{2z} \right];$$

на рис. 4.2 
$$\vec{t}_2 \left\{ \frac{dx}{di}, \frac{dy}{di}, \frac{dz}{di} \right\} \quad \text{або} \quad \vec{t}_2 \left[ tg\tau_{2x}, tg\tau_{2y}, tg\tau_{2z} \right].$$

Такий розгляд дозволяє на кожній із проєкцій здійснювати автономно дискретне диференціювання й одержувати відповідну проєкцію вектора  $\vec{t}$ .

Рівняння дотичної, у найбільшій мірі підходяще до розв'язання задач дискретного моделювання, має вигляд

(для рис. 4.1): 
$$\frac{x - \bar{x}}{1} = \frac{y - \bar{y}}{tg\tau_{2y}} = \frac{z - \bar{z}}{tg\tau_{2z}};$$

(для рис. 4.2): 
$$\frac{x - \bar{x}}{tg\tau_{2x}} = \frac{y - \bar{y}}{tg\tau_{2y}} = \frac{z - \bar{z}}{tg\tau_{2z}},$$

де  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  – координати точки дотику (вузол ДПК).

*Нормаллю* до кривої називається пряма, що ортогонально перетинає дотичну в точці дотику. У просторової кривої для заданої дотичної таких нормалей незліченна, точніше однопараметрична, множина, що складають *нормальну площину*, перпендикулярну до дотичної в точці дотику.

Її рівняння:

$$(x - \bar{x}) \cdot 1 + (y - \bar{y}) \cdot tg\tau_{2y} + (z - \bar{z}) \cdot tg\tau_{2z} = 0, \quad (\text{рис. 4.1}), \quad (4.4)$$

або

$$(x - \bar{x}) \cdot \operatorname{tg} \tau_{2x} + (y - \bar{y}) \cdot \operatorname{tg} \tau_{2y} + (z - \bar{z}) \cdot \operatorname{tg} \tau_{2z} = 0, \quad (\text{рис. 4.2}). \quad (4.5)$$

Як і в двовимірному випадку, у диференціальній геометрії уводиться вектор *головної нормалі*, що є похідною дотичного вектора  $t$  за довжиною дуги  $S$  і характеризує швидкість зміни напрямку вектора  $t$  при переміщенні точки дотику уздовж кривої. Модуль цього вектора називається *кривиною*  $K$  кривої в даній точці, а обернена до нього величина-*радіусом*  $\rho$  *кривини*

$$\rho = \frac{1}{K}. \quad (4.6)$$

Відома формула для обчислення кривини:

$$K = \frac{1}{\rho} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}, \quad (4.7)$$

де  $x'', y'', z''$  – другі похідні по  $S$ .

У випадку довільного параметра  $u$

$$K^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\dot{u}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad (4.8)$$

де  $A = \dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y}$ ,  $B = \dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z}$ ,  $C = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}$ , крапки означають похідні за параметром.

Кривину просторової кривої прийнято вважати істотно додатною величиною.

Уведені вище дотична і головна нормаль кривої, а також її кривина не повною мірою характеризують просторову криву в даній точці, оскільки не дають відповіді на питання, чи лежить дана крива в площині. Саме ступінь відхилення кривої від площини і характерна просторовій кривій. Для з'ясування цього питання вводиться ще один вектор  $b$  *бінормалі* (другої нормалі), ортогональний векторам дотичної і нормалі. Його напрямок устанавлюється так, щоб прямокутний тригранник, утворений векторами  $t, n$  і  $b$ , був конгруентний (збігався при накладенні) координатному тригранникові  $Oxyz$ .

Очевидно, що у плоскій кривої усі бінормалі паралельні одна одній. У просторової кривої бінормаль змінює свій напрямок від точки до точки і за характером цієї зміни можна судити про ступінь відхилення кривої від площини, тобто швидкість повороту вектора бінормалі показує міру *скруту*  $\tau$  кривій. *Вектор скруту* (похідна від вектора бінормалі по  $S$ ) спрямований по головній нормалі. Величина, обернена до скруту, називається *радіусом скруту*  $\sigma$ . Від знака  $\tau$  залежить розташування кривої щодо тригранника  $t, n, b$ . При  $\tau > 0$  крива в т.  $M$  закручується за правилом правого гвинта, при  $\tau < 0$  – лівого гвинта, якщо рухатися у бік збільшення  $S$ . Значення  $\tau$  розраховується за формулою

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{\ddot{x}} & \ddot{\ddot{y}} & \ddot{\ddot{z}} \end{vmatrix}}{A^2 + B^2 + C^2}. \quad (4.9)$$

Якщо диференціювати по довжині дуги  $s$ , то

$$\tau = \frac{1}{K^2} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}. \quad (4.10)$$

Рівняння бінормалі

$$\frac{x - \bar{x}}{A} = \frac{y - \bar{y}}{B} = \frac{z - \bar{z}}{C}. \quad (4.11)$$

Вектори  $t, n, b$  мають місце для будь-якої неособливої точки кривої. Їхні напрямки називаються *головними*, вони мають ту ж орієнтацію, що і координатні осі. Тригранний кут, утворений  $t, n$  і  $b$  називається *основним тригранником* або *тригранником Френе* (за прізвищем французького вченого, що його запропонував). Три площини, утворені попарним сполученням указаних векторів, носять спеціальні назви. Площина, утворена векторами головної нормалі  $n$  і бінормалі  $b$ , називається *нормальною площиною* (рис. 4.3.).

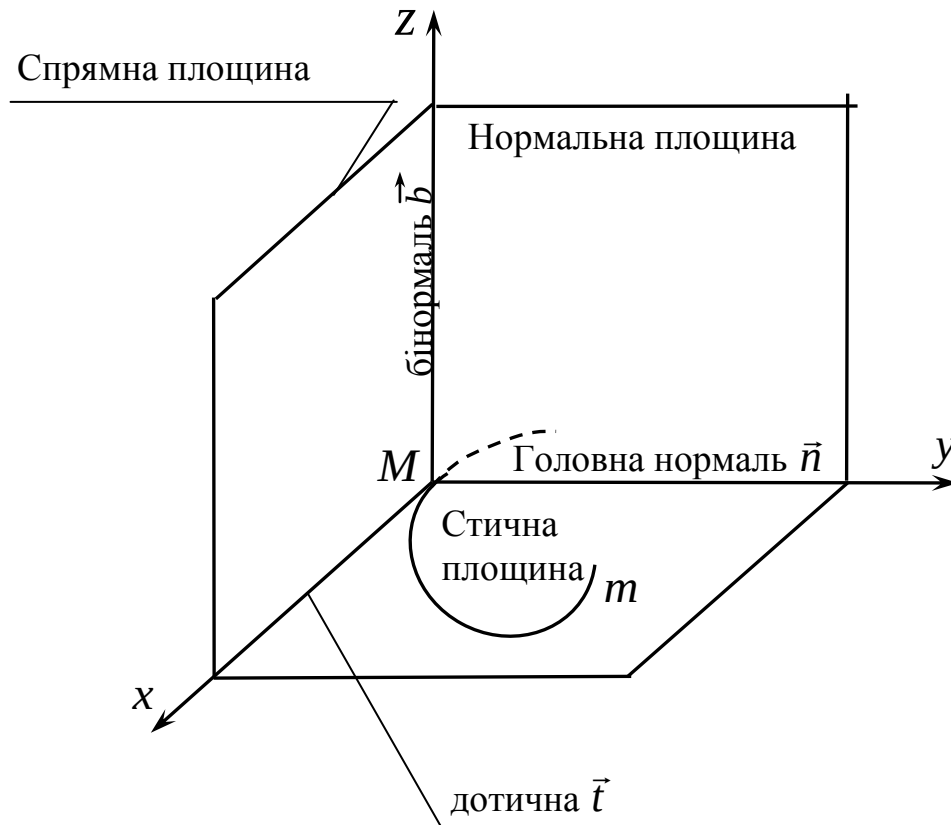


Рисунок 4.3 – Тригранник Френе

Площина, що проходить через дотичну  $t$  і бінормаль  $b$ , називається *спрямною площиною*.

Площина, що проходить через дотичну і головну нормаль, називається *стичною площиною*. Запишемо рівняння площин тригранника Френе.

Стична площина

$$A(x - \bar{x}) + B(y - \bar{y}) + C(z - \bar{z}) = 0. \quad (4.12)$$

Спрямна площина

$$\begin{vmatrix} x - \bar{x} & y - \bar{y} & z - \bar{z} \\ A & B & C \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.13)$$

Рівняння головної нормалі

$$\frac{x - \bar{x}}{\begin{vmatrix} B & C \\ \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}} = \frac{y - \bar{y}}{\begin{vmatrix} C & A \\ \dot{z} & \dot{x} \end{vmatrix}} = \frac{z - \bar{z}}{\begin{vmatrix} A & B \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix}}. \quad (4.14)$$

Нормальна площина

$$(x - \bar{x}) \cdot \dot{x} + (y - \bar{y}) \cdot \dot{y} + (z - \bar{z}) \cdot \dot{z} = 0. \quad (4.15)$$

Рівняння дотичної (див. також (4.2) і (4.3))

$$\frac{x - \bar{x}}{\dot{x}} = \frac{y - \bar{y}}{\dot{y}} = \frac{z - \bar{z}}{\dot{z}}. \quad (4.16)$$

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як побудувати дотичну у вузлі просторової ДПК?
2. Яка площина називається нормальною? Як розташовується головна нормаль кривої?
3. Яка площина називається стичною, як вона будується?
4. Що визначає собою лінія перетину стичної і нормальної площин?
5. Що таке бінормаль кривої, як її побудувати?
6. Яка площина називається спрямною, як вона будується?
7. Назвіть вектори і площини тригранника Френе.

### 4.3. ДИСКРЕТНІ КРИВИНА І СКРУТ

У курсі диференціальної геометрії доводиться важливе для нас положення. Якщо зсув уздовж кривої записати в параметричній формі від довжини дуги  $S$  і покласти  $S$  - нескінченно малою першого порядку, то зсув по  $X$  буде того ж порядку, по  $Y$  - другого порядку і по  $Z$  - третього порядку мало-

сті. Це значить, що при русі уздовж кривої від точки  $M$  точка, що рухається, швидше всього віддаляється від нормальної площини (координата  $X$ ) і менш усього від стичної площини (координата  $Z$ ), див. рис.4.3. Тому стичну площину можна вважати приналежною дотичній прямій у т.  $M$  і ще одній точці  $M'$ , нескінченно близькій до  $M$ . Саме це ми візьмемо за основу при побудові тригранника Френе для ДПК.

Спочатку визначимо дотичну в заданому вузлі ДПК за алгоритмами дискретного диференціювання (див. п. 2.8). Якщо немає особливих вимог до точності, то простіше всього дотичну  $t_i$  провести паралельно хорді  $(i-1, i+1)$  СЛЛ просторової ДПК. Координати вектора дотичної в цьому випадку

$$\vec{t}_i \left\{ 1, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}, \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \right\}.$$

Визначаємо нормальну площину, що проходить через  $i$ -у точку

$$(x - x_i) + (y - y_i) \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + (z - z_i) \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = 0. \quad (4.18)$$

Серед точок  $(i-1)$  і  $(i+1)$  знаходимо найближчу до  $i$ -ї. Нехай для визначеності це буде точка  $(i-1)$ . Тоді дотична  $t_i$  і точка  $(i-1)$  визначають стичну площину, у якій відповідно до раніше викладеного знаходиться нескінченно малий окіл точки  $i$ . Рівняння цієї площини:

$$\begin{vmatrix} x - x_i & y - y_i & z - z_i \\ x_i - x_{i-1} & y_i - y_{i-1} & z_i - z_{i-1} \\ 1 & \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} & \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.19)$$

Перетин двох площин (4.18) і (4.19) дає напрямок головної нормалі. Координати вектора нормалі  $\vec{n} = n_x; n_y; n_z$ , де

$$\begin{aligned} n_x &= (x_i - x_{i-1})^2 + k_y^2 - (x_i - y_{i-1})^2 k_y - (x_i - z_{i-1})^2 k_z, \\ n_y &= -(x_i - x_{i-1})^2 k_y + (y_i - y_{i-1})^2 (1 + k_z^2) - (x_i - z_{i-1})^2 k_z k_y, \\ n_z &= -(x_i - x_{i-1})^2 k_z - (y_i - y_{i-1})^2 k_y k_z + (x_i - z_{i-1})^2 (1 + k_y^2), \\ k_y &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}, \quad k_z = \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Координати центра кривини знаходяться на перетині 3-х площин: (4.18), (4.19) і площини, що проходить перпендикулярно ланці  $(i, i-1)$  через її середину.



$$\left(x - \frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \left(y - \frac{y_i + y_{i-1}}{2}\right) \cdot (y_i - y_{i-1}) + \left(z - \frac{z_i + z_{i-1}}{2}\right) \cdot (z_i - z_{i-1}) = 0 \quad (4.21)$$

Нехай отримані координати центра кривини є  $x_u, y_u, z_u$ .

Тоді радіус кривини  $\rho_i$  в точці  $i$  і кривина  $k_i$  дорівнюють:

$$\rho_i = \sqrt{(x_i - x_u)^2 + (y_i - y_u)^2 + (z_i - z_u)^2}, \quad k_i = \frac{1}{\rho_i}. \quad (4.22)$$

Вектор бінормалі  $b_i$  в точці  $i$  визначаємо, як векторний добуток векторів  $\vec{t}_i$  і  $\vec{n}_i$ . Маємо  $\vec{b} = b_x, b_y, b_z$ ,

$$\begin{aligned} b_x &= k_y \cdot n_z - n_y \cdot k_z, \\ b_y &= n_x \cdot k_z - 1 \cdot n_z, \\ b_z &= 1 \cdot n_y - n_x \cdot k_y. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Спрямна площина, перпендикулярна векторові  $\vec{n}$ , має рівняння

$$(x - x_i) \cdot n_x + (y - y_i) \cdot n_y + (z - z_i) \cdot n_z = 0 \quad (4.24)$$

Тепер перетин 3-х площин: нормальної (4.18), спрямної (4.24) і площини (4.21) дає центр скруту  $O_k(x_k; y_k; z_k)$ . Радіус скруту  $\sigma_i$  і скрут  $\tau_i$  дорівнюють:

$$\sigma_i = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}; \quad \tau_i = \frac{1}{\sigma_i} \quad (4.25)$$

Таким чином отримані формули для визначення векторів і площин тригранника Френе, а також кривини і скруту в т.  $i$  даної ДПК.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке кривина просторової кривої? Як вона обчислюється? Що таке радіус кривини?
2. Що таке скрут просторової кривої? Як він обчислюється? Що таке радіус скруту?
3. Чому дорівнює радіус скруту плоскої кривої?
4. Як побудувати тригранник Френе для просторової ДПК?

## 4.4. НАТУРАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ПРОСТОРОВОЇ ДПК

У курсі диференціальної геометрії розглядаються внутрішні або натуральні рівняння просторової кривої, що відбивають залежність кривини  $k$

(або радіуса  $\rho$ ) і скруту  $\tau$  (або радіуса скруту  $\sigma$ ) від довжини дуги  $S$ :

$$k = k(s), \quad \tau = \tau(s) \quad (4.26)$$

Доводиться, що рівняння (4.26) визначають геометрично єдину криву в просторі з точністю до руху, тобто ніяка інша крива, відмінна від цієї, не може задовольняти рівнянням (4.26).

На відміну від двовимірного випадку внутрішня геометрія просторової кривої визначається двома рівняннями і геометрично представляє просторову криву в системі  $Ok\tau s$ . (рис. 4.4)

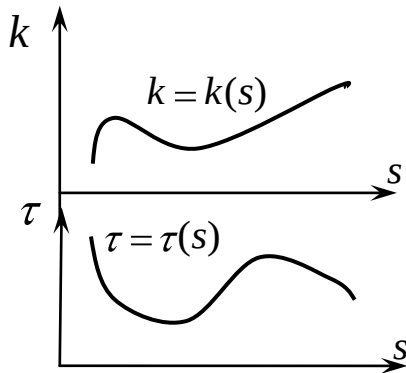


Рисунок 4.4 – Натуральне представлення просторової кривої

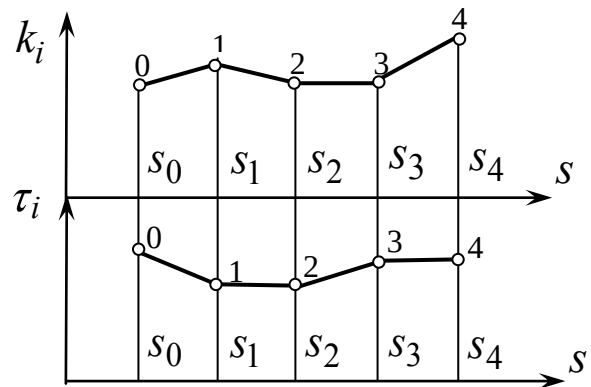


Рисунок 4.5 – Дискретні графіки натуральних координат  $k_i$  і  $\tau_i$  просторової ДПК

Підкреслимо (див. також п.2.8), що в дискретному випадку (рис. 4.5) як і для плоскої ДПК, ми не можемо говорити, що ДПК на рис. 4.5 єдиним чином визначає просторову криву. Але ми можемо говорити про те, що ДПК на рис. 4.5 єдиним чином визначає *просторову ДПК*. Якщо провести згущення ДПК натуральних координат на рис. 4.5, то і відповідна просторова ДПК декартових координат  $x, y, z$  буде зазнавати згущення. Оскільки єдиність такої відповідності зберігається на кожному кроці згущення, то і на заключному кроці кусково-лінійна функція натуральних координат буде єдиним чином визначати кусково-лінійну функцію декартових координат.

Очевидно, що аналогічно п.2.8 (рис. 2.27) за даними ДПК  $k_i = k(s_i)$ ,  $\tau_i = \tau(s_i)$ . (див. рис. 4.5) можна побудувати в просторі єдину за формою ДПК у вихідній системі  $Oxyz$ . Однак, ці обчислення (і побудови) відрізняються великою складністю і виходять за рамки даного посібника.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Назвіть натуральні координати просторової кривої.
2. Як будується натуральне представлення просторової ДПК?
3. Дана ДПК у натуральних координатах  $Ok\tau s$ . Що їй відповідає у вихідному просторі  $Oxyz$ ?

#### 4.5. ФОРМОУТВОРЕННЯ ПРОСТОРОВОЇ ДПК ЗА ЗАДАНИМИ УМОВАМИ

Раніше в п. 4.1 ми розглядали дискретні представлення просторової ДПК за допомогою двох ДПК – проєкцій  $y(x_i)$  і  $z(x_i)$  (рис. 4.1) або трьох параметричних ДПК  $x(i), y(i), z(i)$  на рис. 4.2. Усі ці представлення є плоскими, двовимірними. Природно спробувати задачу формоутворення просторових ДПК вирішити на основі сукупності двовимірних задач, розглянутих раніше в п. 2.9. Складність такого підходу, хоча інший важко собі уявити, полягає в наступному:

- як від умов, поставлених у просторі, перейти до умов на площинах  $yOx, zOx$  або  $xOy, xOz, yOz$ ?
- як здійснити зворотний перехід, тобто визначити значення параметрів просторової ДПК на основі отриманих у результаті розв’язання двовимірних задач значень параметрів плоских ДПК?

Таким чином, головною задачею дослідника є розв’язання цих двох питань перш, ніж здійснювати формоутворення плоских ДПК, що моделюють просторову. Варто мати на увазі, що просте перенесення параметрів плоскої ДПК на просторову в багатьох випадках не має місця або вимагає уточнення. Наприклад, для завдання ланки СЛЛ на площині досить початкової точки, кута нахилу  $\alpha$  до осі  $Ox$  і власне довжини ланки. Для завдання ланки СЛЛ у просторі недостатньо початкової точки і її довжини. Потрібно мати ще 2 кути нахилу  $\alpha$  і  $\beta$  відрізка до площин  $yOx$  і  $zOx$ . Як погодити кути нахилу  $\alpha$  до площини  $yOx$  і  $\beta$  до площини  $zOx$  з кутами нахилу проєкцій ланки на ці площини з віссю  $Ox$ ? Або як погодити довжину ланки в просторі з довжиною ланок її проєкцій на названі площини?

Іншими словами: перш, ніж приступати до формоутворення просторової ДПК, потрібно на основі просторових вимог сформулювати умови для кожного з двох (або трьох) плоских зображень, сформулювати задачу для кожного з них і потім застосувати методи п. 2.9. для двовимірного формоутворення на кожній із проєкцій.

Розглянемо геометричні умови, реалізовані в процесі формоутворення просторової ДПК:

- інцидентність деяким заздалегідь заданим точками  $(x_i, y_i, z_i)$  неважливо яким: опорним (характерним) або проміжним;
- задані закони зміни параметрів або задані сукупності їхніх значень у різних сполученнях  $\{\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \gamma_{1i}, \gamma_{2i}, \ell_{1i}, \ell_{2i}\}$  на кожній із проєкцій і т.д. Під різними сполученнями мається на увазі автономність формування кожної з проєкцій. Наприклад, проєкція  $yOx$  формується за множиною  $\alpha_{1i}$ , а проєкція  $zOx$  формується за множиною  $\ell_{2i}$  і т.п.;
- диференціально-геометричні властивості у вигляді заданих законів зміни або заданих сукупностей значень скінченних або поділених різниць або заданих похідних уздовж точок ряду на кожній із проєкцій;

- додаткові залежності між координатами точок формованих рядів на різних проекціях, зокрема між  $y_i$  і  $z_i$  або  $x_i, y_i$  й  $z_i$  і т.п.;
- ланки СЛЛ заданої довжини, в окремому випадку – умова формування рівноланкової СЛЛ.

Формування неоднозначних просторових ДПК нічим не відрізняється від аналогічних плоских ДПК, за винятком того, що розв’язання здійснюється не на двох проекціях  $x(i)$  і  $y(i)$ , а на трьох  $x(i), y(i)$  і  $z(i)$ . Ці розв’язання можуть здійснюватися незалежно одне від одного, якщо (як додаткові умови) не накладена залежність між координатами. Тоді розв’язується спільна система рівнянь, аналогічна (2.46).

У випадку просторової ДПК непридатним стає поняття осциляції для самої форми ДПК, хоча ми можемо говорити про осциляцію графіків деяких її параметрів (кривини, скруту) у залежності від номера точки ДПК. Можна як додаткові умови формоутворення висувати вимоги відсутності їхньої осциляції, хоча реалізувати це нелегко. Одне можна стверджувати, що точність формоутворення просторової ДПК буде вище, якщо її плоскі ДПК – проекції будуть позбавлені осциляції. Таку умову неважко реалізувати, скориставшись алгоритмом керування формою (п.2.9), і ми його будемо застосовувати при розв’язанні задач відповідно до раніше викладених умов.

Розглянемо розв’язання задач, аналогічних задачам 1-9 (п. 2.9).

**Задача 1.** Сформувати ДПК, інцидентну точками

$A(10;20;80)$ ,  $B(26;50;60)$ ,  $C(50;80;50)$ ,  $D(90;30;70)$ .

На відміну від аналогічної задачі п. 2.9 задані точки не мають номерів, сітка уздовж осі  $Ox$  нерівномірна. Ми вже переконалися, що різниці рівняння мають найбільш простий вигляд на рівномірній сітці. Простіше всього задачу вирішувати на трьох проекціях  $x(i), y(i), z(i)$ , привласнивши точкам номери від 1 до 4, відповідно до зростання координати  $x_i$ . Але можна спробувати замість 3-х проекцій вирішувати задачу на двох проекціях  $y(x)$  і  $z(x)$ , якщо сформувати рівномірну сітку уздовж осі  $Ox$  так, що задані точки будуть у її вузлах. Для цього треба знайти такий крок сітки, який був би найбільшим загальним дільником (НЗД) наявних кроків:  $h_1 = x_B - x_A = 26 - 10 = 16$ ,  $h_2 = 50 - 26 = 24$ ,  $h_3 = 90 - 50 = 40$ . Неважко бачити, що такий НЗД є  $h = 8$ . Тоді точка  $A$  – початкова  $i = 0$ , т.т.  $B - i = 2, C - i = 5, D - i = 10$ . Невідомі точки ряду  $i = 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9$ . Тепер можна для кожної з координат  $y_i$  і  $z_i$  ( $x_i$  можна не враховувати, оскільки  $x_i$  ідентифікується з номером точки на рівномірній сітці) скласти систему, аналогічну (2.22)

$$u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2} = 0, \quad i = \overline{2;8}; \quad (4.27)$$

де  $u$  – позначення узагальненої координати ( $y_i$  або  $z_i$ ).

Ряд усього має 11 точок, з них 4 – відомі. Невідомих – 7. Число рівнянь – 7. Підставляючи в систему для  $y_i$  відомі координати  $y_0 = 20, y_2 = 50, y_5 = 80, y_{10} = 30$ , визначаємо ординати інших точок (див. таблицю 4.1). Аналогічно знаходимо абсциси відсутніх точок із системи (4.27) для  $u_i = z_i$  при  $z_0 = 80, z_2 = 60, z_5 = 50, z_{10} = 70$ .

Таблиця 4.1 – Результати розрахунків задачі 1

| $i$ | 0         | 1    | 2         | 3     | 4    | 5         | 6    | 7     | 8    | 9    | 10        |
|-----|-----------|------|-----------|-------|------|-----------|------|-------|------|------|-----------|
| $x$ | <b>10</b> | 18   | <b>26</b> | 34    | 42   | <b>50</b> | 58   | 66    | 74   | 82   | <b>90</b> |
| $y$ | <b>20</b> | 35,4 | <b>50</b> | 62,9  | 73,2 | <b>80</b> | 82,4 | 79,5  | 70,4 | 54,2 | <b>30</b> |
| $z$ | <b>80</b> | 68,5 | <b>60</b> | 54,25 | 51   | <b>50</b> | 51   | 53,75 | 58   | 63,5 | <b>70</b> |

Як бачимо, при розв'язанні просторової задачі ми двічі скористалися методикою аналогічної двовимірної задачі 1 п. 2.7. Новим тут є вибір НЗД, оскільки номери заданих точок на рівномірній сітці не відомі. Наочне зображення просторової ДПК представлено на рис. 4.6.

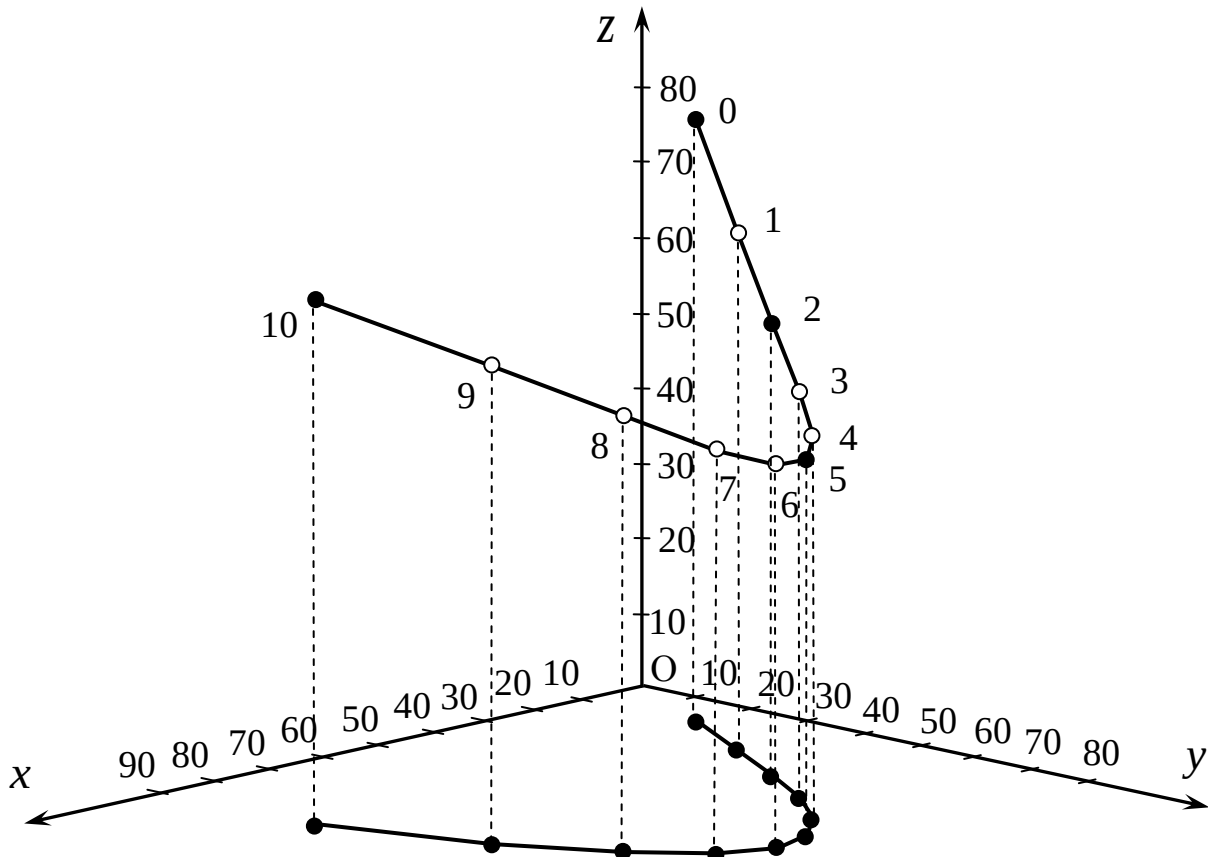


Рисунок 4.6 – Наочне зображення просторової ДПК (задача 1)

**Задача 2.** Сформулювати просторову ДПК, інцидентну точці  $A (x_0 = 10, y_0 = 90, z_0 = 30)$  від  $i = 0$  до  $i = 11$  з кроком  $h = 10$  мм за заданими сукупностями значень кутів нахилу  $\alpha_i$  горизонтальних проекцій ланок СЛЛ до осі  $Ox$  і довжин фронтальних проекцій  $\ell'_i$ .

|                 |     |    |     |    |    |    |
|-----------------|-----|----|-----|----|----|----|
| $i$             | 2   | 3  | 6   | 7  | 9  | 10 |
| $\alpha_{град}$ | -58 |    | -10 |    | 47 |    |
| $\ell'_{мм}$    |     | 30 |     | 22 |    | 12 |

Крок сітки відомий. Проекції  $yOx$  і  $zOx$  незалежні одна від одної. Тому формуємо їх автономно. Помітимо, що горизонтальна проекція в точності збігається з задачею 2 п.2.7. і розв'язок її відомий. Скориставшись цим, формуємо тільки фронтальну проекцію. Кількість інцидентів  $\ell'_i$  дорівнює трьом. Отже, для формування множини відсутніх значень  $\ell'_i$  можна скористатися системою різницевих рівнянь 3-го порядку, аналогічною (2.39), при відомих  $\ell'_3 = 30$ ,  $\ell'_7 = 22$ ,  $\ell'_{10} = 12$ . Результати розв'язання зведені в табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Результати розв'язання задачі 2

|          |           |      |            |           |       |       |            |           |       |           |           |       |
|----------|-----------|------|------------|-----------|-------|-------|------------|-----------|-------|-----------|-----------|-------|
| $i$      | 0         | 1    | 2          | 3         | 4     | 5     | 6          | 7         | 8     | 9         | 10        | 11    |
| $x$      | <u>10</u> | 20   | 30         | 40        | 50    | 60    | 70         | 80        | 90    | 100       | 110       | 120   |
| $\alpha$ | -70       | -65  | <u>-58</u> | -49       | -38   | -25   | <u>-10</u> | 7         | 26    | <u>47</u> | 70        | –     |
| $\ell'$  | 32        | 31,7 | 31,1       | <u>30</u> | 28,57 | 26,76 | 24,57      | <u>22</u> | 19,05 | 15,7      | <u>12</u> | –     |
| $y$      | <u>90</u> | 62,5 | 41,1       | 25,08     | 13,58 | 5,767 | 1,104      | 0,659     | 0,569 | 5,45      | 16,17     | 38,64 |
| $z$      | <u>30</u> | 60,4 | 90,5       | 119,9     | 148,2 | 174,9 | 199,8      | 222,2     | 241,8 | 256       | 270,1     | 276,8 |

Маючи повний набір значень  $\alpha_i$  і  $\ell'_i$ ,  $i = \overline{0;10}$ , можна на заданій сітці визначити ординати й аплікати точок ряду. Ордината довільної точки ДПК на рівномірній сітці з кроком  $h$ , початковою точкою  $\langle 0, y_0 \rangle$  і множиною значень  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{0;10}$ , визначається за формулою:

$$y_{i+1} = y_0 + h \cdot \sum_{k=0}^i \operatorname{tg} \alpha_k, \quad i = \overline{0;10}. \quad (4.28)$$

Апліката довільної точки ДПК за тих самих умов і множині значень  $\ell'_i$ ,  $i = \overline{0;10}$ , визначається за формулою:

$$z_{i+1} = z_0 + \sum_{k=0}^i \left( \ell_k'^2 - h^2 \right)^{1/2}, \quad i = \overline{0;10}. \quad (4.29)$$

Помітимо, що побудовану ДПК можна стиснути або розтягти уздовж осі  $Ox$  в  $k$  разів,  $k \in \mathbb{P}; n$ , дотримуючись рівномірності сітки  $Ox$ . При цьому зміняться значення  $\alpha_i, \ell'_i$ , але відповідність їхніх значень системам, аналогічним (2.39), залишиться. Залишаться колишніми значення  $y_i, z_i$ . Цим

можна користуватися в практичних розрахунках, сформувавши банк ДПК за даними співвідношеннями параметрів на деякій стандартній сітці абсцис (припустимо  $h = 10$ ) і потім «розмножувати» їх розтяганням уздовж осі  $Ox$  при  $h = \text{const} \neq 10$ .

**Задача 3.** Сформувати просторову ДПК від  $i = 0$  до  $i = 11$ , якщо задані:

- точка інциденції  $x_3 = 40, y_3 = 60, z_3 = 80$ ;
- довжини горизонтальних проекцій ланок:  $\ell_{21} = 18, \ell_{61} = 12, \ell_{81} = 16$ ;
- кути нахилу горизонтальних проекцій ланок до осі  $Ox$ :  $\alpha_3 = 30^\circ, \alpha_5 = 15^\circ, \alpha_9 = -30^\circ$ ;
- кути нахилу фронтальних проекцій ланок до осі  $Ox$ :  $\alpha'_0 = -60^\circ, \alpha'_6 = -18^\circ, \alpha'_{10} = -10^\circ$ .

Проаналізуємо умову. Вихідні дані дозволяють однозначно побудувати горизонтальну проекцію ДПК. Така задача нами уже вирішена (див. задача 4, п. 2.9.). На фронтальній проекції даних недостатньо, щоб побудувати ДПК. Однак, вимоги проекційного зв'язку (відповідні точки двох проекцій повинні розташовуватися на одній лінії зв'язку, перпендикулярній осі  $Ox$ ) дозволяють доповнити умову сіткою осі  $Ox$ , що утворилась після розв'язання задачі на горизонтальній проекції, і побудувати фронтальні проекції точок ряду.

Перенесемо результати розв'язання задачі 4 (п.2.9.) у таблицю 4.3.

Таблиця 4.3 – Результати розв'язання задачі 3.

| $i$              | 0                 | 1     | 2                | 3                | 4    | 5                | 6                 | 7     | 8                | 9                 | 10                | 11    |
|------------------|-------------------|-------|------------------|------------------|------|------------------|-------------------|-------|------------------|-------------------|-------------------|-------|
| $\ell_{1,mm}$    | 28                | 22,4  | <b><u>18</u></b> | 14,75            | 12,7 | 11,75            | <b><u>12</u></b>  | 13,42 | <b><u>16</u></b> | 19,75             | 24,67             | -     |
| $\alpha_{град}$  | 43,12             | 40    | 35,6             | <b><u>30</u></b> | 23,1 | <b><u>15</u></b> | 5,625             | -5    | -16,88           | <b><u>-30</u></b> | -44,37            | -     |
| $x_{mm}$         | -12,3             | 8,18  | 25,3             | <b><u>40</u></b> | 52,8 | 64,43            | 75,78             | 87,72 | 101,1            | 116,4             | 133,5             | 151,1 |
| $y_{mm}$         | 16,04             | 35,1  | 49,5             | <b><u>60</u></b> | 67,4 | 72,32            | 75,36             | 76,5  | 75,33            | 70,65             | 60,77             | 43,5  |
| $\alpha'_{град}$ | <b><u>-60</u></b> | -50,5 | -42              | -34,5            | -28  | -22,5            | <b><u>-18</u></b> | -14,5 | -12              | -10,5             | <b><u>-10</u></b> |       |
| $z_{mm}$         | 47,95             | 58,2  | 69,1             | <b><u>80</u></b> | 90,5 | 100,8            | 111,3             | 122,7 | 136,4            | 150,6             | 167,4             | 184,7 |

Зважаючи на те, що кути  $\alpha'$  незалежні від параметрів горизонтальної проекції, сформуємо їхню множину на основі розв'язання системи різнице-вих рівнянь 3-го порядку, аналогічної (2.24), при відомих  $\alpha'_0 = -60^\circ, \alpha'_6 = -18^\circ, \alpha'_{10} = -10^\circ$ . Результати розрахунків представлені в табл. 4.3. Тепер можна розрахувати аплікати вузлів ДПК вправо від точки інциденції

$$z_i = z_3 + \sum_{k=4}^i (x_k - x_{k-1}) \cdot \cos \alpha'_{k-1}, i = \overline{4;11} \quad (4.30)$$

уліво від точки інциденції

$$z_j = z_3 - \sum_{k=j+1}^3 (x_k - x_{k-1}) \cdot \cos \alpha'_{k-1}, j = \overline{0;2}. \quad (4.31)$$

Результати представлені в останньому рядку табл. 4.3. Наочне зображення сформованої ДПК представлено на рис. 4.7.

Розглянемо задачу формоутворення просторової ДПК за деякою множиною  $\ell_k$  довжин її ланок у просторі і двом множинам значень кутів нахилу  $\alpha_i$  деяких ланок до площини  $xOy$  і кутів  $\beta_j$  інших ланок до площини  $zOx$ . Підкреслимо, що кути  $\alpha_i, \beta_j$  і довжини  $\ell_k$  задані в просторі. Щоб застосувати методи двовимірного формоутворення, треба сформулювати на підставі просторової задачі дві двовимірні задачі для площин  $xOy$  і  $zOx$ .

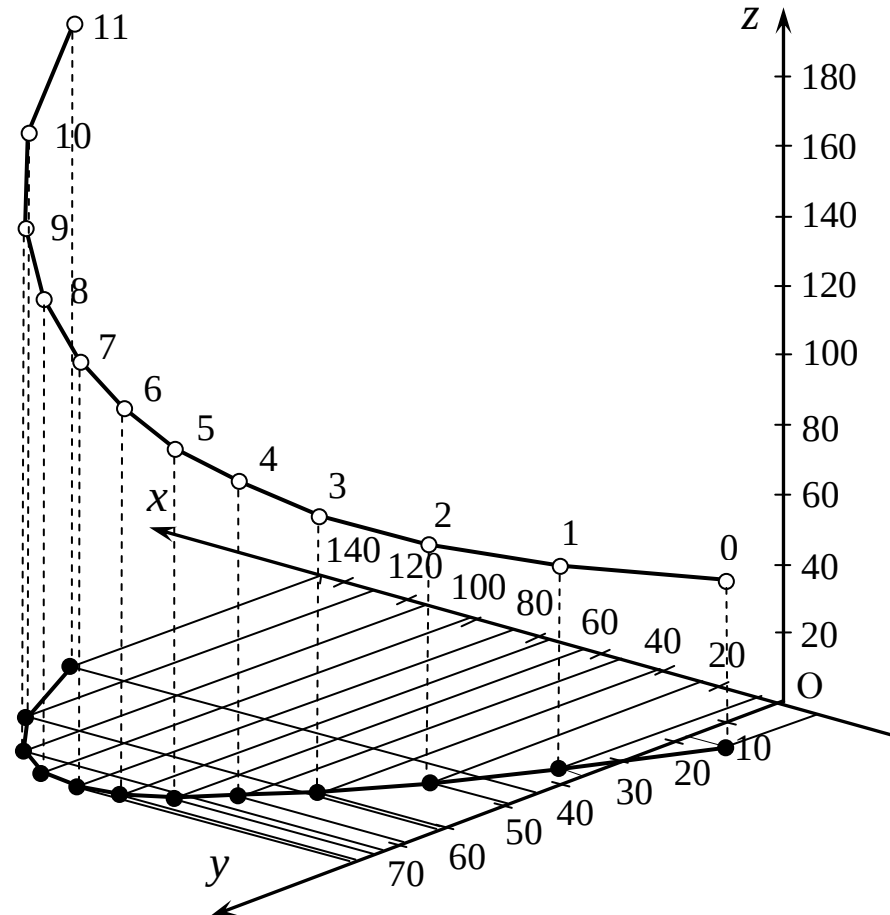


Рисунок 4.7 – Наочне зображення просторової ДПК (задача 3)

Звернемося до рис. 4.8, що ілюструє відомий з нарисної геометрії спосіб визначення натуральної величини відрізка  $AB$  за його проекціями  $A_1B_1$  і  $A_2B_2$ . Нам відомі: натуральна величина  $\ell_i$  і кути  $\alpha_i$  і  $\beta_i$ .



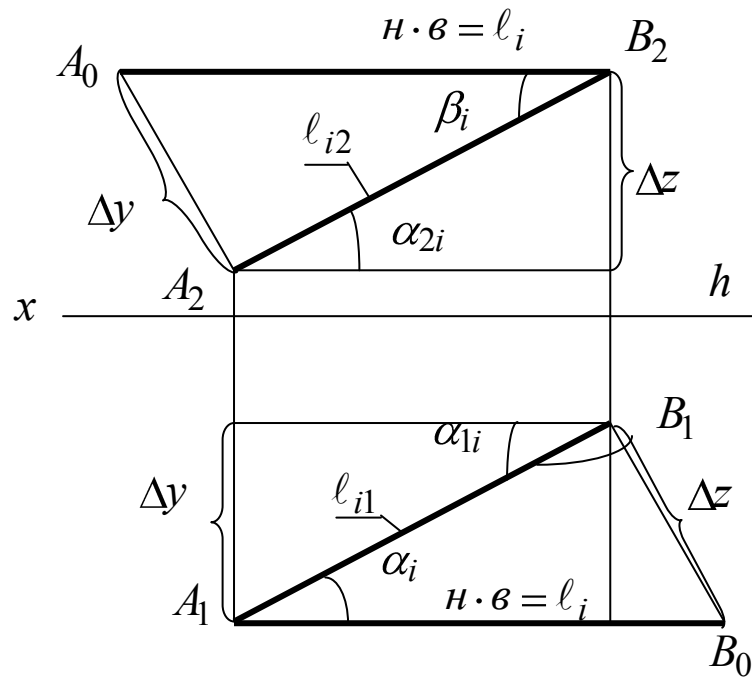


Рисунок 4.8 – До визначення залежностей між параметрами відрізка  $AB$  і його проекцій  $A_1B_1$  і  $A_2B_2$

Тоді довжина горизонтальної проекції

$$\ell_{i1} = \ell_i \cdot \cos \alpha_i, \quad (4.32)$$

фронтальної проекції

$$\ell_{i2} = \ell_i \cdot \cos \beta_i, \quad (4.33)$$

перевищення кінців відрізка

$$\Delta z_i = \ell_i \cdot \sin \alpha_i, \quad \Delta y_i = \ell_i \cdot \sin \beta_i. \quad (4.34)$$

Кути нахилу проекцій відрізка до осі  $Ox$

$$\alpha_{1i} = \arcsin \frac{\Delta y}{\ell_{i1}} = \arcsin \frac{\sin \beta_i}{\cos \alpha_i}, \quad (4.35)$$

$$\alpha_{2i} = \arcsin \frac{\Delta z}{\ell_{i2}} = \arcsin \frac{\sin \alpha_i}{\cos \beta_i}. \quad (4.36)$$

Таким чином, отримані усі формули, щоб здійснити перехід від  $\ell_k, \alpha_i, \beta_j$  до відповідних параметрів проекцій і сформулювати двовимірні задачі.

Залишилося нез'ясованим одне питання. Чи можна при такій структурі вихідних даних побудувати ДПК на рівномірній сітці абсцис?

Запишемо вираз для кроку сітки  $h_i$  через горизонтальну проекцію

$$h_i = \sqrt{\ell_{i1}^2 - \Delta y^2} = \ell_i \sqrt{\cos^2 \alpha_i - \sin^2 \beta_i}, \quad (4.37)$$

через фронтальну проекцію

$$h_i = \ell_i \sqrt{\cos^2 \beta_i - \sin^2 \alpha_i}. \quad (4.38)$$

Тут виникають два питання:

- чи будуть однакові значення  $h_i$  з (4.37) і (4.38) для заданих  $l_i, \alpha_i$  і  $\beta_i$ ?
- чи будуть однаковими значення  $h_i$  і  $h_{i+1}$  для  $\ell_i$  і сусідньої з ним ланки  $\ell_{i+1}$ ?

Від цього залежить формування сітки абсцис.

Відповідаючи на перше питання, порівнюємо  $h$  з (4.37) і (4.38). Маємо

$$\sqrt{\cos^2 \alpha_i - \sin^2 \beta_i} = \sqrt{\cos^2 \beta_i - \sin^2 \alpha_i}.$$

Після зведення в квадрат і перетворення маємо відому тотожність

$$\sin^2 \alpha_i + \cos^2 \alpha_i = \sin^2 \beta_i + \cos^2 \beta_i = 1,$$

що свідчить про те, що при будь-яких  $\ell_i, \alpha_i, \beta_i$  проекційний зв'язок кінців відрізка буде забезпечений.

Стосовно другого питання, запишемо  $h_{i+1} = \ell_{i+1} \sqrt{\cos^2 \alpha_{i+1} - \sin^2 \beta_{i+1}}$ , відкіля очевидно, що  $h_i \neq h_{i+1}$ . Ця рівність може виявитися тільки у винятковому випадку.

Таким чином, дійдемо висновку, що поставлена задача не може бути вирішена на рівномірній сітці абсцис. Щоб перейти до рівномірної сітки, треба скористатися параметричними представленнями параметрів  $\ell, \alpha, \beta$  від номера точки.

**Задача 4.** Сформувати просторову ДПК від  $i = 1$  до  $i = 8$ , якщо задані:

- точка інциденції  $x_4 = 45, y_4 = 50, z_4 = 70$ ;
- довжини ланок у просторі  $\ell_2 = 20, \ell_5 = 28, \ell_7 = 16$ ;
- кути нахилу  $\alpha_i$  ланок до площини  $xOy$ :  $\alpha_1 = -30^\circ, \alpha_4 = -10^\circ, \alpha_6 = 20^\circ$ ;
- кути нахилу  $\beta_i$  ланок до площини  $zOx$ :  $\beta_1 = -40^\circ, \beta_3 = -20^\circ, \beta_6 = 15^\circ$ .

Спосіб розв'язання складається в попереднім формуванні відсутніх значень  $\ell_i, \alpha_i, \beta_i$  у просторі, а потім у переході до двовимірних задач і формуванні ДПК на кожній із проекцій. Параметри  $\ell_i, \alpha_i$  і  $\beta_i$  незалежні один від одного, мають по 3 заздалегідь задані значення. Тому для заповнення їхніх значень можна скористатися скінченно-різницевою системою 3-го порядку

$$\begin{aligned} u_1 - 3u_2 + 3u_3 - u_4 &= 0, \\ u_2 - 3u_3 + 3u_4 - u_5 &= 0, \\ u_3 - 3u_4 + 3u_5 - u_6 &= 0, \\ u_4 - 3u_5 + 3u_6 - u_7 &= 0, \end{aligned} \tag{4.39}$$

де  $u$  – позначення узагальненого параметра ( $\ell, \alpha$  або  $\beta$ ). Невідомих – 7, з них задані – 3, підлягають визначенню – 4, число рівнянь – 4. Підставляємо задані  $\ell_2 = 20, \ell_5 = 28, \ell_7 = 16$  в систему (4.39) визначаємо відсутні  $\ell_i$ .

Аналогічно поводимося з кутами  $\alpha_1 = -30^\circ, \alpha_4 = -10^\circ, \alpha_6 = 20^\circ$ , а також  $\beta_1 = -40^\circ, \beta_3 = -20^\circ, \beta_6 = 15$  і визначаємо їхні відсутні значення в інших вузлах ДПК. Результати зводимо в табл. 4.4.

Маючи повний набір  $\ell_i, \alpha_i, \beta_i$  розраховуємо крок  $h_i$  абсцис за формулою (4.37) або (4.38), і сітку  $x_i, i = \overline{1;8}$ ,

$$x_{i+1} = x_i + h_i, \quad i = \overline{1;7}. \quad (4.40)$$

Таблиця 4.4 – Результати розв'язання задачі 4.

| $i$             | 1          | 2         | 3          | 4          | 5         | 6         | 7         | 8     |
|-----------------|------------|-----------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|-------|
| $\ell_{,mm}$    | 10,4       | <b>20</b> | 26,13      | 28,8       | <b>28</b> | 23,73     | <b>16</b> | –     |
| $\alpha_{град}$ | <b>-30</b> | -26,67    | -20        | <b>-10</b> | 3,33      | <b>20</b> | 40        | –     |
| $\beta_{град}$  | <b>-40</b> | -30,33    | <b>-20</b> | -9         | 2,67      | <b>15</b> | 28        | –     |
| $h_{,mm}$       | 6,04       | 14,74     | 22,87      | 28,00      | 27,92     | 21,44     | 9,69      | –     |
| $x$             | 1,35       | 7,38      | 22,13      | 45         | 73,00     | 100,92    | 122,36    | –     |
| $y$             | 75,72      | 69,04     | 58,94      | 50         | 45,49     | 46,80     | 52,94     | 60,45 |
| $z$             | 93,11      | 75,72     | 78,94      | 70         | 65,00     | 66,63     | 74,74     | 85,03 |
| $l_1$           | 9,01       | 17,87     | 24,56      | 28,36      | 27,95     | 22,30     | 12,26     | –     |
| $\alpha_1$      | -0,84      | -0,6      | -0,77      | -0,16      | 0,05      | 0,28      | 0,66      | –     |
| $\ell_2$        | 7,97       | 17,26     | 24,56      | 28,44      | 27,97     | 22,92     | 14,13     | –     |
| $\alpha_2$      | -0,71      | -0,55     | -0,39      | -0,18      | 0,06      | 0,36      | 0,82      | –     |

Розраховуємо перевищення ординат  $\Delta y_i$  і аплікати  $\Delta z_i$  за формулою (4.34) і координат точок ряду

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, z_{i+1} = z_i + \Delta z_i, i = \overline{1;7}. \quad (4.41)$$

Маючи координати точок ряду, можна побудувати його проекції на площинах  $xOy$  й  $zOx$  а також наочне зображення (рис. 4.9)

При необхідності можна розрахувати довжини проекцій  $\ell_{1i}$  і  $\ell_{2i}$  ланок  $\ell_i$  згідно з (4.32) і (4.33), а також їхнього нахилу  $\alpha_{1i}$  і  $\alpha_{2i}$  до осі  $Ox$  згідно з (4.35) і (4.36).

Дискретним аналогом неперервних похідних, як уже раніше вказувалося, є поділені або скінченні (на одиничній сітці) різниці. Для просторової ДПК різниці не мають змісту, але вони залишаються в силі для її проекцій. Суперпозиція різниць на цих проекціях визначає похідну у вузлі просторової ДПК. Тому можна ставити задачу про формоутворення просторової ДПК за заданими множинами значень (наприклад, других) різниць в деяких її вузлах на площинах проекцій.

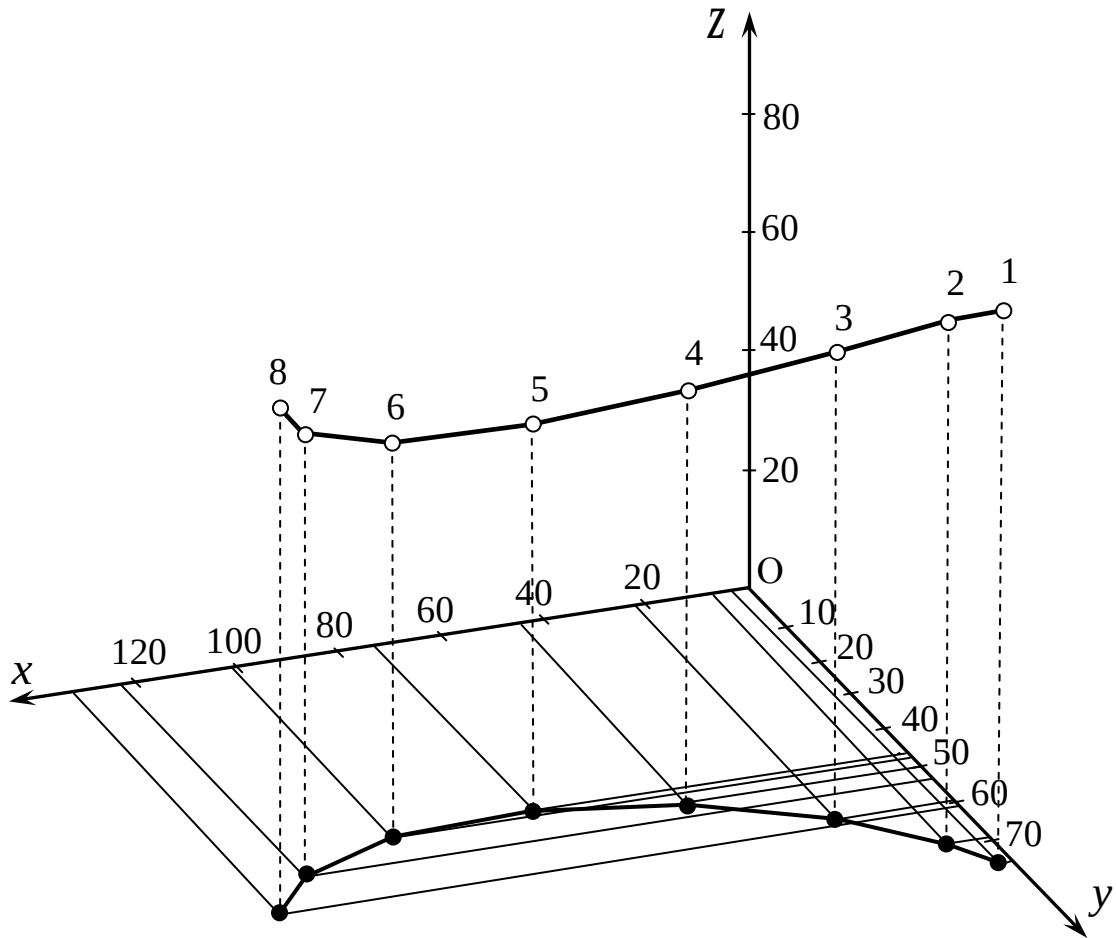


Рисунок 4.9 – Наочне зображення просторової ДПК (задача 4)

**Задача 5.** Сформувати просторову ДПК від  $i=0$  до  $i=10$  на сітці  $h=10$ , якщо задано початкову точку  $i=0$  (10;90;30), кінцеву  $i=10$  (110;40;50) і сукупність значень других скінченних різниць  $\delta_{iy}$  і  $\delta_{iz}$  точкових рядів на площинах проекцій:

$$\delta_{1y} = 15, \delta_{5y} = 10, \delta_{8y} = 6, \delta_{3z} = -10, \delta_{6z} = -8, \delta_{9z} = -3.$$

Скористаємося тим, що  $\delta_{iy}$  і  $\delta_{iz}$  незалежні одна від одної і сформуємо множини відсутніх значень кожної з них шляхом розв'язання системи різницьових рівнянь 3-го порядку, аналогічно (4.39), оскільки кількість відомих значень дорівнює трьом. Результати розв'язань зводимо в таблицю 4.5.

Маючи повну сукупність значень  $\delta_{iy}$ , складаємо систему рівнянь для визначення ординат проміжних точок

$$\begin{aligned}
y_0 - 2y_1 + y_2 &= \delta_{1y}, \\
y_1 - 2y_2 + y_3 &= \delta_{2y}, \\
y_2 - 2y_3 + y_4 &= \delta_{3y}, \\
y_3 - 2y_4 + y_5 &= \delta_{4y}, \\
y_4 - 2y_5 + y_6 &= \delta_{5y}, \\
&\dots \\
y_8 - 2y_9 + y_{10} &= \delta_{9y}.
\end{aligned}
\tag{4.42}$$

Усього точок – 11, відомих – 2, невідомих – 9, рівнянь – 9. Підставляючи в (4.42)  $y_0 = 90$ ,  $y_{10} = 40$  і значення  $\delta_{iy}$  в правій частині, визначені раніше, розв'язуємо систему і знаходимо  $y_i, i = \overline{1;9}$ . Аналогічно поводимося з аплікатами  $z_i$ , складаючи систему аналогічно (4.42) і розв'язуючи її при відомих  $z_0 = 30, z_{10} = 50$ , і множині  $\delta_{iz}$  в правій частині.

Результати зводимо в табл. 4.5. Помітимо, що горизонтальна проекція ДПК – увігнута ( $\delta_{iy} > 0$ ), а фронтальна – опукла ( $\delta_{iz} < 0$ ). Це дозволяє сподіватися на відсутність осциляції параметрів просторової ДПК.

Таблиця 4.5 – Результати розв'язання задачі 5

| $i$        | 0  | 1         | 2     | 3          | 4     | 5         | 6         | 7      | 8        | 9         | 10 |
|------------|----|-----------|-------|------------|-------|-----------|-----------|--------|----------|-----------|----|
| $\delta_y$ | -  | <b>15</b> | 13,79 | 12,55      | 11,3  | <b>10</b> | 8,69      | 7,36   | <b>6</b> | 4,62      | -  |
| $\delta_z$ | -  | -9,67     | -10   | <b>-10</b> | -9,67 | -9        | <b>-8</b> | -6,67  | -5       | <b>-3</b> | -  |
| $y$        | 90 | 32,6      | -9,85 | -38,5      | -54,6 | -59,40    | -54,21    | -40,33 | -19,1    | 8,14      | 40 |
| $z$        | 30 | 72,5      | 105,3 | 128,2      | 141   | 144,2     | 138,3     | 124,5  | 104      | 78,5      | 50 |

Дотепер ми розглядали задачі, у яких координати вузлів просторової ДПК були незалежні. Очевидно, що в процесі моделювання можуть виникнути задачі, де деякі (може бути й усі) координати будуть зв'язані деякими залежностями (див. також задачу 6, п. 2.9.). У цьому випадку виконується параметричний аналіз задачі, установлюється порядок різницьових рівнянь для кожної з координат (тепер таких систем буде три, а не дві, як у задачі 6), до них додаються задані залежності і вся ця спільна система вирішується на ЕОМ. Отримані при цьому координати точок визначають вузли просторової ДПК.

Єдиною вимогою до згаданих залежностей є їхня лінійність.

Торкаючись формоутворення просторових ДПК з урахуванням заданих похідних, відзначимо наступне:

- у вузлах ДПК можуть бути задані тільки частинні похідні, причому значення похідної  $\frac{\partial z}{\partial x}$  відповідають дотичним у вузлах фронтальної проекції ДПК, а значення  $\frac{\partial y}{\partial x}$  – дотичним у вузлах горизонтальної проекції ДПК;
- при розв’язанні задач формоутворення похідні замінюються їх різницевиими аналогами, що є лінійними функціями від координат вузлів ДПК, що беруть участь у загальній системі лінійних рівнянь;
- розгляд частинних похідних другого і вище порядків супроводжується значними труднощами конструктивного й обчислювального характерів.

Методика формування загальної системи лінійних рівнянь, що складається із системи лінійних різницевих рівнянь і рівнянь дискретних аналогів похідних, досить докладно показана при розв’язанні задач 6, 7 і 8 (п. 2.9).

Нарешті, розглянемо розв’язання просторової задачі формоутворення рівноланкової ДПК. Спираючись на розв’язання задачі 9 (п. 2.9) помітимо, що рівноланкову ламану в просторі можна побудувати двома способами:

- аналогічно задачі 9 на горизонтальній проекції будується рівноланкова ДПК. Щоб у просторі ланки були однакової довжини, досить, щоб перевищення  $\Delta z$  побудованих кінців ланок були однаковими, що легко досягається за допомогою проекційного зв’язку;
- рівноланкова ламана будується на фронтальній проекції, а горизонтальні проекції вузлів знаходяться за допомогою проекційного зв’язку.

Реалізуємо перший спосіб на основі задачі 9 (п. 2.9).

**Задача 6.** Через задані 3 точки:  $A(x_0 = 10, y_0 = 10, z_0 = 60)$ ,  $B(x_2 = 30, y_2 = 80, z_2 = 40)$ ,  $C(x_5 = 100, y_5 = 20, z_5 = 70)$  побудувати рівноланкову просторову ДПК із точкою 1 на інтервалі  $AB$  і точками 3 і 4 на інтервалі  $BC$ .

Ми спеціально взяли умову, співпадаючою на горизонтальній проекції з умовою задачі 9, (п. 2.9.) щоб скористатися отриманим раніше розв’язком. Там були визначені довжини ланок  $\overline{AB} = 72,80$ ,  $\overline{BC} = 92,195$ .

Візьмемо кут  $\beta$  відмінним від того, що в задачі 9.

Нехай  $\beta = 10^\circ$ .  $\cos \beta = 0,9848$ . З (2.63) визначаємо  $\cos \beta'$  і сам кут  $\beta'$

$$\cos \beta' = \left( \frac{92,195 \cdot 2 \cdot 0,9848}{72,80} - 1 \right) \cdot \frac{1}{2} = 0,74716; \beta' = 41,65^\circ.$$

Визначаємо довжину горизонтальної проекції  $\ell_1$  ланки  $\ell$ :

$$\ell_1 = \frac{\overline{AB}}{2 \cos \beta} = \frac{72,80}{2 \cdot 0,9848} = 36,9618.$$

Визначаємо кути нахилу  $\alpha_0$  і  $\alpha_2$  ланок  $AB$  і  $BC$  до осі  $Ox$ :

$$\sin \alpha_0 = \frac{y_2 - y_0}{AB} = \frac{70}{72,80} = 0,9615, \quad \alpha_0 = 74^\circ$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{y_5 - y_2}{BC} = \frac{-60}{92,195} = -0,6508, \quad \alpha_2 = -40,58^\circ.$$

Розраховуємо координати т.1 згідно з (2.57):

$$x_1 = x_0 + \ell_1 \cos(\alpha_0 + \beta) = 10 + 36,9618 \cdot 0,1045 = 13,8625,$$

$$y_1 = y_0 + \ell_1 \cdot \sin(\alpha_0 + \beta) = 10 + 36,9618 \cdot 0,9945 = 46,7585.$$

Координати точок 3 і 4 розраховуємо згідно з (2.60) і (2.61) і результати заносимо в таблицю 4.6.

Довжина  $\ell_i$   $i$ -ї ланки ДПК у просторі визначається за формулою

$$\ell_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}. \quad (4.43)$$

Відхилення довжин  $\ell_i$  одна від одної обумовлені в основному неточністю визначення функцій  $\cos$  і  $\sin$  при кутах, близьких до  $90^\circ$  або до  $0^\circ$ . Максимальна відносна похибка не перевищує 0,6 %. Креслення сформованої ДПК представлено на рис. 4.10.

Таблиця 4.6 – Результати розрахунків задачі 6

| $i$    | $0 \equiv A$ | 1       | $2 \equiv B$ | 3       | 4       | $5 \equiv C$ |
|--------|--------------|---------|--------------|---------|---------|--------------|
| $x$    | <b>10</b>    | 13,8625 | <b>30</b>    | 66,9544 | 94,4848 | <b>100</b>   |
| $y$    | <b>10</b>    | 46,7585 | <b>80</b>    | 80,6727 | 56,6180 | <b>20</b>    |
| $z$    | <b>60</b>    | 50      | <b>40</b>    | 50      | 60      | <b>70</b>    |
| $\ell$ | 38,2898      | 38,2808 | 38,2894      | 38,2662 | 38,2998 | —            |

Відзначимо ще одну особливість розглянутої задачі. Для того, щоб у просторі довжини ланок були однаковими, треба, щоб довжини горизонтальних їхніх проекцій були однаковими, тобто горизонтальна проекція ДПК повинна бути рівноланковою, а фронтальні проекції вузлів згущення ДПК повинні мати однакові перевищення  $\Delta z$ . Ми спеціально вибрали такі координати  $z_0, z_2$  і  $z_5$ , що

$$\frac{z_2 - z_0}{2} = \frac{z_5 - z_2}{3} = 10.$$

Насправді по співвідношенню аплікати  $z_i$  кінців заданих відрізків треба підібрати НЗД (найбільший загальний дільник), за допомогою якого визначаються число точок на кожному проміжку і який є величиною  $\Delta z$ , однаковою для всіх ланок згущеної ДПК. Припустимо  $z_0 = 80, z_2 = 40, z_5 = 70$ . Тоді  $\Delta z_{02} = 40, \Delta z_{25} = 30$ . НЗД=10. Число точок розподілу на першому проміжку дорівнює 3 (4 ланки), на другому проміжку дорівнює двом (три ланки).

Очевидно, що при такому підході треба мати схеми і формули розподілу даного проміжку рівноланкової ламаної на довільне число частин. Для цього треба провести додаткові дослідження. Тоді розв'язання одержить закінчений вигляд. Нашою метою при розв'язанні задачі 6 було продемонструвати підхід до розв'язання поставленої задачі.

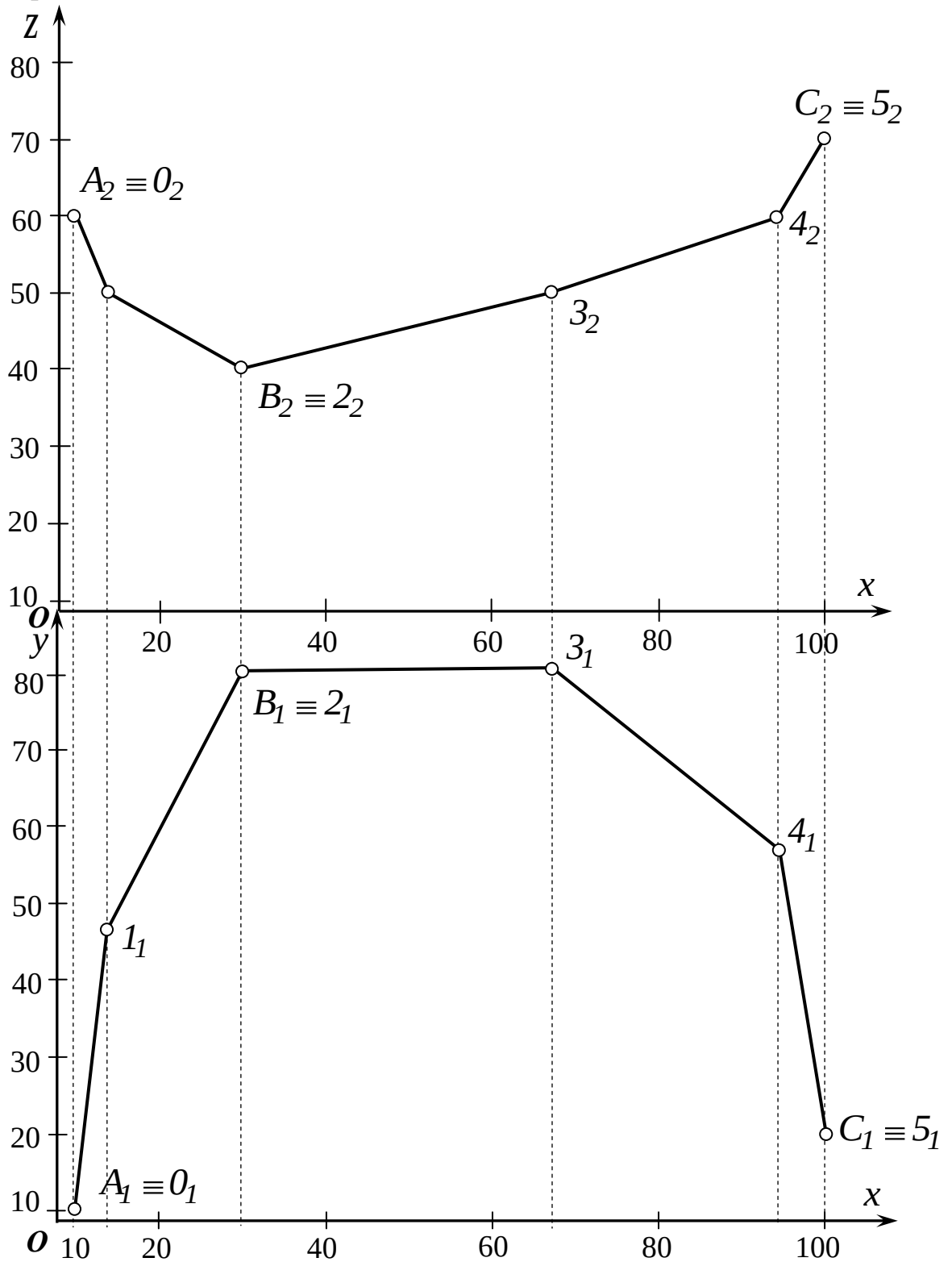


Рисунок 4.10 – Креслення рівноланкової просторової ДПК



## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому особливості формоутворення просторової ДПК?
2. Які принципи покладені в основу формування розрахункових схем формоутворення просторової ДПК?
3. Що означає умова інцидентності і як вона відображається в розрахункових алгоритмах?
4. Як сформулювати умови для задач на площинах проекцій на основі умов просторової задачі?
5. Як враховуються різниці аналогів похідних при формоутворенні просторових ДПК?
6. Як враховуються і забезпечуються додаткові співвідношення між координатами? Які вимоги до цих співвідношень?
7. Які Ви знаєте шляхи формування рівноланкової ламаної просторової лінії?
8. Які вимоги до перевищень координат при формуванні рівноланкової ламаної?
9. Як визначається максимальна кількість ланок рівноланкової просторової ДПК?

### 4.6. ЗГУЩЕННЯ ПРОСТОРОВОЇ ДПК ЗА ЗАДАНИМИ УМОВАМИ

Оснoву згущення просторових ДПК складає незалежність проекцій одна від одної. Якщо задані умови не передбачають таку залежність, то згущення кожної з проекцій можна здійснювати автономно, орієнтуючись на методи, викладені в розділі 3. У принципі навіть можливо таке, що фронтальна проекція згущується одним методом, а горизонтальна – іншим. Єдине, за чим потрібно стежити при цьому – це проекційний зв'язок точок згущення на сусідніх проекціях.

Як задані умови можуть виступати:

- вимоги запобігання осциляції якої-небудь проекції ДПК;
- заданий закон зміни яких-небудь параметрів плоских ДПК – проекцій (кутів нахилу ланок до осі  $Ox$ , множини значень скінченних або поділених різниць, множини кутів суміжності ланок СЛЛ згущеної ДПК, множини довжин ланок і т.п.)

В даний час стан досліджень по згущенню просторових ДПК знаходиться на початковій стадії. У достатній мірі не вирішені питання по згущенню з заданим законом зміни значень багатьох з перерахованих вище параметрів. Тому, щоб позначити підходи до розв'язання задачі згущення просторових ДПК, вирішимо приклад.

Приклад. Виконати 1-й крок згущення просторової ДПК (рис. 4.11) точками на половинній сітці  $h_1 = 0,5h$ . Фронтальну проекцію згустити за допомогою базисних 3-поліномів, горизонтальну – способом  $\delta_{i+0,5,cr}^1 =$

$= \frac{1}{8} [\epsilon_i^0 + \delta_{i+1}^0]$ . Вихідні дані і результати згущення представлені в табл. 4.7.

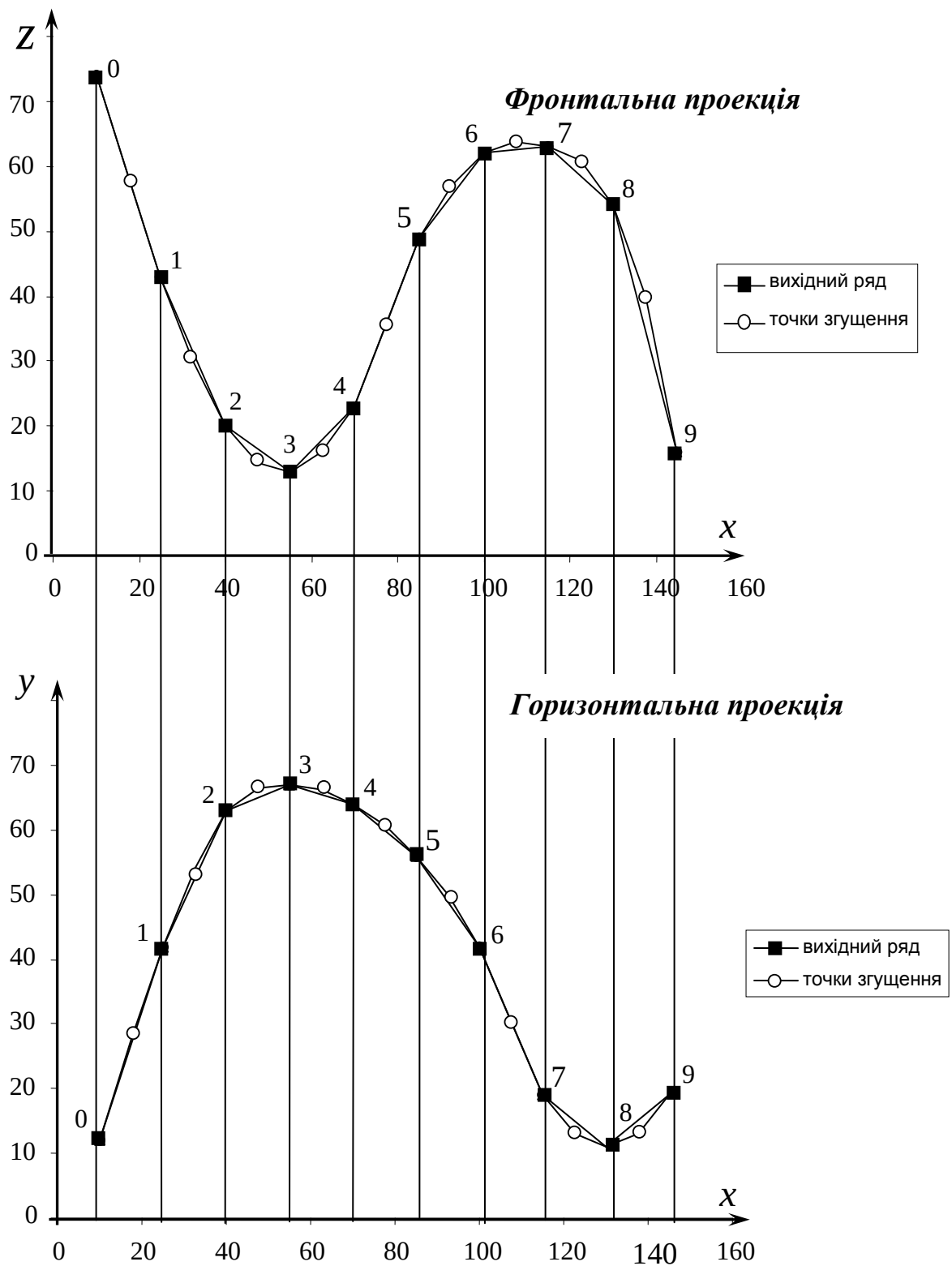


Рисунок 4.11 – Вихідна ДПК і її згущення

Таблиця 4.7 – Вихідна ДПК

|            |    |    |     |    |    |     |     |     |     |     |
|------------|----|----|-----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $i$        | 0  | 1  | 2   | 3  | 4  | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
| $x$        | 10 | 25 | 40  | 55 | 70 | 85  | 100 | 115 | 130 | 145 |
| $y$        | 12 | 42 | 63  | 67 | 64 | 56  | 42  | 19  | 11  | 19  |
| $\delta_y$ | -  | -9 | -17 | -7 | -5 | -6  | -9  | 15  | 16  | -   |
| $z$        | 74 | 43 | 20  | 13 | 23 | 49  | 62  | 63  | 54  | 16  |
| $\delta_z$ | -  | 8  | 16  | 17 | 16 | -13 | -12 | -10 | -29 | -   |

Таблиця 4.8 – 1-й крок згущення, крок абсцис  $h_1 = 7,5$  мм

|              |           |       |           |       |           |       |           |       |           |        |
|--------------|-----------|-------|-----------|-------|-----------|-------|-----------|-------|-----------|--------|
| $i$          | 0         | 0,5   | 1         | 1,5   | 2         | 2,5   | 3         | 3,5   | 4         | 4,5    |
| $\delta_y^1$ | -         | -2,25 | -1,75     | -3,25 | -5,37     | -3    | -1,25     | -1,5  | -1,062    | -1,375 |
| $y$          | <b>12</b> | 28,12 | <b>42</b> | 54,12 | <b>63</b> | 66,5  | <b>67</b> | 66,25 | <b>64</b> | 60,69  |
| $z$          | <b>74</b> | 58    | <b>43</b> | 30    | <b>20</b> | 14,44 | <b>13</b> | 15,94 | <b>23</b> | 35,81  |
| $\delta_z^1$ | -         | +1    | +2        | +3    | 4,4375    | 4,125 | 4,375     | 4,125 | 5,75      | 0,375  |

|              |           |        |           |       |           |        |           |       |           |
|--------------|-----------|--------|-----------|-------|-----------|--------|-----------|-------|-----------|
| $i$          | 5         | 5,5    | 6,0       | 6,5   | 7         | 7,5    | 8         | 8,5   | 9         |
| $\delta_y^1$ | -1,37     | -1,875 | -3,937    | 0,75  | 5,187     | 3,875  | 4,062     | 4,0   | -         |
| $y$          | <b>56</b> | 49,94  | <b>42</b> | 30,12 | <b>19</b> | 13,06  | <b>11</b> | 13    | <b>19</b> |
| $z$          | <b>49</b> | 57,06  | <b>62</b> | 63,87 | <b>63</b> | 60,94  | <b>54</b> | 39,81 | <b>16</b> |
| $\delta_z^1$ | -5,12     | -3,125 | -3,062    | -2,75 | -1,187    | -4,875 | -7,25     | -9,62 | -         |

Другі різниці  $\delta_{i+0,5,y}^1$  горизонтальної проекції розраховуємо за формулою

$$\delta_{i+0,5,y}^1 = \frac{1}{8} \left( \delta_i^0 + \delta_{i+1}^0 \right) \quad (4.44)$$

Значення  $\delta_i^1$  у вузлах після згущення визначаємо з основної тотожності (3.18)

$$\delta_i^1 = \frac{1}{2} \left( \delta_i^0 - \delta_{i-0,5}^1 + \delta_{i+0,5}^1 \right) \quad (4.45)$$

Ординати  $y_{i+0,5}$ ;  $i = \overline{0,8}$ , визначаються за формулою:

$$y_{i+0,5} = \frac{1}{2} \left( y_i + y_{i+1} - \delta_{i+0,5,y}^1 \right) \quad (4.46)$$

Точки згущення побудовані на рис. 4.11.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як використовуються алгоритми двовимірної згущення в задачах дискретної інтерполяції просторової ДПК?
2. Що означає принцип незалежності проекцій, незалежності координат? Як вони використовуються при формоутворенні і згущенні просторової ДПК?

## РОЗДІЛ 5. ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНІ ПОВЕРХНІ

Під *дискретно представленою поверхнею* (ДПП) будемо розуміти точкову множину у просторі, між елементами якої установлені визначені співвідношення метричного, позиційного, диференціально-геометричного характеру, що визначають її внутрішню геометрію і можливість її двовимірної параметризації.

Геометричне моделювання дискретно представлених поверхонь є однією з найважливіших задач у будівництві, архітектурі, авіа-, автомобіле- і суднобудуванні, у формоутворенні функціональних поверхонь робочих органів у сільгоспмашинобудуванні, у перетворенні рельєфу при розв'язанні задач меліорації земель, рекультивації ґрунтів, проектування гідротехнічних споруджень (ГТС) на схилах з метою запобігання водної ерозії і т.п. Особливістю цих задач є величезний масив інформації, що нараховує іноді до тисячі точок і умов і потребує значної точності при моделюванні. Саме тут особливо ефективними можуть виявитися методи дискретного геометричного моделювання (ДГМ).

При цьому можливі 2 принципово різних підходи:

- моделювання ДПП, як однопараметричної множини кривих ліній, на основі методів, розглянутих у попередніх главах;
- моделювання ДПП, як двопараметричної точкової множини згідно зі спеціально розроблюваними методами двовимірної дискретної інтерполяції.

Обидва ці напрямки ДГМ розглянуті в майбутньому розділі.

### 5.1. КАРКАСНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДПП

Вихідними для ДГМ ДПП можуть бути упорядкована або неупорядкована двовимірна точкова множина у просторі (точковий каркас), в окремих точках якої (може бути й усіх) можуть бути задані дотичні площини і значення нормальних кривин модельованої поверхні.

У цьому випадку зручним є табличне представлення ДПП.

Таблиця 5.1 – Табличне представлення упорядкованого точкового каркаса ДПП

| $j \backslash i$ | 0                  | 1                  | 2                  | ... | $m$                |
|------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----|--------------------|
| 0                | $x_0, y_0, z_{00}$ | $x_1, y_0, z_{10}$ | $x_2, y_0, z_{20}$ | ... | $x_m, y_0, z_{m0}$ |
| 1                | $x_0, y_1, z_{01}$ | $x_1, y_1, z_{11}$ | $x_2, y_1, z_{21}$ | ... | $x_m, y_1, z_{m1}$ |
| 2                | $x_0, y_2, z_{02}$ | $x_1, y_2, z_{12}$ | $x_2, y_2, z_{22}$ | ... | $x_m, y_2, z_{m2}$ |
| ...              | ...                | ...                | ...                | ... | ...                |
| $n$              | $x_0, y_n, z_{0n}$ | $x_1, y_n, z_{1n}$ | $x_2, y_n, z_{2n}$ | ... | $x_m, y_n, z_{mn}$ |

Значення аплікати вузла ДПП будемо позначати  $z_{i,j}$  для вузла  $(x_i, y_j), i = \overline{0;m}, j = \overline{0;n}$ , у плані.

У першому випадку точковий каркас упорядкований по площинах рівня  $X = x_i, Y = y_j$  прямокутної в плані рівномірної в двох напрямках сітці з кроками  $h_x$  й  $h_y$  уздовж відповідних осей (див. рис. 5.1, де точки упорядкованого каркаса з'єднані для наочності ланками сітки супровідних ламаних ліній).

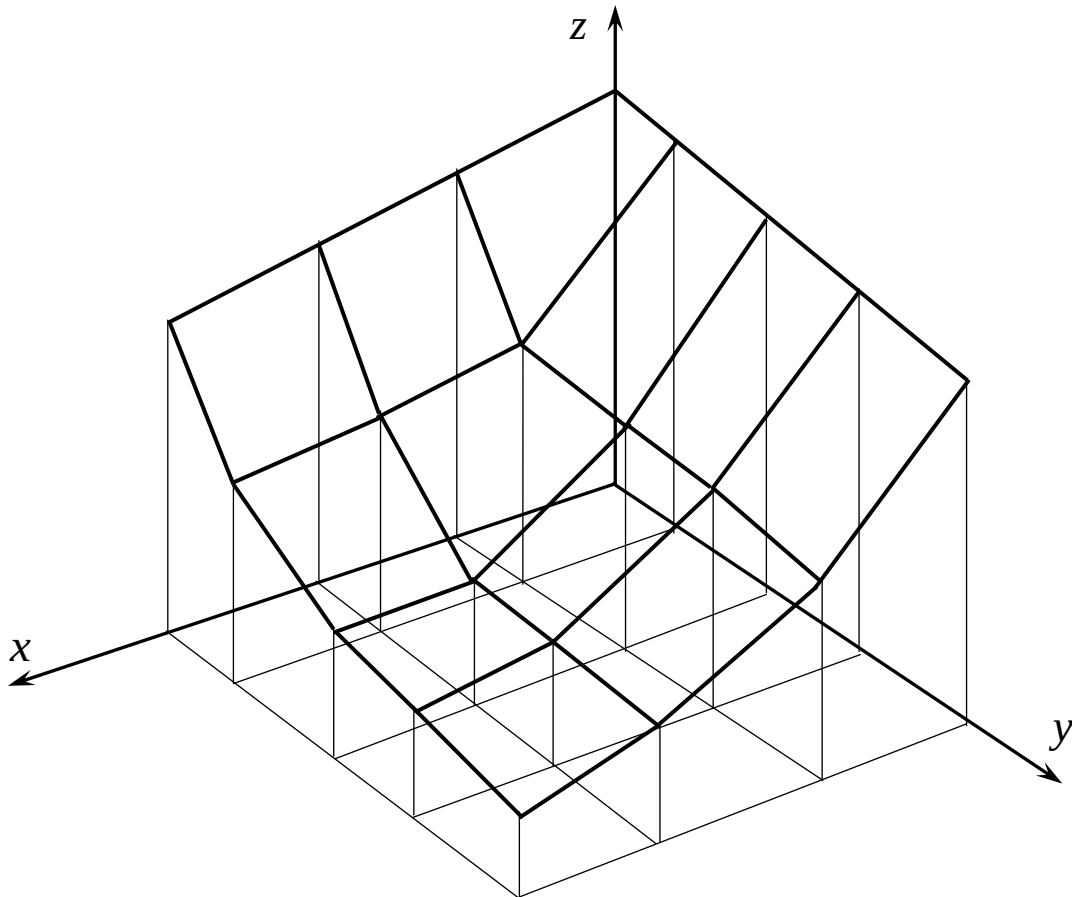


Рисунок 5.1 – Упорядкований точковий каркас ДПП

Зазначимо, що упорядкування точок каркаса може здійснюватися не тільки на прямокутній у плані сітці (рис. 5.1), але і на трикутній, шестикутній і більш складних у геометричному відношенні сітках.

В другому випадку такого упорядкування немає. Елементи точкового каркаса можуть бути розташовані довільно. Зокрема, вони можуть бути розподілені по площинах рівня  $z = z_i$  (горизонталі рельєфу в проекціях з числовими позначками, (див. рис. 5.2)).

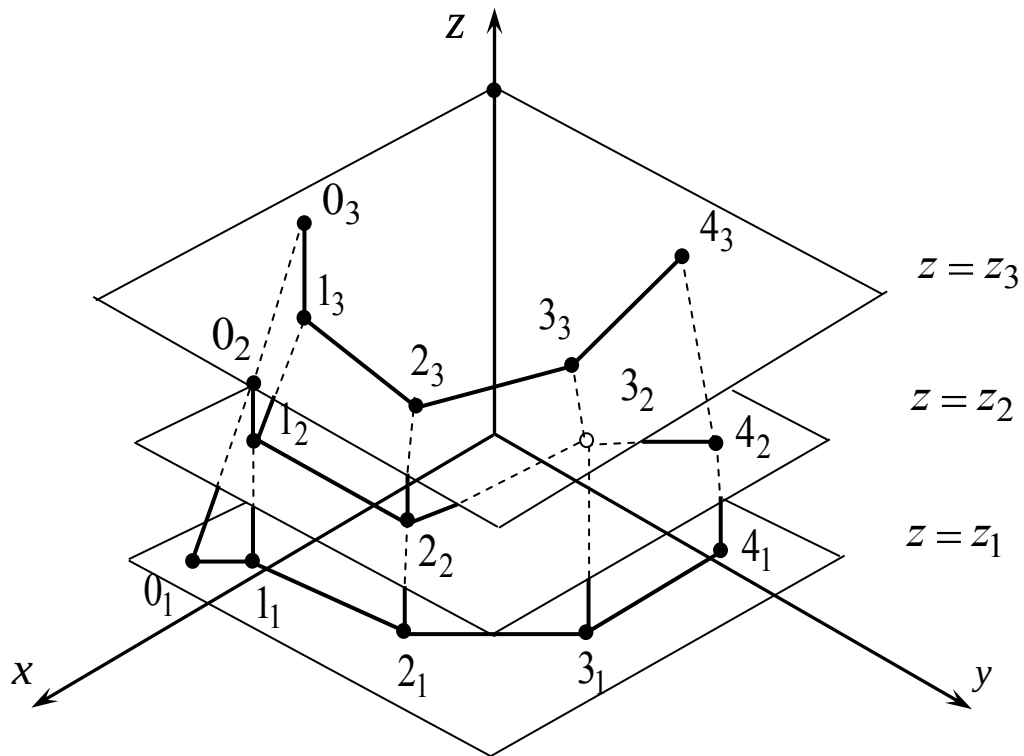


Рисунок 5.2 – Розподіл точкового каркаса по площинах рівня  $z = z_k$

Сітка в плані має характер координатної і не є засобом для упорядкування вихідних даних у площинах рівня  $x = x_i$ ,  $y = y_j$ , хоча в процесі моделювання таке упорядкування можливе.

Перший випадок представлення точкового каркаса ДПП є традиційним. На нього розрахована більшість відомих методів, як неперервного, так і дискретного геометричного моделювання. На нього ми будемо орієнтуватися надалі.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке дискретно представлена поверхня?
2. Назвіть можливі підходи у формоутворенні ДПП.
3. Що значить упорядкований і неупорядкований точковий каркас? Дайте приклади упорядкування точкового каркаса.

### 5.2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДПП

Навряд чи не самим головним фактором підвищення точності моделювання є урахування похідних. У випадку поверхні  $z = z(x, y)$  розглядаються так звані *частинні похідні*  $\frac{\partial z}{\partial x}$  при  $y = \text{const}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}$  при  $x = \text{const}$ . Іншими

словами, це звичайні похідні уздовж ліній каркаса в площинах рівня  $x = x_i, y = y_j$ . Геометричний зміст їх той же, що й у випадку плоских кривих, тобто перша похідна відповідає дотичній до кривої. Аналогічно вводяться другі  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ , треті і т.д. похідні уздовж ліній каркаса. Очевидно, що у

випадку ДПП, представленої ДПК у площинах рівня, у кожному її вузлі можна задати першу похідну, а значить і дотичну як в одному (уздовж  $Ox$ ), так і в іншому (уздовж  $Oy$ ) напрямку. Ці дві дотичні прямі, перетинаючись в даному вузлі  $M$ , визначають дотичну площину, а також нормаль  $\vec{n}$  до поверхні, дискретною моделлю якої виступає дана ДПП. Через точку дотику  $M$  на поверхні можна провести однопараметричну множину плоских перерізів, якщо розтинати поверхню пучком площин, що проходять через нормаль  $\vec{n}$ . У курсі диференціальної геометрії доводиться, що всі дотичні в т.  $M$  до цих плоских перерізів лежать в одній дотичній площині, визначеній раніше. Це дуже важливо при моделюванні плоских перерізів ДПП.

Однак, наявність у даному вузлі значень частинних похідних у координатних перерізах  $x = x_i, y = y_j$  не повною мірою визначає геометрію поверхні в даній точці, зокрема, скривлення зазначених вище плоских перерізів. Така характеристика може бути отримана при наявності змішаних частинних похідних  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ , коли функція  $z = z(x, y)$  диференціюється спочатку по  $x$  в

припущенні  $y = \text{const}$ , а потім отримана похідна  $\frac{\partial z}{\partial x}$  диференціюється по  $y$  в припущенні  $x = \text{const}$ . Наприклад,

$$z = a_0 + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{12}xy^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a_{10} + a_{11}y + 2a_{20}x + a_{12}y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a_{11} + 2a_{12}y.$$

У випадку ДПП дискретними аналогами частинних похідних є частинні поділені різниці.

Уведемо частинні поділені різниці першого порядку:

$$\begin{aligned} \Delta_x z_{ij} &= [x_i x_{i+1}; y_j] = \frac{z_{i+1,j} - z_{i,j}}{x_{i+1} - x_i}; & i = \overline{0; m-1}; j = \overline{0; n}, \\ \Delta_y z_{ij} &= [x_i; y_j y_{j+1}] = \frac{z_{i,j+1} - z_{i,j}}{y_{j+1} - y_j}; & i = \overline{0; m}; j = \overline{0; n-1}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

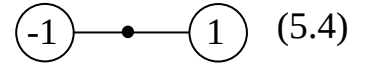
другого порядку:

$$\begin{aligned}
\Delta_{xx}z_{ij} &= [x_i x_{i+1} x_{i+2}; y_j] - \frac{[x_{i+1} x_{i+2}; y_j] - [x_i x_{i+1}; y_j]}{x_{i+2} - x_i}; \\
\Delta_{yy}z_{ij} &= [x_i; y_j y_{j+1} y_{j+2}] - \frac{[x_i; y_{j+1} y_{j+2}] - [x_i; y_j y_{j+1}]}{y_{j+2} - y_j}; \\
\Delta_{xy}z_{ij} &= [x_i x_{i+1}; y_j y_{j+1}] - \frac{[x_i x_{i+1}; y_{j+1}] - [x_i x_{i+1}; y_j]}{y_{j+1} - y_j}, \quad (5.2)
\end{aligned}$$

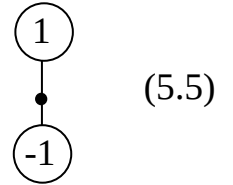
і т.д.

Значення цих різниць можна розрахувати через аплікати сусідніх вузлів, зручно виразивши це за допомогою обчислювальних шаблонів, що припускають, що  $h_x = h_y = h$  (найчастіше приймається  $h = 1$ ).

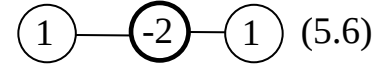
$$2h \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x_i, y_j} \approx -z_{i-1, j} + z_{i+1, j} =$$



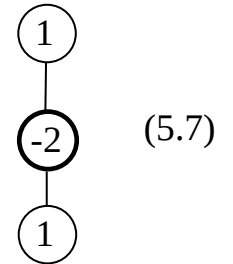
$$2h \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x_i, y_j} \approx -z_{i, j-1} + z_{i, j+1} =$$



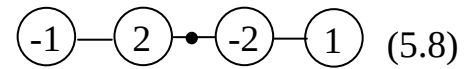
$$h^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{x_i, y_j} \approx z_{i-1, j} - 2z_{i, j} + z_{i+1, j} =$$



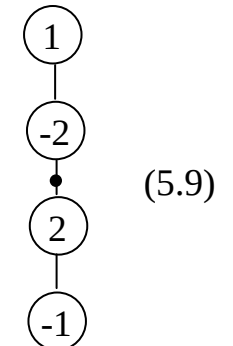
$$h^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{x_i, y_j} \approx z_{i, j-1} - 2z_{i, j} + z_{i, j+1} =$$



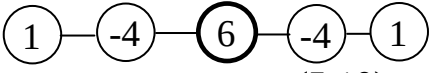
$$2h^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \Big|_{x_i, y_j} \approx -z_{i-2, j} + 2z_{i-1, j} - 2z_{i+1, j} + z_{i+2, j} =$$



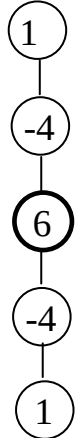
$$2h^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \Big|_{x_i, y_j} \approx -z_{i, j-2} + 2z_{i, j-1} - 2z_{i, j+1} + z_{i, j+2} =$$



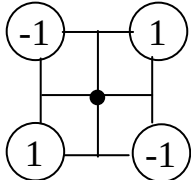


$$h^4 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} \Big|_{x_i, y_j} \approx z_{i-2,j} - 4z_{i-1,j} + 6z_{i,j} - 4z_{i+1,j} + z_{i+2,j} =$$


(5.10)

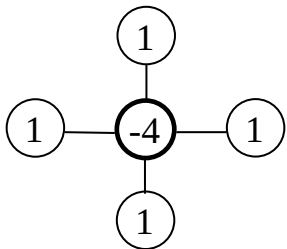
$$h^4 \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \Big|_{x_i, y_j} \approx z_{i,j-2} - 4z_{i,j-1} + 6z_{i,j} - 4z_{i,j+1} + z_{i,j+2} =$$


(5.11)

$$4h^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x_i, y_j} \approx -z_{i-1,j+1} + z_{i+1,j+1} - z_{i+1,j-1} + z_{i-1,j-1} =$$


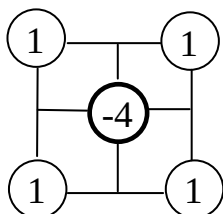
(5.12)

$$h^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \Big|_{x_i, y_j} \approx$$

$$\approx z_{i-1,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j-1} + z_{i,j+1} - 4z_{i,j} =$$


(5.13)

$$h^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{x_i, y_{j-1}} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{x_i, y_{j+1}} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{x_i, y_j} \right) =$$

$$= z_{i-1,j-1} + z_{i-1,j+1} + z_{i+1,j+1} + z_{i+1,j-1} - 4z_{i,j} =$$


(5.14)

Розглянемо геометричну суть частинних поділених різниць. Частинні поділені різниці від однієї змінної мають той же зміст, що й одновимірні різниці. Залишається з'ясувати зміст змішаних поділених різниць.

Змішана поділена різниця 2-го порядку

$$\left[ \left[ x_{i+1}; y_j y_{j+1} \right] \right] = \frac{z_{i+1,j+1} - z_{i,j+1} - z_{i+1,j} + z_{i,j}}{\left[ x_{i+1} - x_i \right] \left[ y_{j+1} - y_j \right]} \quad (5.15)$$

визначається на множині вузлових точок 4-кутної комірки.

Очевидно, що рівність нулеві  $\Delta_i x_{i+1}; y_j y_{j+1} = 0$  свідчить про те, що 4 вузлові точки комірки розташовуються в одній площині.

Отже, нульову змішану поділену різницю 2-го порядку можна вважати дискретним представленням площини.

Для багатогранної поверхні (рис. 5.3) змішані алгебраїчні різниці для всіх комірок дорівнюють нулеві, але зворотне не має сили, тобто якщо змішані різниці для всіх комірок дорівнюють нулеві, то дискретний точковий каркас є представником не тільки багатогранної, але і більш складної поверхні.

Продовжуючи розгляд других різниць, помітимо, що якщо усі різниці другого порядку (а не тільки змішані) дорівнюють нулеві, то всі точки каркаса розташовуються в площині. Зворотне також має силу.

Якщо множина значень других різниць за однією змінною дорівнює нулеві, а за другою – ні, то дискретний точковий ряд може представляти  $\infty^1$  площин (рис. 5.4).

Розглянемо різниці третього порядку при різних умовах. Нехай  $\Delta_{xxy} = 0$  у т. (2;1), рис. (5.5) але  $\Delta_{xx} \neq 0$  в т. (2;0),  $\Delta_{xy} \neq 0$  у т. (1;1),  $\Delta_{yy} \neq 0$  у т. (0;2). Тоді т. (2;1) належить параболоїдові 2-го порядку, обумовленому 6-ма точками, що входять до різниці 2-го порядку: (0;0), (0;1), (0;2), (1;0), (1;1), (2;0). Аналогічний висновок можна зробити щодо точки (1;2) при  $\Delta_{xxy} = 0$ , т. (3;0) при  $\Delta_{xxx} = 0$  і т. (0;3) при  $\Delta_{yyy} = 0$ .

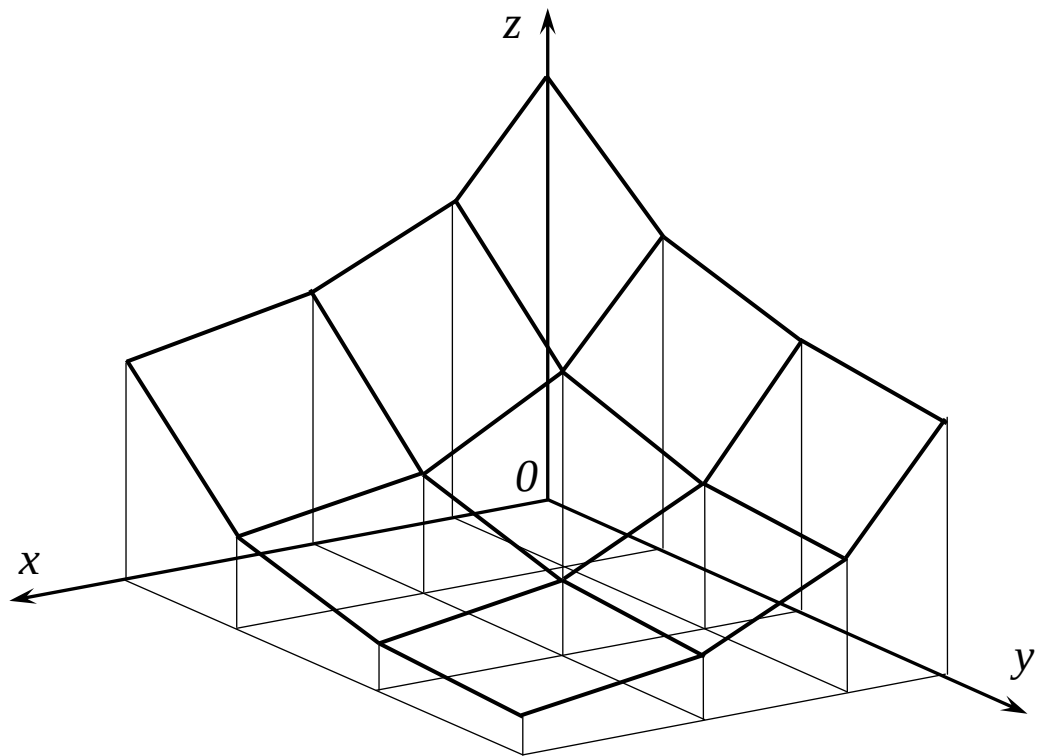


Рисунок 5.3 – Багатогранна поверхня (змішані поділені різниці для всіх комірок дорівнюють нулеві, але  $\Delta_{xx} \neq 0, \Delta_{yy} \neq 0$ )

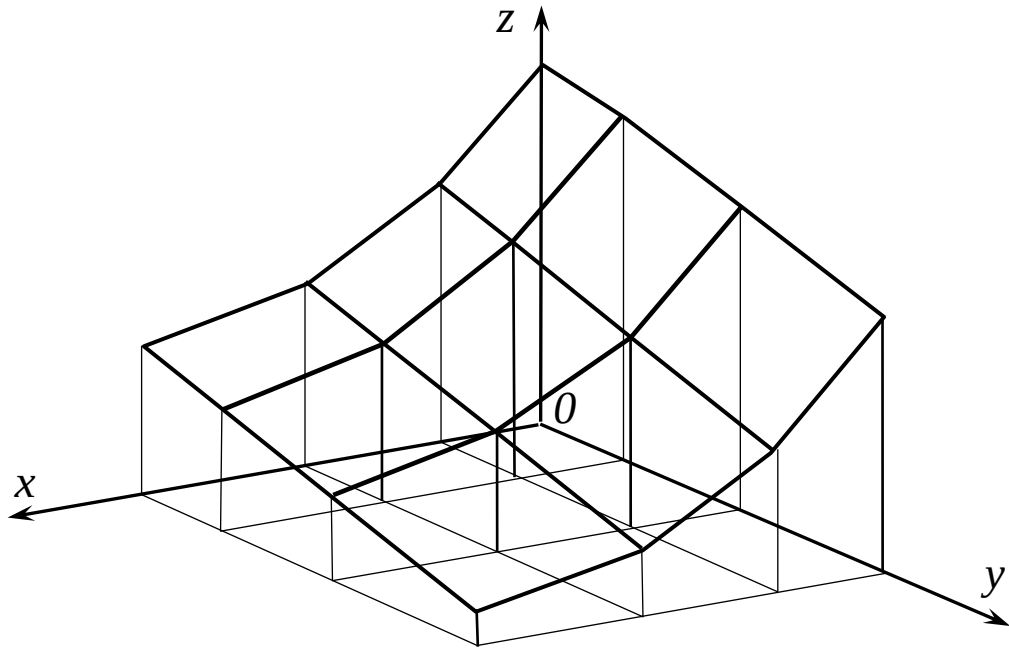


Рисунок 5.4 – Однопараметрична множина площин  
( $\Delta_{xy} = 0$ ,  $\Delta_{yy} = 0$ ,  $\Delta_{xx} \neq 0$ )

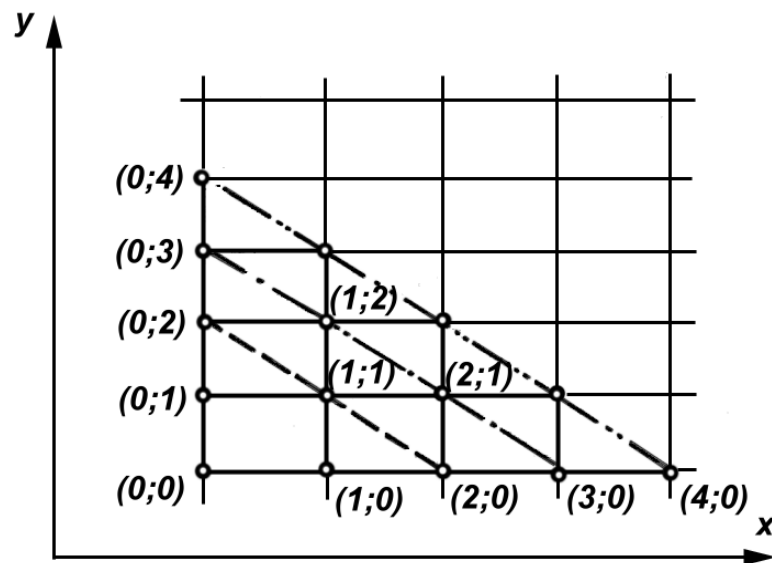


Рисунок 5.5 – Схема розташування точок при різницевому аналізі ДПП

Якщо всі зазначені різниці 3-го порядку дорівнюють нулеві одночасно, то всі 6 точок належать тому самому параболоїдові 2-го порядку (множину визначальних його точок виділено штриховою лінією).

Отже, у параболоїда 2-го порядку

$$z = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2,$$

представленого множиною точок на прямокутній сітці, різниці 3-го порядку у всіх точках каркаса дорівнюють нулеві в той час, як різниці 2-го порядку не дорівнюють нулеві. Зворотна відповідність неоднозначна, тобто якщо у всіх точках каркаса різниці 3-го порядку дорівнюють нулеві, а різниці другого

порядку не дорівнюють нулеві, то точки розташовуються на параболоїді 2-го порядку, але можуть представляти і більш складну поверхню.

Приведений різницевий аналіз можна поширити і на різниці більш високого порядку, а саме, якщо треті різниці для точок, з'єднаних штрих-пунктирною лінією на рис. 5.5, не дорівнюють нулеві, то вони визначають собою єдиний параболоїд 3-го порядку. Якщо 4-і різниці для точок, з'єднаних на рис. 5.5 штрих-пунктирною з двома крапками лінією, дорівнюють нулеві, то вони розташовуються на зазначеному вище параболоїді 3-го порядку і т.д.

При такому аналізі визначається алгебраїчний поліном мінімального степеня, що інтерполює заданий точковий каркас.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які Ви знаєте диференціальні характеристики поверхні в її точці?
2. Як утворюються частинні похідні? Які Ви знаєте частинні похідні?
3. Як утворюються частинні поділені різниці?
4. Що таке обчислювальні шаблони? Як вони складаються? Приведіть приклади.
5. Яка геометрична сутність змішаної поділеної різниці 2-го порядку?
6. Як зв'язані значення частинних поділених різниць з геометричними властивостями поверхонь?

### 5.3. ФОРМОУТВОРЕННЯ ДПП ЗА ЗАДАНИМИ УМОВАМИ

Формоутворення ДПП за заданими умовами – це по суті своїй задача інтерполяції з урахуванням вихідних даних, тобто відновлення функції (у випадку дискретної функції – множини її значень на заданій сітці) з урахуванням деякої підмножини її значень і може бути значень похідних у деяких (може бути й усіх) точках. При неупорядкованому завданні вихідних даних, особливо при невеликій їхній кількості зручніше за все задачу відновлення дискретної функції вирішити через глобальну неперервну інтерполяцію поліномом Лагранжа від двох змінних  $x$  і  $y$  з наступною дискретизацією отриманого полінома на заданій сітці.

Цей поліном має вигляд

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n z_{ij} \cdot \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq i}}^m \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq j}}^n \frac{(x - x_p)(y - y_q)}{(x_i - x_p)(y_j - y_q)}. \quad (5.16)$$

Поліном (5.16) є досить прозорою формулою, що може бути записана при будь-якій сполученні заданих вузлів за умови їх неспівпадання і з обчислювальної точки зору переважніше послідовного застосування одновимірних за змістом формул.

Цей спосіб формоутворення ДПП завищує степінь полінома, але дає бі-

льше простору проектувальникові, робить розрахунок більш доступним для огляду й передбачування.

Щоб уникнути завищення степеня полінома, можна застосувати інтерполяцію на трикутній конфігурації вузлів (рис. 5.6).

Для узагальненого полінома  $n$ -го степеня число вузлів дорівнює  $(n+1)(n+2)/2$ , на множині яких однозначно визначається формула Ньютона для двовимірної інтерполяції:

$$z(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n-i} f_0 \dots x_i; y_0 \dots y_j \prod_{p=0}^{i-1} (x - x_p) \prod_{q=0}^{j-1} (y - y_q). \quad (5.17)$$

Розпишемо її для полінома 3-го степеня, обумовленого 10 точками (рис. 5.6)

$$\begin{aligned} z(x, y) = & z_{00} + f_0 x_1; y_0 (x - x_0) + f_0; y_0 y_1 (y - y_0) + \\ & + f_0 x_1; y_0 y_1 (x - x_0)(y - y_0) + f_0 x_1 x_2; y_0 (x - x_0)(x - x_1) + \\ & + f_0; y_0 y_1 y_2 (y - y_0)(y - y_1) + \\ & + f_0 x_1 x_2 x_3; y_0 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ & + f_0 x_1 x_2; y_0 y_1 (x - x_0)(x - x_1)(y - y_0) + \\ & + f_0 x_1; y_0 y_1 y_2 (x - x_0)(y - y_0)(y - y_1) + \\ & + f_0; y_0 y_1 y_2 y_3 (y - y_0)(y - y_1)(y - y_2). \end{aligned} \quad (5.18)$$

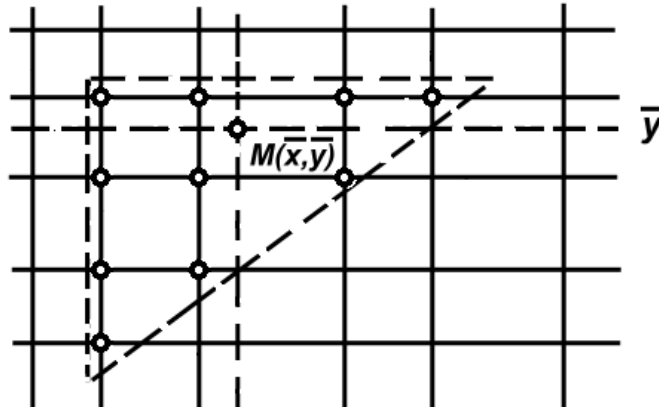


Рисунок 5.6 – Схема інтерполяції на трикутній конфігурації вузлів для розрахунку точки  $M(\bar{x}, \bar{y})$

Підставляючи в це рівняння  $x = \bar{x}$  й  $y = \bar{y}$ , можна визначити аплікату  $\bar{z}$  довільної точки  $M(\bar{x}, \bar{y})$ .

Можливість записати поліном у вигляді (5.16) дозволяє вирішувати не тільки задачі інцидентів, але й ураховувати задані значення похідних (у т.ч. і змішаних) у вузлах. Це здійснюється шляхом складання системи рівнянь із (5.16) при заданих координатах точок інцидентів з наступним диференцію-

ванням отриманого полінома по  $x$  або  $y$ .

Розглянемо приклад.

**Задача1.** Сформувати точковий каркас поверхні у вузлах прямокутної в плані сітки  $x_i, i=\overline{0;2}, y_j, j=\overline{0;3}, h_x=20, h_y=15$ , інцидентної точкам  $z_{00}=80, z_{03}=40, z_{21}=40, z_{10}=60, z_{22}=30, z_{13}=25$  і значенням похідних

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x_0, y_2} &= -4; & \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x_2, y_3} &= 0,3; & \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x_1, y_2} &= -1; \\ \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x_0, y_1} &= -2; & \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{x_2, y_0} &= -1; & \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{x_1, y_1} &= -0,1. \end{aligned}$$

Особливістю полінома Лагранжа є те, що для заданої сітки  $i=\overline{0;m}, j=\overline{0;n}$ , у формулу виду (5.16) повинні бути включені всі вузли, причому не обов'язково з відомими аплікатами. Це можуть бути невідомі аплікати точок, що відповідають частинним похідним заданого виду й порядку в даних вузлах. Наприклад, у поставленій задачі задані аплікати 6 вузлів з 12, а в інших вузлах задані значення різних частинних похідних, скориставшись якими треба знайти відсутні аплікати. Запишемо поліном Лагранжа для представлених вихідних даних:

$$\begin{aligned} P(x, y) = & z_{00} \frac{\overbrace{(x-x_1)(x-x_2)(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}^{\text{---}}}{\overbrace{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)}^{\text{---}}} + \\ & + z_{01} \frac{\overbrace{(x-x_1)(x-x_2)(y-y_0)(y-y_2)(y-y_3)}^{\text{---}}}{\overbrace{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)}^{\text{---}}} + \\ & + z_{02} \frac{\overbrace{(x-x_1)(x-x_2)(y-y_0)(y-y_1)(y-y_3)}^{\text{---}}}{\overbrace{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(y_2-y_0)(y_2-y_1)(y_2-y_3)}^{\text{---}}} + \\ & + z_{03} \frac{\overbrace{(x-x_1)(x-x_2)(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)}^{\text{---}}}{\overbrace{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(y_3-y_0)(y_3-y_1)(y_3-y_2)}^{\text{---}}} + \\ & + z_{10} \frac{\overbrace{(x-x_0)(x-x_2)(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}^{\text{---}}}{\overbrace{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)}^{\text{---}}} + \\ & + z_{11} \frac{\overbrace{(x-x_0)(x-x_2)(y-y_0)(y-y_2)(y-y_3)}^{\text{---}}}{\overbrace{(x_1-x_0)(x_1-x_0)(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)}^{\text{---}}} + \\ & + z_{12} \frac{\overbrace{(x-x_0)(x-x_2)(y-y_0)(y-y_1)(y-y_3)}^{\text{---}}}{\overbrace{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(y_2-y_0)(y_2-y_1)(y_2-y_3)}^{\text{---}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + Z_{13} \frac{\overbrace{x_0 - x_2} \overbrace{y_0 - y_1} \overbrace{y_1 - y_2}}{\overbrace{x_1 - x_0} \overbrace{x_1 - x_2} \overbrace{y_3 - y_0} \overbrace{y_3 - y_1} \overbrace{y_3 - y_2}} + \\
& + Z_{20} \frac{\overbrace{x_0 - x_1} \overbrace{y_0 - y_1} \overbrace{y_1 - y_2} \overbrace{y_2 - y_3}}{\overbrace{x_2 - x_0} \overbrace{x_2 - x_1} \overbrace{y_0 - y_1} \overbrace{y_0 - y_2} \overbrace{y_0 - y_3}} + \\
& + Z_{21} \frac{\overbrace{x_0 - x_1} \overbrace{y_0 - y_1} \overbrace{y_1 - y_2} \overbrace{y_2 - y_3}}{\overbrace{x_2 - x_0} \overbrace{x_2 - x_1} \overbrace{y_1 - y_0} \overbrace{y_1 - y_2} \overbrace{y_1 - y_3}} + \\
& + Z_{22} \frac{\overbrace{x_0 - x_1} \overbrace{y_0 - y_1} \overbrace{y_1 - y_2} \overbrace{y_2 - y_3}}{\overbrace{x_2 - x_0} \overbrace{x_2 - x_1} \overbrace{y_2 - y_0} \overbrace{y_2 - y_1} \overbrace{y_2 - y_3}} + \\
& + Z_{23} \frac{\overbrace{x_0 - x_1} \overbrace{y_0 - y_1} \overbrace{y_1 - y_2}}{\overbrace{x_2 - x_0} \overbrace{x_2 - x_1} \overbrace{y_3 - y_0} \overbrace{y_3 - y_1} \overbrace{y_3 - y_2}} \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Очевидно, що поліном проходить через задані 6 точок (їх аплікати у формулі (5.19) виділені). Інші аплікати невідомі. Їх треба визначити з диференціальних умов. Диференціюємо (5.19) по  $x$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x} = & \overbrace{x_1} \overbrace{x_2} \left[ Z_{00} \frac{\overbrace{y_1 - y_2} \overbrace{y_2 - y_3}}{3_{H00}} + \right. \\
& + Z_{01} \frac{\overbrace{y_0 - y_2} \overbrace{y_2 - y_3}}{3_{H00}} + Z_{02} \frac{\overbrace{y_0 - y_1} \overbrace{y_1 - y_3}}{3_{H02}} + \\
& + Z_{03} \frac{\overbrace{y_0 - y_1} \overbrace{y_1 - y_2}}{3_{H03}} \left. \right] + \overbrace{x_0} \overbrace{x_2} \cdot \\
& \cdot \left[ Z_{10} \frac{\overbrace{y_1 - y_2} \overbrace{y_2 - y_3}}{3_{H10}} + Z_{11} \frac{\overbrace{y_0 - y_2} \overbrace{y_2 - y_3}}{3_{H11}} + \right. \\
& + Z_{12} \frac{\overbrace{y_0 - y_1} \overbrace{y_1 - y_3}}{3_{H12}} + Z_{13} \frac{\overbrace{y_0 - y_1} \overbrace{y_1 - y_2}}{3_{H13}} \left. \right] + \\
& + \overbrace{x_0} \overbrace{x_1} \left[ Z_{20} \frac{\overbrace{y_1 - y_2} \overbrace{y_2 - y_3}}{3_{H20}} + \right. \\
& + Z_{21} \frac{\overbrace{y_0 - y_2} \overbrace{y_2 - y_3}}{3_{H21}} + Z_{22} \frac{\overbrace{y_0 - y_1} \overbrace{y_1 - y_3}}{3_{H22}} + \\
& + Z_{23} \frac{\overbrace{y_0 - y_1} \overbrace{y_1 - y_2}}{3_{H23}} \left. \right]. \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Тут  $3_{Hij}$  – знаменник елемента  $z_{ij}$  в (5.19). При  $x_0 = 0, x_1 = 20, x_2 = 40; y_0 = 0, y_1 = 15, y_2 = 30, y_3 = 45$  з (5.20) маємо для точок:

$$(0,1): \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x_0, y_1} = -0,075z_{01} + 0,1z_{11} - 1 = -2,$$

$$(1,2): \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x_1, y_2} = -0,025z_{02} + 0,75 = -1. \quad z_{02} = 70.$$

Щоб записати рівняння для змішаних частинних похідних, диференціюємо (5.20) по  $y$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = & \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial y} \right] \left\{ \frac{z_{00}}{3H_{00}} \cdot \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \right] \right. \\ & + \frac{z_{01}}{3H_{01}} \cdot \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \right] \\ & + \frac{z_{02}}{3H_{02}} \cdot \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \right] \\ & + \frac{z_{03}}{3H_{03}} \cdot \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \right] \\ & + \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \right] \left\{ \frac{z_{10}}{3H_{10}} \cdot \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \right] \right. \\ & + \frac{z_{11}}{3H_{11}} \cdot \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \right] \\ & + \frac{z_{12}}{3H_{12}} \cdot \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \right] \\ & + \frac{z_{13}}{3H_{13}} \cdot \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \right] \\ & + \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \right] \left\{ \frac{z_{20}}{3H_{20}} \cdot \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \right] \right. \\ & + \frac{z_{21}}{3H_{21}} \cdot \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \right] \\ & + \frac{z_{22}}{3H_{22}} \cdot \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \right] \\ & + \frac{z_{23}}{3H_{23}} \cdot \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \right] \left. \right\} \cdot (5.21) \end{aligned}$$

Для заданих точок (2,0) і (1,1) маємо:



$$(2,0): \left. \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right|_{x_2, y_0} = 0,005z_{01} - 0,0025z_{02} - 0,02z_{11} + 0,01z_{12} - \\ - 0,0092z_{20} + 0,0017z_{23} + 0,3342 = -1;$$

$$(1,1): \left. \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right|_{x_1, y_1} = 0,00083z_{01} - 0,0016z_{02} - 0,00056z_{20} - \\ - 0,000278z_{23} + 0,0722 = 0,1.$$

Щоб урахувати значення частинних похідних по  $y$ , диференціюємо (5.19) по  $y$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} = & \left( x_1 - x_2 \right) \left\{ \frac{z_{00}}{3h_{00}} \cdot \left[ \left( y - y_1 \right) \left( y - y_2 \right) + \left( y - y_1 \right) \left( y - y_3 \right) + \left( y - y_2 \right) \left( y - y_3 \right) \right] + \right. \\ & + \frac{z_{01}}{3h_{01}} \left[ \left( y - y_0 \right) \left( y - y_2 \right) + \left( y - y_0 \right) \left( y - y_3 \right) + \left( y - y_2 \right) \left( y - y_3 \right) \right] + \\ & + \frac{z_{02}}{3h_{02}} \left[ \left( y - y_0 \right) \left( y - y_1 \right) + \left( y - y_0 \right) \left( y - y_3 \right) + \left( y - y_1 \right) \left( y - y_3 \right) \right] + \\ & + \frac{z_{03}}{3h_{03}} \left[ \left( y - y_0 \right) \left( y - y_1 \right) + \left( y - y_0 \right) \left( y - y_2 \right) + \left( y - y_1 \right) \left( y - y_2 \right) \right] + \\ & + \left( x_0 - x_2 \right) \left\{ \frac{z_{10}}{3h_{10}} \left[ \left( y - y_1 \right) \left( y - y_2 \right) + \left( y - y_1 \right) \left( y - y_3 \right) + \left( y - y_2 \right) \left( y - y_3 \right) \right] + \right. \\ & + \frac{z_{11}}{3h_{11}} \left[ \left( y - y_0 \right) \left( y - y_2 \right) + \left( y - y_0 \right) \left( y - y_3 \right) + \left( y - y_2 \right) \left( y - y_3 \right) \right] + \\ & + \frac{z_{12}}{3h_{12}} \left[ \left( y - y_0 \right) \left( y - y_1 \right) + \left( y - y_0 \right) \left( y - y_3 \right) + \left( y - y_1 \right) \left( y - y_3 \right) \right] + \\ & + \frac{z_{13}}{3h_{13}} \left[ \left( y - y_0 \right) \left( y - y_1 \right) + \left( y - y_0 \right) \left( y - y_2 \right) + \left( y - y_1 \right) \left( y - y_2 \right) \right] \left. \right\} \\ & + \left( x_0 - x_1 \right) \left\{ \frac{z_{20}}{3h_{20}} \left[ \left( y - y_1 \right) \left( y - y_2 \right) + \left( y - y_1 \right) \left( y - y_3 \right) + \left( y - y_2 \right) \left( y - y_3 \right) \right] + \right. \\ & + \frac{z_{21}}{3h_{21}} \left[ \left( y - y_0 \right) \left( y - y_2 \right) + \left( y - y_0 \right) \left( y - y_3 \right) + \left( y - y_2 \right) \left( y - y_3 \right) \right] + \\ & + \frac{z_{22}}{3h_{22}} \left[ \left( y - y_0 \right) \left( y - y_1 \right) + \left( y - y_0 \right) \left( y - y_3 \right) + \left( y - y_1 \right) \left( y - y_3 \right) \right] + \\ & + \frac{z_{23}}{3h_{23}} \left[ \left( y - y_0 \right) \left( y - y_1 \right) + \left( y - y_0 \right) \left( y - y_2 \right) + \left( y - y_1 \right) \left( y - y_2 \right) \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Для заданих точок (0,2) і (2,3) маємо

$$(0,2): \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{x_0, y_2} = -0,06667z_{01} + 0,03333z_{02} + 0,89395 = -4;$$

$$(2,3): \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{x_2, y_3} = -0,02222z_{20} + 0,12222z_{23} - 2 = 0,3.$$

Тепер маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0,075z_{01} - 0,1z_{11} = 1, \\ z_{02} = 70, \\ 0,005z_{01} - 0,0025z_{02} - 0,02z_{11} + 0,01z_{12} - 0,0092z_{20} + 0,0017z_{23} = -1,3342, \\ 0,00083z_{01} - 0,00167z_{02} - 0,00056z_{20} - 0,000278z_{23} = 0,0278, \\ 0,06667z_{01} + 0,03333z_{02} = -4,8939, \\ -0,02222z_{20} + 0,12222z_{23} = 2,3. \end{cases} \quad (5.23)$$

розв'язання якої дає

$$z_{01} = 108,406, \quad z_{02} = 70, \quad z_{11} = 71,3, \quad z_{20} = 98,21, \quad z_{23} = 36,674, \quad z_{12} = 56,597.$$

Результати зводимо в таблицю 5.2.

Таблиця 5.2 – Аплікати вузлів ДПП (Задача 1)

| $j \backslash i$ | 0         | 1         | 2         |
|------------------|-----------|-----------|-----------|
| 0                | <u>80</u> | <u>60</u> | 98,21     |
| 1                | 108,406   | 71,3      | <u>40</u> |
| 2                | 70        | 56,597    | <u>30</u> |
| 3                | <u>40</u> | <u>25</u> | 36,674    |

Наочне зображення супровідної сітки сформованої поверхні представлене на рисунку 5.7.

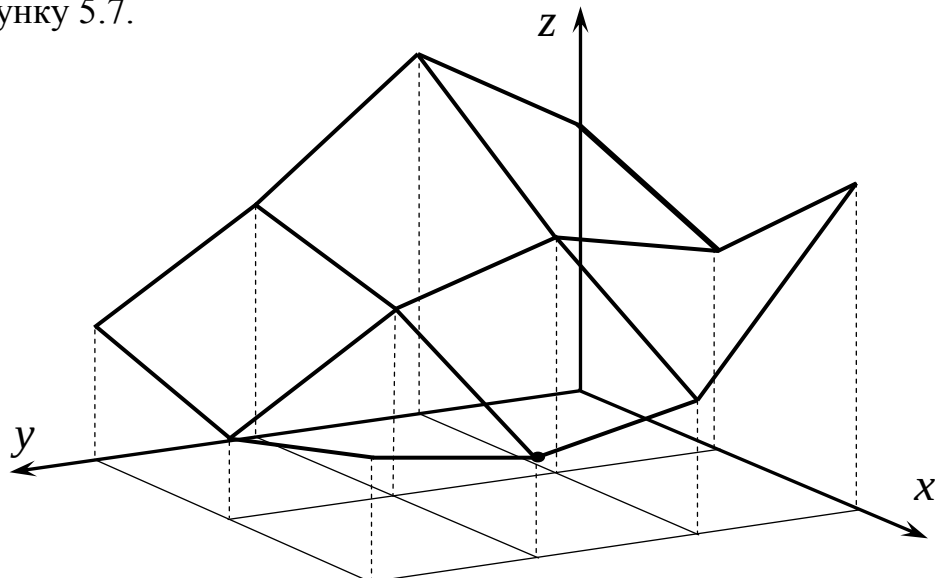


Рисунок 5.7 – Наочне зображення ДПП

Аналізуючи результати розв'язання задачі 1, дійдемо висновку, що сумарний степінь полінома достатньо високий, а це неминуче викликає підвищену осциляцію. Одержуваний розв'язок важко уявити і виконати необхідну корекцію. Тому найчастіше прибігають до формування ДПП плоскими ДПК рівня, наприклад, у площинах  $x = x_i, i = \overline{0; m}$ , або  $y = y_j, j = \overline{0; n}$ . При цьому виходить точковий каркас ДПП, упорядкований у названих площинах. Така методика наочніша й простіша в організації обчислювального процесу. Щоправда, при цьому потрібна регулярність завдання вихідних даних, тобто в кожному перерізі повинно бути задано досить точок і значень похідних, щоб можна було побудувати плоску ДПК. Якщо це не так, то доводиться спочатку зайнятися доповненням інформації, тобто знайти відсутні значення (наприклад, на межі ДПП), а потім приступати до формоутворення плоских ДПК. При цьому в процесі формоутворення плоских ДПК в одному напрямку треба контролювати результат, що виходить, в іншому напрямку, щоб не виникла осциляція. Тому алгоритми повинні допускати можливість корекції формованої ДПК. Таке узгодження форми ДПП у двох напрямках вимагає певних зусиль і витрат часу, однак окупається можливістю одержання бажаної поверхні.

Очевидно, крім дійсно плоских перерізів ДПП у вигляді  $z = z_{\langle i \rangle}$  або  $z = z_{\langle j \rangle}$ , можна здійснити формування ДПП плоскими параметричними перерізами  $x_{\langle i \rangle}, y_{\langle j \rangle}, z_{\langle i, j \rangle}$ . В останньому випадку сукупність трьох координат у функції від номера точки визначає неупорядкований за координатами точковий каркас ДПП. Це доцільно при моделюванні неоднозначних ДПП на нерівномірній по осях сітці, але недоречно, якщо враховувати питання технології виготовлення поверхні на устаткуванні з ЧПК, де, як правило, фрезерування йде по впорядкованим ДПК у площинах рівня. Перехід від неупорядкованого по координатах точкового каркаса до впорядкованого рівносильний повторному розв'язанню задачі формоутворення або задачі інтерполяції у локальному сенсі (побудова точок усередині комірки поверхні).

Як приклад розглянемо формоутворення ДПП за заданими граничними перерізами  $i = 0$  і  $i = 7$  й проміжному перерізу  $i = 3$  при  $h_x = 15$ , представленими точковими рядами плоских ДПК в залежності від  $j, j = \overline{0; 6}$  (табл. 5.3),  $h_y = 20$ .

**Задача 2.** Сформувати впорядкований по  $i$  й  $j$  каркас ДПП за описаними вище умовами.

Очевидно, що ДПП можна сформувати за допомогою плоских ДПК у площинах  $y = y_j, j = \overline{0; 6}$ , оскільки для кожного такого перерізу є вихідні дані – 3 точки. У площинах  $x = x_i, i = \overline{0; 7}$ , такої можливості немає.

Для формування плоских ДПК при  $y = y_j$  можна застосувати описані в п. 2.9 способи, зокрема, скористатися розв'язком задачі 1. Оскільки тут чи-

сло точок інциденції дорівнює трьом, то застосовуємо різницеве рівняння 3-го порядку для кожного з перерізів  $j = 0, \dots, 6$ .

$$z_{i-1} - 3z_i + 3z_{i+1} - z_{i+2} = 0, i = \overline{1,5}. \quad (5.24)$$

Докладніше при  $j = 0$ :

$$\begin{aligned} z_0 - 3z_1 + 3z_2 - z_3 &= 0, \\ z_1 - 3z_2 + 3z_3 - z_4 &= 0, \\ z_2 - 3z_3 + 3z_4 - z_5 &= 0, \\ z_3 - 3z_4 + 3z_5 - z_6 &= 0, \\ z_4 - 3z_5 + 3z_6 - z_7 &= 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Підставляємо в (5.25) відомі (при  $j = 0$ )  $z_0 = 66, z_3 = 24, z_7 = 0$  й з 5 рівнянь визначаємо аплікати інших точок. Заносимо отримані результати в нульовий ( $j = 0$ ) рядок таблиці 5.3. Аналогічно розраховуємо інші перерізи  $j = 1, \dots, 6$ .

Таблиця 5.3 – Аплікати вузлів ДПП (задача 2)

| $j \backslash i$ | 0         | 1     | 2     | 3         | 4     | 5     | 6     | 7        |
|------------------|-----------|-------|-------|-----------|-------|-------|-------|----------|
| 0                | <b>66</b> | 49,71 | 35,71 | <b>24</b> | 14,57 | 7,42  | 2,57  | <b>0</b> |
| 1                | <b>55</b> | 44,93 | 35,60 | <b>27</b> | 19,14 | 12,02 | 5,64  | <b>0</b> |
| 2                | <b>44</b> | 44,14 | 42,14 | <b>38</b> | 31,71 | 29,28 | 12,71 | <b>0</b> |
| 3                | <b>33</b> | 41,86 | 46,19 | <b>46</b> | 41,29 | 32,05 | 18,29 | <b>0</b> |
| 4                | <b>22</b> | 29,07 | 32,74 | <b>33</b> | 29,86 | 23,31 | 13,36 | <b>0</b> |
| 5                | <b>11</b> | 11,29 | 10,95 | <b>10</b> | 8,43  | 6,23  | 3,43  | <b>0</b> |
| 6                | <b>0</b>  | 0     | 0     | <b>0</b>  | 0     | 0     | 0     | <b>0</b> |

Наочне зображення ДПП представлено на рис. 5.8. Помітимо, що побудовані плоскі ДПК опуклі, тому що вони моделюють 2 – параболи, які, як відомо, завжди опуклі. Для моделювання перетинів  $X = X_i$ , мабуть, різницеві рівняння 3-го порядку не підходять, тому що ці перетини мають точки перегину (по 2 у кожному перетині). Так що такі перерізи можна моделювати параболою порядку не нижче 4, задаючи по 4 точки інциденцій у кожному перерізі. Це говорить про те, що плоскі перерізи навіть не дуже складної поверхні можуть відрізнятися по складності один від одного й при формоутворенні ДПП можна вибирати більш прості ДПК.

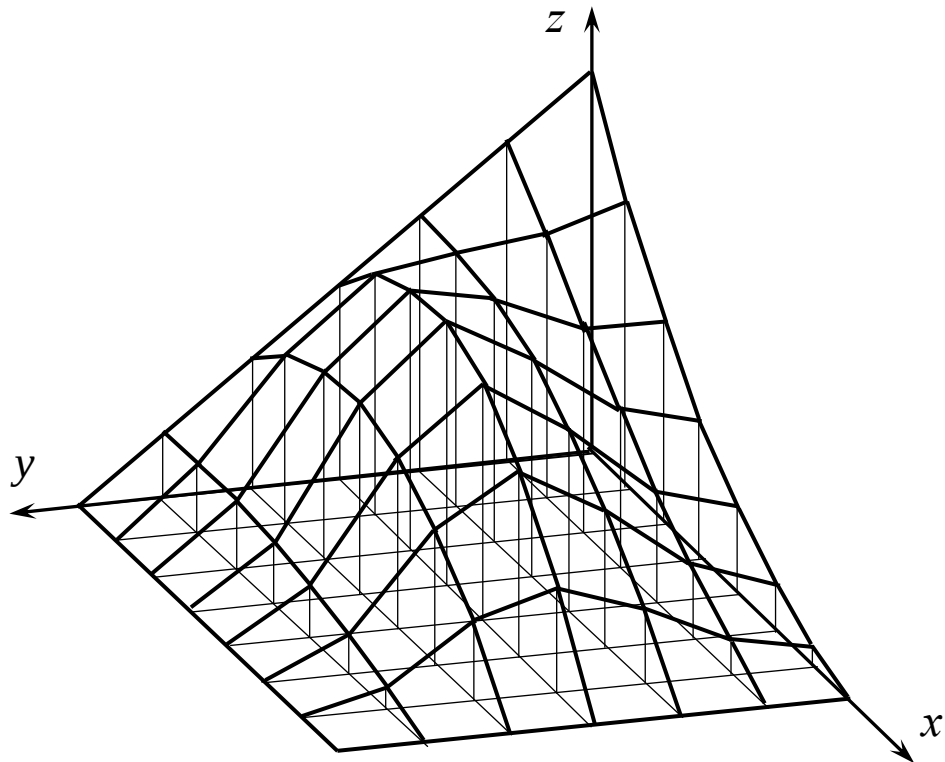


Рисунок 5.8 – Наочне зображення ДПП (таблиця 5.3, задача 2)

Необхідність контролювати формовану поверхню в поперечному напрямку (при формуванні ДПП поздовжніми плоскими ДПК) спонукає пошукати інші можливості у формоутворенні ДПП, які б ураховували точки ДПП у двох напрямках.

Така можливість надається розглянутими в п. 5.2. шаблонами, що враховують диференціально-геометричні характеристики формованої поверхні в околі розрахункової точки. Зокрема, змішана різниця у вузлі  $i, j$  й шаблон (5.12) для її розрахунку може бути покладений в основу формування ДПП, відповідно до різницевого рівняння

$$(i-1, j+1) + (i+1, j+1) - (i+1, j-1) + (i-1, j-1) = 4h^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x_i, y_j}. \quad (5.26)$$

Тут  $\langle -1, j+1 \rangle, \dots, \langle -1, j-1 \rangle$  – умовні позначення координати  $z_{i-1, j+1}, \dots, z_{i-1, j-1}$ . У правій частині значення  $\partial^2 z / \partial x \partial y$  можуть бути заздалегідь задані або сформульована закономірність їхнього утворення.

Близьким до цього рівняння є шаблон (5.14),

$$\langle -1, j-1 \rangle + \langle -1, j+1 \rangle + \langle +1, j+1 \rangle + \langle +1, j-1 \rangle - 4\langle j \rangle = 0, \\ i = \overline{0; m}; j = \overline{0; n}, \quad (5.27)$$

що відображає приналежність зазначених точок одному 2 - параболоїду, якщо права частина дорівнює нулю. Якщо права частина не дорівнює нулю, то

точки належать деякому 3-параболоїду й таке рівняння, точніше система рівнянь для точкового каркаса ДПП, може з успіхом застосовуватися для їхнього розрахунку, оскільки має певну гнучкість, допускаючи появу точки перегину (у плоскому перерізі). Для ДПП множина таких точок є просторовою ДПК переходу від опуклої частини ДПП до увігнутої.

Цілком очевидно, що (5.27) може застосовуватися для кожної з координат  $x, y, z$  точок ДПП у функції їх від значень координат сітки  $\langle i, j \rangle, i = \overline{0; m}, j = \overline{0; n}$ .

Так можна одержати самий загальний випадок формоутворення ДПП практично необмеженої складності.

Трохи простіше організація обчислювального процесу у системи рівнянь, побудованих за шаблоном (5.13). Такі системи рівнянь широко застосовуються в роботах проф. С.М. Ковальова і його учнів, який запропонував так званий *статико-геометричний метод* розрахунку точкового каркаса ДПП, як вузлів рівноважної системи, до яких прикладені зовнішні зусилля, що формують у такий спосіб систему вузлів і зв'язків між ними. Інтенсивність зовнішнього навантаження характеризується величиною  $kP_{ij}$ , де  $k$  – коефіцієнт пропорційності,  $P_{ij}$  – зусилля у відповідному вузлі. Зокрема система рівнянь для шаблона (5.13) має вигляд

$$\langle -1, j \rangle + \langle +1, j \rangle + \langle i, j-1 \rangle + \langle i, j+1 \rangle - 4\langle i, j \rangle + kP_{ij} = 0, \\ i = \overline{0; m}, j = \overline{0; n}. \quad (5.28)$$

Варіюючи значення  $kP_{ij}$ , можна одержати різноманіття геометрично різних ДПП. Система (5.28) може реалізовуватися або тільки для координати  $z_{ij}$  на сітці  $\langle i, j \rangle, i = \overline{0; m}, j = \overline{0; n}$ , або ж для кожної з координат автономно на сітці  $(i, j)$ . Бажаючи докладніше ознайомитися зі статико-геометричним методом радимо звернутися до робіт С.М. Ковальова [17] або його учнів.

Розглянемо формоутворення точкового каркаса ДПП на основі системи (5.27).

**Задача 3.** Сформулювати точковий каркас ДПП, що спирається на квадратну в плані сітку  $4 \times 4$  лінійні одиниці (таблиця 5.4) за умови, що права частина рівнянь системи (5.27) стала й дорівнює 0,6.

Сітка  $(x_i, y_j)$  відповідає сітці  $(i, j)$ . Тому вирішуємо систему рівнянь (5.27) тільки для координати  $z_{ij}$ .

$$\begin{aligned} (0,0) + (0,2) + (2,2) + (2,0) - 4(1,1) &= 0,6 \\ (0,1) + (0,3) + (2,3) + (2,1) - 4(1,2) &= 0,6 \\ (0,2) + (0,4) + (2,4) + (2,2) - 4(1,3) &= 0,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1,0)+(1,2)+(3,2)+(3,0) - 4(2,1) &= 0,6 \\
(1,1)+(1,3)+(3,3)+(3,1) - 4(2,2) &= 0,6 \\
(1,2)+(1,4)+(3,4)+(3,2) - 4(2,3) &= 0,6 \\
(2,0)+(2,2)+(4,2)+(4,0) - 4(3,1) &= 0,6 \\
(2,1)+(2,3)+(4,3)+(4,1) - 4(3,2) &= 0,6 \\
(2,2)+(2,4)+(4,4)+(4,2) - 4(3,3) &= 0,6.
\end{aligned}
\tag{5.29}$$

Підкреслені точки мають нульові аплікати. Невідомих точок – 9, число рівнянь – 9. Вирішуємо систему й знаходимо аплікати невідомих точок. Результати зводимо в таблицю 5.4.

Таблиця 5.4 – Аплікати вузлів ДПП (задача 3)

| $j \backslash i$ | 0 | 1     | 2    | 3     | 4 |
|------------------|---|-------|------|-------|---|
| 0                | 0 | 0     | 0    | 0     | 0 |
| 1                | 0 | -0,25 | -0,3 | -0,25 | 0 |
| 2                | 0 | -0,3  | -0,4 | -0,3  | 0 |
| 3                | 0 | -0,25 | -0,3 | -0,25 | 0 |
| 4                | 0 | 0     | 0    | 0     | 0 |

Наочне зображення поверхні представлено на рис. 5.9.

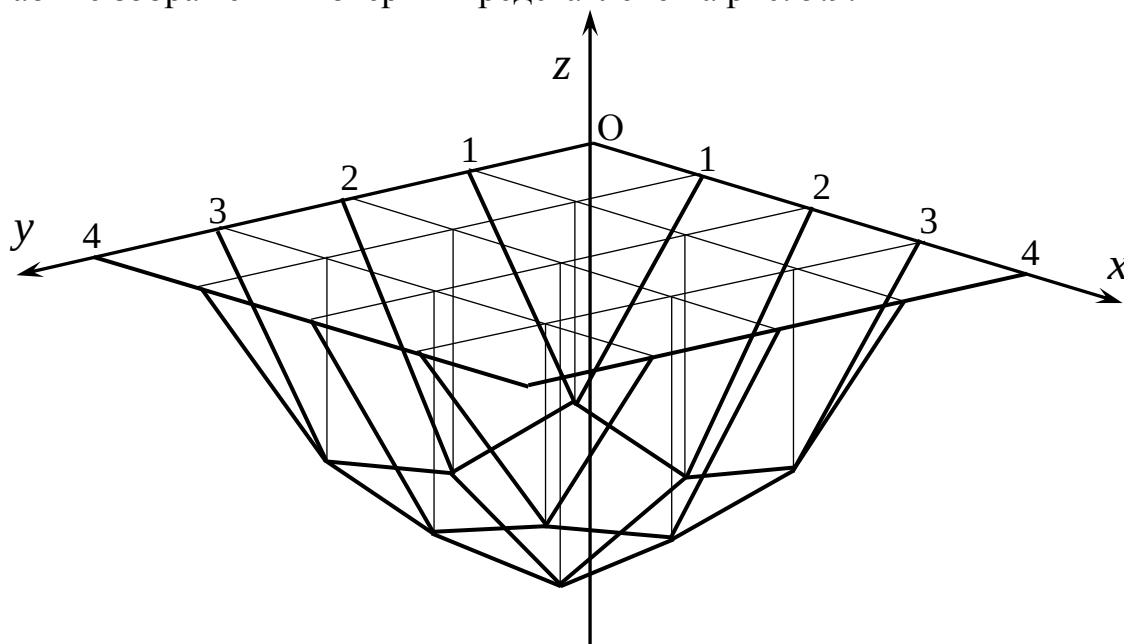


Рисунок 5.9 – Наочне зображення ДПП (таблиця 5.4, задача 3)

У розглянутій задачі параметром формоутворення поверхні було значення 0,6 (рівносильне зусиллю  $kP_{ij}$  в методі С.М.Ковальова). Згідно з методикою С.М.Ковальова, варіюючи значення параметра в правій частині, можна одержати різноманіття поверхонь, у т.ч. і шляхом накладення додаткових умов.

Ускладнимо попередню задачу, включивши точку інциденцій  $A_{22} = 3, y_{22} = 1, z_{22} = 2$ .

**Задача 4.** Сформувати точковий каркас ДПП, що спирається на квадратну сітку  $\langle i, j \rangle, i = \overline{0;4}, j = \overline{0;4}$ , й інциденту точці  $A_{22} = 3, 1, 2$ .

Оскільки задані 3 координати точки, у якої значення  $x_{22}$  й  $y_{22}$  відрізняються від аналогічних значень сітки  $\langle i, j \rangle$ , то при розв'язанні прийдеться скласти систему (5.29) для кожної координати окремо. На відміну від (5.29) невідомих точок 8, а не 9. Якщо зберегти методику формоутворення рівнянь і системи (5.29) у цілому, то виходить одне рівняння зайве (або не вистачає одного невідомого). Для усунення цього протиріччя будемо вважати праву частину рівнянь (5.29) сталою, але невідомою. Тоді для координати  $x$  маємо систему (5.29), де праворуч замість 0,6 буде невідоме  $K_x$ , і, крім того, координати  $x$  в точках  $\langle 0,0 \rangle, \langle 0,1 \rangle, \langle 0,2 \rangle, \langle 0,3 \rangle, \langle 0,4 \rangle$  – нульові, в  $\langle 1,0 \rangle$  і  $\langle 4,4 \rangle$  дорівнюють одиниці, в  $\langle 2,0 \rangle$  і  $\langle 2,4 \rangle$  дорівнюють 2, в  $\langle 3,0 \rangle$  і  $\langle 3,4 \rangle$  дорівнюють трьом, у  $\langle 4,0 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 4,3 \rangle$  дорівнюють 4, а також за умовою  $x_{22} = 3$ . З огляду на це, розв'язуємо систему й знаходимо  $K_x = -1,5$  і абсциси відсутніх 8 точок (таблиця 5.5).

Таблиця 5.5 – Координати вузлів ДПП (задача 4)

|         |     | $i = 0$ | $i = 1$ | $i = 2$ | $i = 3$ | $i = 4$ |
|---------|-----|---------|---------|---------|---------|---------|
| $j = 0$ | $x$ | 0       | 1       | 2       | 3       | 4       |
|         | $y$ | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
|         | $z$ | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $j = 1$ | $x$ | 0       | 1,625   | 2,75    | 3,625   | 4       |
|         | $y$ | 1       | 0,375   | 0,25    | 0,375   | 1       |
|         | $z$ | 0       | 1,25    | 1,5     | 1,25    | 0       |
| $j = 2$ | $x$ | 0       | 1,75    | 3       | 3,75    | 4       |
|         | $y$ | 2       | 1,25    | 1       | 1,25    | 2       |
|         | $z$ | 0       | 1,5     | 2       | 1,5     | 0       |
| $j = 3$ | $x$ | 0       | 1,625   | 2,75    | 3,625   | 4       |
|         | $y$ | 3       | 2,375   | 2,25    | 2,375   | 3       |
|         | $z$ | 0       | 1,25    | 1,5     | 1,25    | 0       |
| $j = 4$ | $x$ | 0       | 1       | 2       | 3       | 4       |
|         | $y$ | 4       | 4       | 4       | 4       | 4       |
|         | $z$ | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |

Аналогічну систему розв'язуємо для координат  $y$  і  $z$  за вихідними даними таблиці 5.5. Одержуємо  $K_y = 1,5, K_z = 3$ . Значення координат заносимо в таблицю 5.5. Наочне зображення ДПП представлене на рис. 5.10.



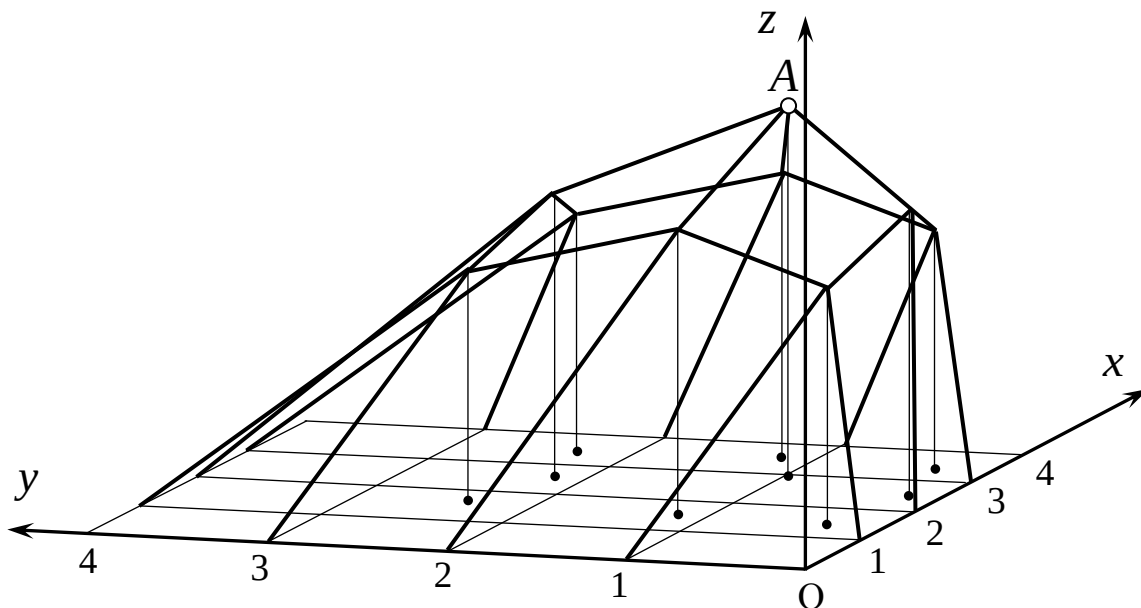


Рисунок 5.10 – Наочне зображення ДПП (таблиця 5.5, задача 4)

Аналогічним чином можна нарощувати число додаткових умов за рахунок ускладнення правої частини рівнянь, приймаючи який-небудь закон зміни параметрів формоутворення  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$  від лінійного до довільного степеневого у функції від номера рівняння або точки, як найбільш простого в чисельній реалізації.

При розв'язанні задачі 4 для розрахунку кожної з координат застосовувалася автономна система, тому що координати виявилися за умовою задачі незалежними. Якщо в умові задачі така залежність є, то тоді доводиться вирішувати складену систему із трьох систем (5.29) для кожної з координат, доповнену рівняннями зв'язку координат аналогічно задачі 6, п. 2.9. Крім ускладнення обчислень і більш пильного приведення у відповідність числа невідомих і числа рівнянь нічого принципово нового тут немає.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що є основою для розрахунку плоских ДПК перерізів ДПП?
2. Що є основою для розрахунку двовимірних точкових каркасів ДПП?
3. Чим відрізняється формоутворення ДПП за допомогою плоских ДПК перерізів і за допомогою параметричних ДПК?
4. Що таке незалежність координат? Як організується обчислювальний процес при порушенні незалежності?
5. Що собою представляє двовимірний поліном Лагранжа? Як формуються його коефіцієнти?
6. Що є основою побудови полінома Ньютона? Як визначається число точок для його завдання?

#### 5.4. ДИСКРЕТНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ДПП

Методи неперервного моделювання поверхонь розвиваються у двох напрямках:

- неперервне моделювання лінійних каркасів ДПП і вихід на послідовну двовимірну інтерполяцію. При цьому рівняння поверхні не відшукується. Розрахунок точок поверхні і її характеристик ведеться на основі рівнянь, отриманих інтерполяцією лінійних образів (перерізів поверхонь і ліній параметроносіїв). Однією з перспективних реалізацій цього напрямку є метод порцій поверхонь, орієнтований на машинну реалізацію;
- поліноміальна двовимірна інтерполяція точкового масиву узагальненими поліномами й раціональними функціями. При цьому відшукується рівняння поверхні, що інтерполіює задану ДПП, що бере участь потім у розв'язанні прикладних задач. Найцікавішими й перспективними методами цього напрямку є методи кусково-поліноміальної інтерполяції (сплайн-функцій і т.п.).

Серйозними недоліками двовимірної неперервної інтерполяції є високі степені поліномів, що інтерполіюють, і, як наслідок, неминуча поява осциляції; значні труднощі чисельної реалізації; малі можливості цілеспрямованої корекції й керування формою поверхні й ін.

Зазначених недоліків позбавлена двовимірна дискретна інтерполяція, у результаті застосування алгоритмів якої формується нова дискретна множина точок і значень похідних у них, що задовольняє умовам поставленої задачі й включає як підмножину вихідні дані. При цьому відбувається як завгодно щільне згущення точкового масиву, як локальне так і, при необхідності, глобальне, після чого на множині отриманих точок будується багатогранна поверхня, що представляє шукану поверхню в наступному розв'язанні прикладної задачі. Неодмінною умовою двовимірної інтерполяції, як і одновимірної, є вибір розв'язку в смузі допуску. Процес згущення припиняється по досягненні умови, коли величина смуги вибору розв'язку не перевищує заданого  $\varepsilon > 0$ .

Дискретна інтерполяція при упорядкованому завданні вихідних даних може здійснюватися за тими ж двома напрямками, зазначеними вище для неперервної інтерполяції (послідовна інтерполяція й інтерполяція за допомогою формування комірки поверхні). Однак є й інші можливості, що розвиваються запропоновані в розділі 3 напрямки двовимірної дискретної інтерполяції:

- методи, засновані на геометричних співвідношеннях. Сюди входять і метод послідовної інтерполяції і метод формування комірки поверхні;
- методи на основі тотожностей двовимірного згущення;
- методи на основі базисних функцій інтерполяції.

У випадку неупорядкованого завдання точкової множини ДПП потрібна розробка спеціальних алгоритмів розв'язання поставлених прикладних задач або доповнення інформації з метою упорядкування вихідних даних і застосування вже апробованих алгоритмів.

### 5.4.1. ПОСЛІДОВНА ДИСКРЕТНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

Метод послідовної інтерполяції широко розповсюджений при неперервному моделюванні і полягає в наступному.

Для ДПП на прямокутній сітці  $Ox_i y_j$  (рис. 5.11) розраховується апліката  $Z$  довільної її точки  $(\bar{x}, \bar{y})$ , заданої в плані, шляхом послідовного проведення одновимірних інтерполяцій рядів  $y = y_{j-1}, y = y_j, y = y_{j+1}, y = y_{j+2}$  і т.д. з метою визначення аплікат  $z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, z_{j+2}$  точок цих рядів з абсцисою  $x = \bar{x}$ , а потім одновимірної інтерполяції отриманого ряду в напрямку осі  $Oy$  з метою визначення шуканої аплікати  $\bar{z}$  при значенні  $y = \bar{y}$ . При цьому рівняння поверхні не визначається, лише розраховуються приналежні їй точки, необхідні для розв'язання прикладної задачі.

Очевидно, що послідовність проведення одновимірних інтерполяцій можна змінити і спочатку розрахувати точки рядів  $x = x_{i-1}, x = x_i, x = x_{i+1}, x = x_{i+2}$  при  $y = \bar{y}$ , а потім отриманий ряд (на рис. 5.11 відзначений хрестиками) інтерполювати по  $x$  і знайти шукану аплікату  $\bar{z}$ . У випадку неперервного моделювання значення  $\bar{z}$ , отримані в першому і другому випадках, збігаються.

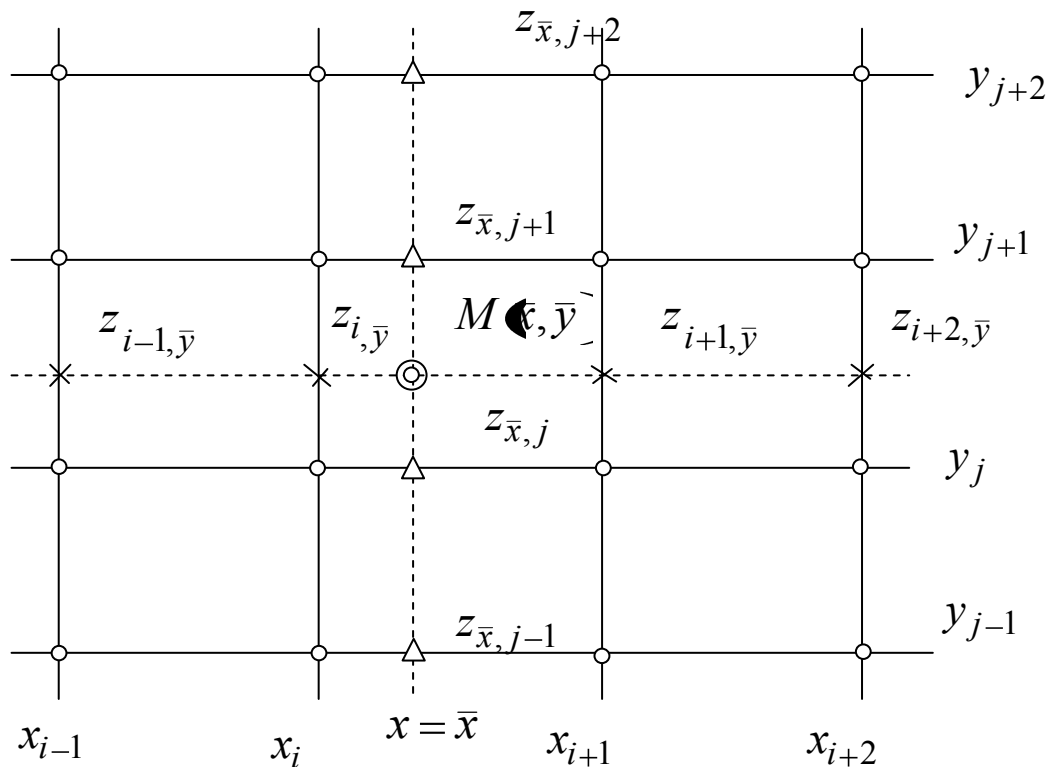


Рисунок 5.11 – Схема послідовної інтерполяції ДПП

Зазначений метод можна застосувати і при дискретному моделюванні. Тут одновимірна інтерполяція по кожному з напрямків є дискретною і здійснюється за алгоритмами розділу 3. На відміну від неперервної послідовної

інтерполяції тут порядок виконання одновимірних інтерполяцій відіграє роль, тому що її результат не розраховується однозначно, а вибирається з поля розв'язку. Щоб позбутися цього недоліку, необхідно домовитися про те, як вибирати точки в полі розв'язку. Це обмеження можна здійснити алгоритмічно, на кожному кроці згущення вибираючи значення коефіцієнта вибору за визначеним законом, або прийняти його сталим на будь-якому кроці згущення. Усе це визначається реальними умовами проектування.

Розглянемо послідовну дискретну інтерполяцію поверхні, представлені дискретною множиною вузлових значень і дотичних площин на прямокутній у плані сітці. Зазначені множини можна розділити на дві підмножини дискретно представлених *лінійних* обводів з дотичними векторами у вузлах.

**Алгоритм** визначення аплікати  $Z_{\bar{x}, \bar{y}}$  і дотичної площини в т.  $M$  з координатами  $\bar{x}$  й  $\bar{y}$  у плані.

1. Визначаємо комірку поверхні  $[x_i; x_{i+1}; y_j; y_{j+1}]$  для якої  $x_i < \bar{x} < x_{i+1}, y_j < \bar{y} < y_{j+1}$ .

2. Одним зі способів згущення, розроблених у 3-му розділі, виконуємо дискретну інтерполяцію по  $x$  до  $K$ -го кроку включно, коли перевищення точки згущення над хордою, що з'єднує сусідні вузлові точки, не перевищує заданого  $\varepsilon > 0$  на відрізку  $[x_i, x_{i+1}]$  при  $y = y_j$  і заданих вузлових значеннях аплікат  $z_{i,j}, z_{i+1,j}$  і похідних  $z'_{i,j,x}, z'_{i+1,j,x}$  по  $x$ .

3. Визначаємо відрізок  $[x_s, x_{s+1}]$  для якого  $x_s < \bar{x} < x_{s+1}$ , і розраховуємо  $Z = Z_{x=\bar{x}, j}$ :

$$Z = Z_{x=\bar{x}, j} = z_{s,j} \frac{x_{s+1} - \bar{x}}{x_{s+1} - x_s} + z_{s+1,j} \frac{\bar{x} - x_s}{x_{s+1} - x_s}, \quad (5.30)$$

а також значення  $z'_{\bar{x}, j, x}$  1-ї похідної по  $x$ :

$$z'_{x=\bar{x}, j, x} = z'_{s,j,x} \cdot \frac{x_{s+1} - \bar{x}}{x_{s+1} - x_s} + z'_{s+1,j,x} \cdot \frac{\bar{x} - x_s}{x_{s+1} - x_s}, \quad (5.31)$$

де  $z_s, z_{s+1}, z'_{s,j,x}, z'_{s+1,j,x}$  – значення аплікат і перших похідних по  $x$  у відповідних точках.

4. Приймаючи лінійний закон зміни поперечних похідних (у напрямку осі  $Oy$ ) уздовж лінії каркаса, що з'єднує точки  $[x_i, y_j]$  і  $[x_{i+1}, y_j]$ , визначаємо значення першої похідної  $z'_{x=\bar{x}, j, y}$  по  $y$  в знайдений точці (рис. 5.12).

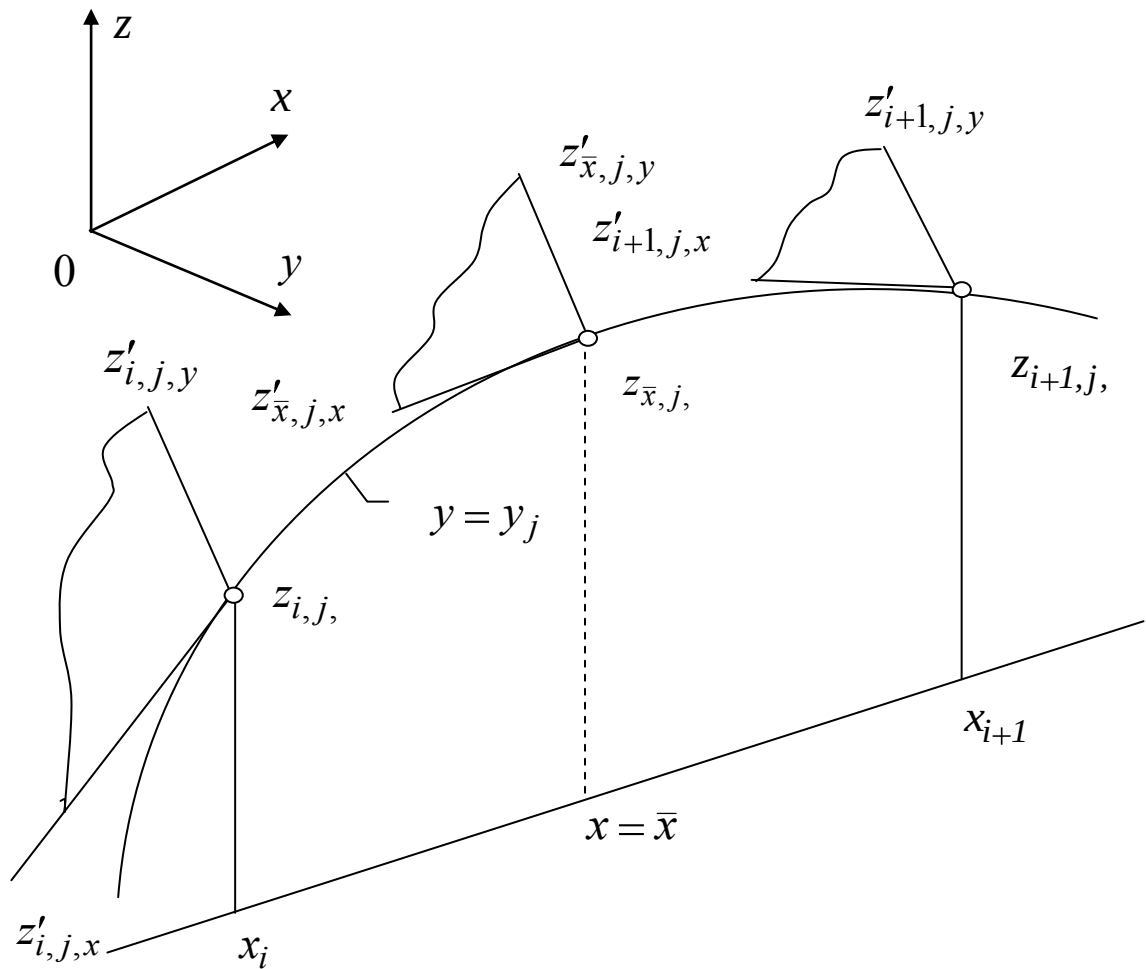


Рисунок 5.12 – Вибір поперечної дотичної в точці згущення

$$z'_{x=\bar{x},j,y} = z'_{i,j,y} \cdot \frac{x_{i+1} - \bar{x}}{x_{i+1} - x_i} + z'_{i+1,j,y} \cdot \frac{\bar{x} - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad (5.32)$$

де  $z'_{i,j,y}$  і  $z'_{i+1,j,y}$  – значення першої похідної лінійних обводів  $x = x_i$  і  $x = x_{i+1}$  в подовжньому напрямку (уздовж осі  $Oy$ ) у відповідних точках.

5. Аналогічно п.2 і п.3 алгоритму розраховуються точка згущення  $z_{x=\bar{x},j+1}$  і значення  $z'_{x=\bar{x},j+1,x}$  першої похідної в напрямку осі  $Ox$  (уздовж обводу) ребра  $y = y_{j+1}$ .

6. Аналогічно п.4 розраховується значення першої похідної  $z'_{x=\bar{x},j+1,y}$  в отриманій у п.5 точці в напрямку осі  $Oy$  (поперек обводу  $y = y_{j+1}$ ).

$$z'_{x=\bar{x},j+1,y} = z'_{i,j+1,y} \cdot \frac{x_{i+1} - \bar{x}}{x_{i+1} - x_i} + z'_{i+1,j+1,y} \cdot \frac{\bar{x} - x_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (5.33)$$

7. Аналогічно п.2 і п.3 алгоритму розраховуються значення аплікати  $z_{x=\bar{x}, y=\bar{y}}$  і першої похідної  $z'_{x=\bar{x}, y=\bar{y}, y}$  у напрямку осі  $Oy$  шуканої точки  $M(\bar{x}, \bar{y})$  (рис. 5.11).

Помітимо, що алгоритм, що викладається, розрахований на побудову точки згущення на основі двох двократних точок (точок з дотичними в них):  $(\bar{x}, y_i)$  з дотичною  $(\bar{x}, y'_{j, y})$  і  $(\bar{x}, y_{j+1})$  з дотичною  $(\bar{x}, y'_{j+1, y})$ . При необхідності в розрахунок можна включити точки ребер каркаса з абсцисою  $x = \bar{x}$  й ординатами  $y_{j-1}, y_{j+2}$  і т.д.

8. Скориставшись значеннями похідних  $z'_{x=\bar{x}, j, x}$  і  $z'_{x=\bar{x}, j+1, x}$ , розрахованими в п.3 і 5, визначаємо значення першої похідної  $z'_{x=\bar{x}, y=\bar{y}, x}$  по  $x$  в шуканій точці

$$z'_{x=\bar{x}, y=\bar{y}, x} = z'_{x=\bar{x}, j, x} \cdot \frac{y_{j+1} - \bar{y}}{y_{j+1} - y_j} + z'_{x=\bar{x}, j+1, x} \cdot \frac{\bar{y} - y_j}{y_{j+1} - y_j}. \quad (5.34)$$

Вектори  $z'_{x=\bar{x}, y=\bar{y}, x}$  і  $z'_{x=\bar{x}, y=\bar{y}, y}$  визначають дотичну площину в точці згущення.

Очевидно, що за викладеною методикою можна здійснити двовимірне як завгодно щільне згущення з урахуванням частинних похідних (у площинах рівня  $x = x_i, i = \overline{0; n}$ ; і  $y = y_j, j = \overline{0; m}$ ) другого і більш високого порядку й одержати в такий спосіб згущене дискретне представлення деякої поверхні.

Викладений вище алгоритм не акцентований на побудову опуклої комірки поверхні. Ця непроста задача вирішується в докторській дисертації Верещаги В.М. [14] З нею можна ознайомитися в бібліотеці ТДАТА.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке дискретна інтерполяція ДПП?
2. Що таке глобальна інтерполяція ДПП?
3. Що таке послідовна двовимірна інтерполяція ДПП?
4. У чому складається суть двовимірної дискретної інтерполяції ДПП?
5. Як формуються поперечні похідні уздовж плоских ДПК каркаса?
6. Які Ви знаєте методи дискретної інтерполяції ДПП?
7. У чому складається метод двовимірного згущення на основі геометричних співвідношень?

### 5.4.2. ДВОМІРНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ НА ОСНОВІ ТОТОЖНОСТЕЙ

Розглянемо можливість узагальнення раніше розглянутого в одновимірній інтерполяції (див. п. 3.2.) способу тотожностей, стосовно до формування згущення 4-кутних комірок точкового каркаса дискретно представленої поверхні.

Уведемо поняття центра  $S$  4-кутної комірки ДПП (рис. 5.13), вершини якої розташовані у вузлах рівномірної прямокутної сітки з кроками  $h_x$  і  $h_y$ .

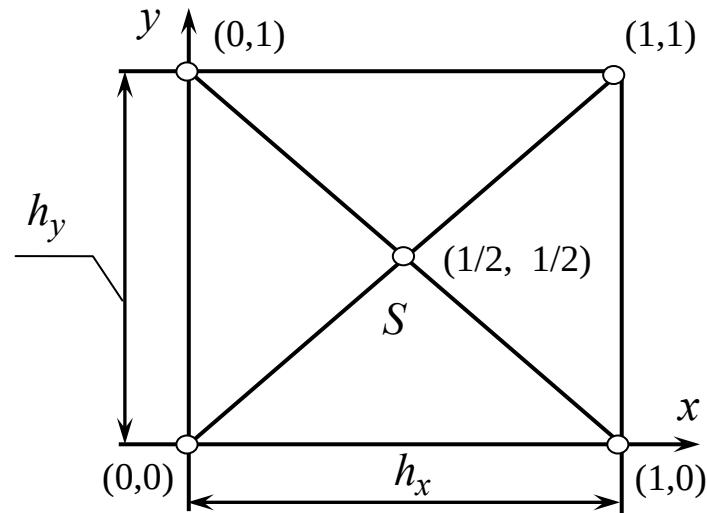


Рисунок 5.13 – Центр  $S$  4-кутної комірки ДПП

Його апліката  $z_s$  є середнім арифметичним аплікат вузлів комірки, тобто

$$z_s = \frac{1}{4} [z_{00} + z_{01} + z_{10} + z_{11}] \quad (5.35)$$

де  $z_{00}, z_{01}, z_{10}, z_{11}$  - аплікати вузлів комірки.

Точка  $S$  поділяє відстань між серединами  $N_1$  і  $N_2$  діагоналей комірки навпіл (рис. 5.14).

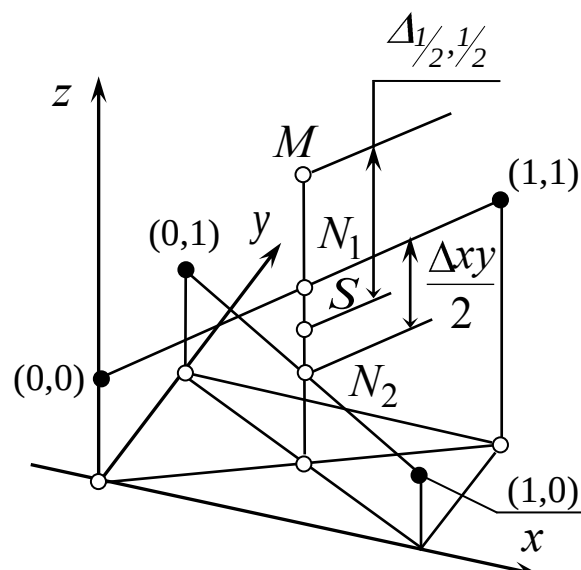


Рисунок 5.14 – Перевищення точки згущення  $M$  над центром комірки

Визначимо перевищення  $\Delta_{1/2,1/2}$  точки згущення  $M$  над центром комірки  $S$  зі співвідношення

$$\Delta_{1/2,1/2} = z_{1/2,1/2} - z_s. \quad (5.36)$$

Пов'яжемо це з поняттям змішаної скінченної різниці  $\Delta_{xy}$  вершин комірки.

$$\Delta_{xy} = z_{11} - z_{10} - z_{01} + z_{00} = z_{00} + z_{11} - z_{01} - z_{10}. \quad (5.37)$$

Очевидно, що відрізок  $N_1 N_2$  дорівнює:

$$N_1 N_2 = \left| \frac{\Delta_{xy}}{2} \right|. \quad (5.38)$$

Аплікати  $z_{N_1}$  і  $z_{N_2}$  дорівнюють:

$$z_{N_1} = z_s + \frac{|\Delta_{xy}|}{4}; \quad z_{N_2} = z_s - \frac{|\Delta_{xy}|}{4}. \quad (5.39)$$

Умова опуклості догори комірки в т.  $M$

$$z_M > z_{N_1}$$

або

$$z_M > z_s + \frac{|\Delta_{xy}|}{4}. \quad (5.40)$$

Тут величина  $\Delta_{xy}$  береться за модулем, тому що крім рис. 5.14, можлива ситуація, коли  $z_{N_1} < z_{N_2}$  і  $\Delta_{xy} < 0$ . При  $\Delta_{xy} = 0$  вершини комірки розташовуються в одній площині.

Розглянемо 4 суміжні комірки, що примикають до вузла (1.1) рис. 5.15. Запишемо  $\Delta_{11}^0$  для сумарної комірки (0,0)...(2,2)...

$$\Delta_{11}^0 = z_{11} - \frac{1}{4} (z_{00} + z_{02} + z_{20} + z_{22}). \quad (5.41)$$

Запишемо  $\Delta^1$  (верхній індекс указує номер кроку згущення) для відповідних точок згущення усередині складових комірок.

$$\begin{aligned} \Delta_{1/2,1/2}^1 &= z_{1/2,1/2} - \frac{1}{4} (z_{00} + z_{10} + z_{01} + z_{11}); \\ \Delta_{3/2,1/2}^1 &= z_{3/2,1/2} - \frac{1}{4} (z_{10} + z_{20} + z_{11} + z_{21}); \end{aligned} \quad (5.42)$$



$$\Delta_{3/2,3/2}^1 = z_{3/2,3/2} - \frac{1}{4} [z_{11} + z_{21} + z_{12} + z_{22}]^-;$$

$$\Delta_{1/2,3/2}^1 = z_{1/2,3/2} - \frac{1}{4} [z_{01} + z_{11} + z_{02} + z_{12}]^-;$$

$$\Delta_{1,1}^1 = z_{11} - \frac{1}{4} [z_{1/2,1/2} + z_{1/2,3/2} + z_{3/2,3/2} + z_{3/2,1/2}]^-;$$

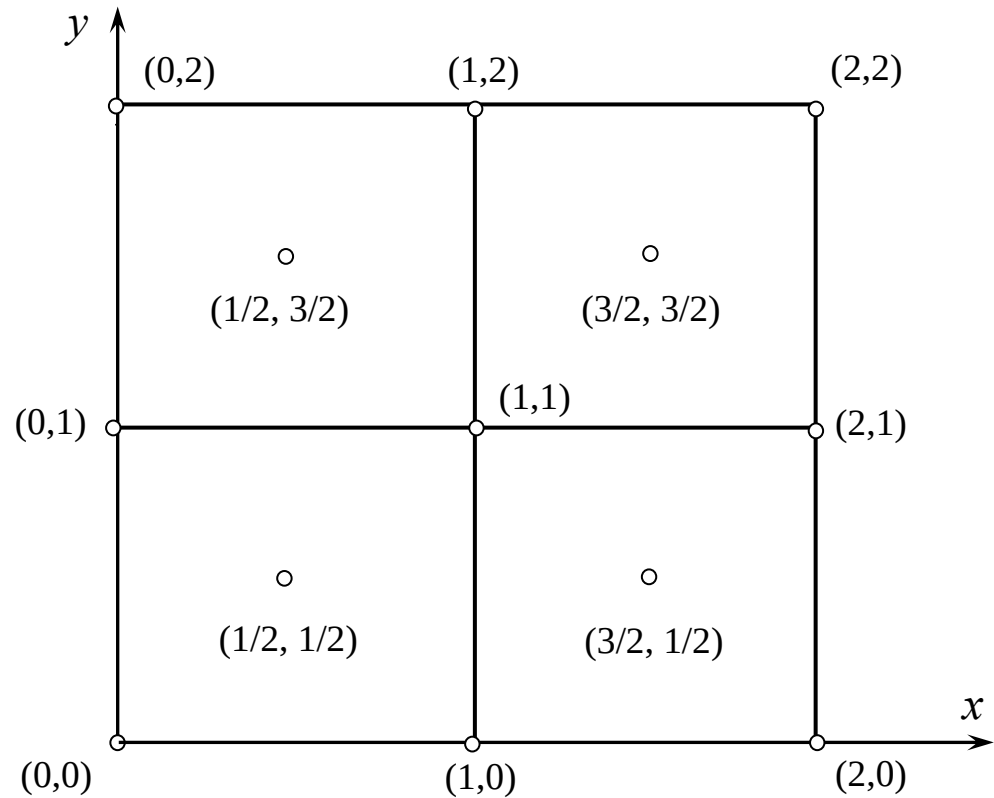


Рисунок 5.15 – До виведення основної тотожності двовимірного згущення

Помножимо останню рівність на 4 і складемо з першими 4-ма. Маємо основну тотожність двовимірного згущення в термінах перевищень

$$\Delta_{1/2,1/2}^1 + \Delta_{1/2,3/2}^1 + \Delta_{3/2,3/2}^1 + \Delta_{3/2,1/2}^1 + 4\Delta_{1,1}^1 = \Delta_{1,1}^0 - 2\bar{\Delta}_{1,1}^0 \quad (5.43)$$

де  $\Delta_{1,1}^0$  – перевищення (5.41) точки (1.1) щодо діагональних точок (вершин складеної комірки),

$$\bar{\Delta}_{1,1}^0 = z_{11} - \frac{1}{4} [z_{10} + z_{01} + z_{21} + z_{12}]^- \quad (5.44)$$

перевищення тієї ж точки (1.1) щодо середин бічних ребер складеної комірки.

Якщо задані 9 вершин складеної комірки, то задані і праві частини тотожностей (5.43). Окрема тотожність захоплює 4 комірки в околі вузла (1.1) і відбиває взаємозв'язок між перевищеннями точок згущення комірок в околі (1.1) і перевищеннями вузла (1.1) до і після згущення. Тотожність (5.43) справедлива для будь-якого способу згущення незалежно від диференціальних властивостей поверхні в околі центральної точки, не рахуючи особливостей (точки звороту, загострення, злам поверхні і т.п.).

Запишемо тотожність (5.43) для довільної точки  $(i, j)$

$$\Delta_{-0,5,j-0,5}^1 + \Delta_{j-0,5,j+0,5}^1 + \Delta_{i+0,5,j+0,5}^1 + \Delta_{i+0,5,j-0,5}^1 + 4\Delta_{i,j}^1 = \Delta_{i,j}^0 - 2\bar{\Delta}_{i,j}^0; \quad (5.45)$$

$$i = \overline{1; m-1}; \quad j = \overline{1; n-1}.$$

Система (5.45) містить  $\overbrace{(n-1)}^{n-1} \overbrace{(n-1)}^{n-1}$  рівнянь і має місце для кожної внутрішньої точки заданого точкового масиву ДПП. Вузли граничних ребер масиву у формуванні (5.41) не беруть участі.

Невідомими величинами в системі (5.45) є перевищення точок згущення усередині комірок. Усього комірок  $(m \cdot n)$ . Отже, для одержання єдиного розв'язку системи не вистачає

$$mn - (m-1)(n-1) = (m+n-1)$$

рівнянь, які можна одержати накладенням додаткових зв'язків на шукані перевищення і на співвідношення між ними (рівність, пропорційність і т.п.).

Система (5.45) не є різницевою схемою, для її розв'язання не можна одержати діагональну матрицю. Розглянемо це питання докладніше.

Візьмемо деякий відсік масиву і перенумеруємо комірки, як показано на рис. 5.16.

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |

Рисунок 5.16 – Нумерація комірок відсіку масиву ДПП



Для точок граничних комірок треба враховувати 2 можливі значення від двох сусідніх внутрішніх вузлових точок. Наприклад, в комірці (1,5;0,5) маємо 2 можливі значення

$$\Delta_{1,5;0,5}^1 = \frac{1}{8} \left[ \ell_{11}^0 - 2\overline{\Delta}_{11}^0 \right] \text{ або } \Delta_{1,5;0,5}^1 = \frac{1}{8} \left[ \ell_{21}^0 - 2\overline{\Delta}_{21}^0 \right]$$

Для запобігання осциляції у вузлових точках з цих двох значень треба брати мінімальне за модулем, тобто

$$|\Delta_{1,5;0,5}^1| = \frac{1}{8} \min \left[ |\ell_{11}^0 - 2\overline{\Delta}_{11}^0|; |\ell_{21}^0 - 2\overline{\Delta}_{21}^0| \right] \quad (5.48)$$

Для точок внутрішніх комірок треба порівняти 4 значення від сусідніх вузлів. Наприклад,

$$|\Delta_{1,5;1,5}^1| = \frac{1}{8} \min \left[ |\ell_{11}^0 - 2\overline{\Delta}_{11}^0|; |\ell_{21}^0 - 2\overline{\Delta}_{21}^0|; |\ell_{22}^0 - 2\overline{\Delta}_{22}^0|; |\ell_{12}^0 - 2\overline{\Delta}_{12}^0| \right] \quad (5.49)$$

Вибір перевищень згідно з (5.47), (5.48), (5.49) гарантує відсутність осциляції у вузлах каркаса. Для того, щоб забезпечити відсутність осциляції усередині комірки (щоб точка згущення усередині комірки була еліптичною), необхідне виконання умови

$$\Delta_{i+0,5;j+0,5}^1 > \frac{1}{4} |\Delta_{xy,i+0,5;j+0,5}|, \quad (5.50)$$

де  $\Delta_{xy,i+0,5;j+0,5}$  – змішана скінченна різниця вершин комірки.

Після того, як обрані значення перевищень, розраховуються аплікати точок згущення усередині комірок за формулою

$$z_{i+0,5;j+0,5}^1 = \Delta_{i+0,5;j+0,5}^1 + \frac{1}{4} \left[ \ell_{i,j}^0 + z_{i+1,j}^0 + z_{i,j+1}^0 + z_{i+1,j+1}^0 \right], \quad (5.51)$$

$$i = \overline{0;m-1}, j = \overline{0;n-1}$$

Для продовження розрахунків необхідно визначити точки згущення ребер каркаса. Це можна виконати одним зі способів розділу 3 або знову удавшись до тільки-но викладеного способу.

Розглянемо рис. 5.17, де зображена 4-кутна комірка каркаса ДПП у плані з точками згущення (див. кружечки). Хрестиками відзначені точки ребер каркаса, аплікати яких треба визначити.

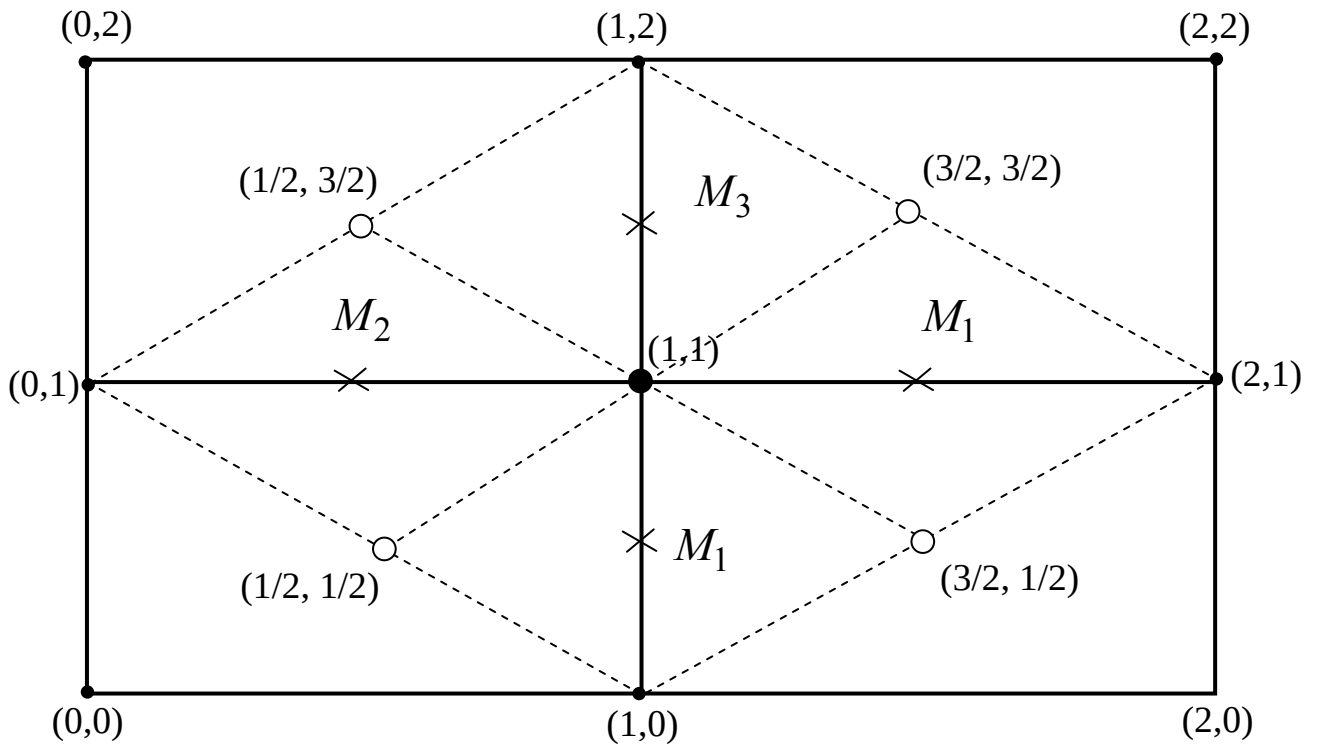


Рисунок 5.17 – Складена комірка ДПП з точками згущення,  
× - точки, що підлягають розрахунку

Утворюємо складену комірку  $[1, 0; 0,1;1,2;2,1]$ , яка складається з 4-х комірок меншого розміру, для яких шукані точки є точками згущення.  $M_1$  і  $M_2$  є точками згущення кутових комірок і тому можуть бути визначені зі співвідношення, аналогічного (5.47), а саме

$$\Delta_{M_1}^1 = \Delta_{M_2}^1 = \frac{1}{8} \left[ \overline{\Delta}_{11}^0 - 2\overline{\Delta}_{11}^0 \right], \quad (5.52)$$

де

$$\overline{\Delta}_{11}^0 = z_{11} - \frac{1}{4} \left[ z_{1/2,1/2} + z_{1/2,3/2} + z_{3/2,3/2} + z_{3/2,1/2} \right] \quad (5.53)$$

Точки  $M_3$  і  $M_4$  є точками спеціальних внутрішніх комірок, таких, що для них перевищення треба розраховувати за співвідношеннями, аналогічними (5.48), але з урахуванням того, що ці точки одночасно належать тільки трьом складеним коміркам (рис 5.18).

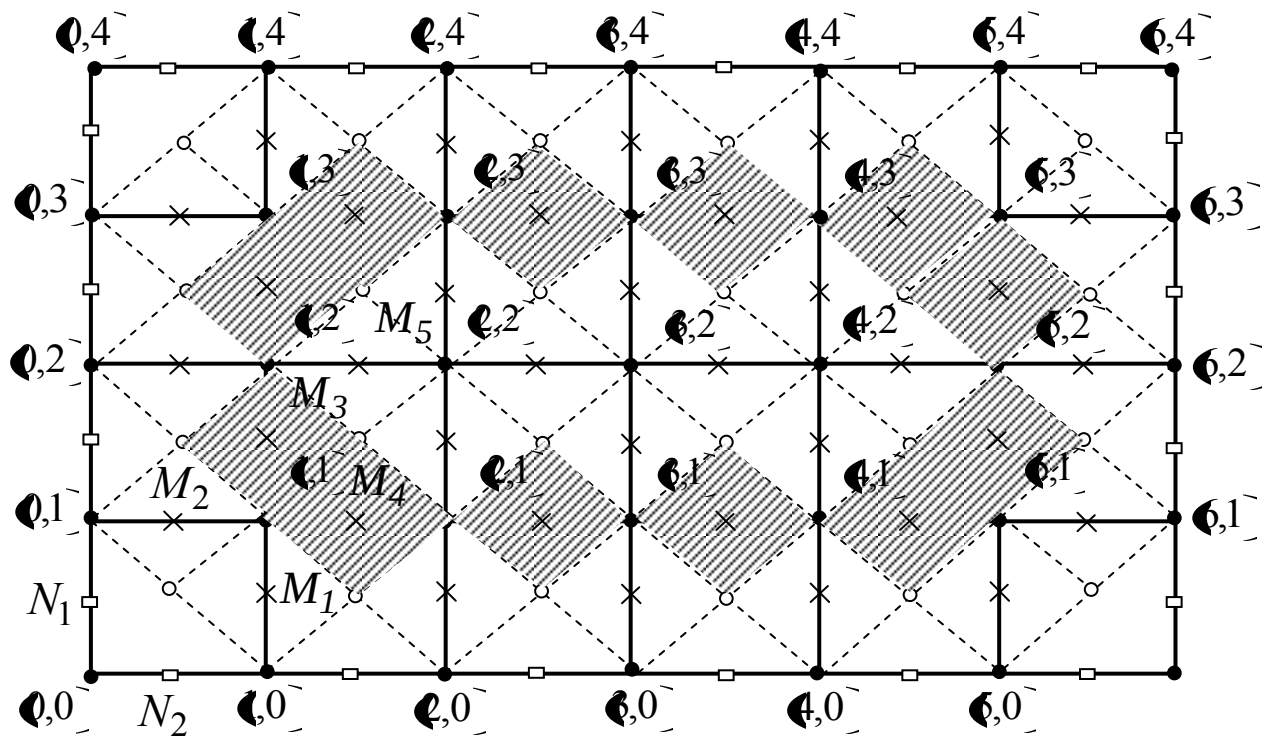


Рисунок 5.18 – Схема організації розрахунку згущення ребер каркаса ДПП

$$|\Delta_{M_3}^1| = \frac{1}{8} \min \left[ \left| \bar{\Delta}_{11}^0 - 2\bar{\Delta}_{11}^0 \right|; \left| \bar{\Delta}_{12}^0 - 2\bar{\Delta}_{12}^0 \right|; \left| \Delta_{3/2,3/2} - -2\bar{\Delta}_{3/2,3/2}^0 \right| \right] \quad (5.54)$$

$$|\Delta_{M_4}^1| = \frac{1}{8} \min \left[ \left| \bar{\Delta}_{11}^0 - 2\bar{\Delta}_{11}^0 \right|; \left| \bar{\Delta}_{21}^0 - 2\bar{\Delta}_{21}^0 \right|; \left| \Delta_{3/2,3/2} - 2\bar{\Delta}_{3/2,3/2}^0 \right| \right] \quad (5.55)$$

де

$$\Delta_{3/2,3/2}^0 = z_{3/2,3/2} - \frac{1}{4} [z_{1/2,3/2} + z_{3/2,5/2} + z_{5/2,3/2} + z_{3,2,1/2}] \quad (5.56)$$

$$\bar{\Delta}_{3/2,3/2}^0 = z_{3/2,3/2} - \frac{1}{4} [z_{11} + z_{12} + z_{22} + z_{21}] \quad (5.57)$$

При цьому повинно дотримуватися обмеження знизу, аналогічне (5.50)

$$\left| \Delta_{M_1}^1 \right| < \frac{1}{4} \left| \Delta_{xy;1,0}^{1,1} \right|; \left| \Delta_{M_2}^1 \right| < \frac{1}{4} \left| \Delta_{xy;0,1}^{1,1} \right|; \left| \Delta_{M_3}^1 \right| < \frac{1}{4} \left| \Delta_{xy;1,1}^{1,2} \right|; \quad (5.58)$$

$$\text{де } \Delta_{xy1,0}^{1,1} = [z_{1/2,1/2} + z_{3/2,1/2}] - [z_{1,0} + z_{1,1}]$$

$$\Delta_{xy0,1}^{1,1} = [z_{0,1} + z_{1,1}] - [z_{1/2,1/2} + z_{1/2,3/2}]$$

$$\Delta_{xy1,1}^{1,2} = \left[ \Delta_{1/2,3/2}^0 + z_{3/2,3/2} - \Delta_{11}^0 + z_{12} \right]; \quad (5.59)$$

змішані скінченні різниці відповідних похилих комірок. На рис. 5.18 заштриховані комірки, де розрахунок здійснюється за співвідношеннями, аналогічними (5.54)...(5.57). Вони розділяють кутові комірки каркаса від внутрішніх.

Точки згущення внутрішніх комірок розраховуються за співвідношеннями, аналогічними (5.49). Так, наприклад, для точки  $M_5$  (рис. 5.18)

$$\begin{aligned} |\Delta_{M_5}^1| = \frac{1}{8} \min & \left[ \left| \Delta_{12}^0 - 2 \Delta_{12}^0 \right|; \left| \Delta_{22}^0 - 2 \Delta_{22}^0 \right|; \right. \\ & \left. \left| \Delta_{3/2,5/2}^0 - 2 \Delta_{3/2,5/2}^0 \right|; \left| \Delta_{3/2,3/2}^0 - 2 \Delta_{3/2,3/2}^0 \right| \right]. \end{aligned} \quad (5.60)$$

При цьому також треба враховувати обмеження по величині відповідної змішаної різниці.

Аплікати розглянутих точок розраховуються за співвідношеннями, аналогічними (5.51).

Як бачимо з рис. 5.18 розрахунок не торкнувся точок згущення граничних ребер, позначених на рис. 5.18 квадратами. Очевидно, розрахунок треба виконати з урахуванням аплікат вже отриманих точок згущення комірок і внутрішніх ребер. Доцільніше всього аплікати точок згущення ребер розраховувати способом  $\delta_{\min}^1$  і підкоректувати їхні значення з урахуванням впливу точок згущення комірки, що примикає.

Конкретно, для подовжнього ряду  $y = 0$  (рис. 5.18) з урахуванням того, що ряд опуклий догори  $\delta_i^0 < 0$

$$\delta_{i+0,5}^1 = \frac{-1}{4} \min \left[ |\delta_i^0|; |\delta_{i+1}^0| \right]; \quad (5.61)$$

$$z_{i+0,5} = \frac{1}{2} \left[ z_{i,0} + z_{i+1,0} - \delta_{i+0,5}^1 \right]; \quad (5.62)$$

З боку комірки, опуклої догори, діє обмеження

$$z_{i+0,5} < \frac{1}{2} \left[ z_{i+0,5,1/2} - z_{i+0,5,1} \right]; \quad (5.63)$$

з урахуванням якого треба підкоректувати знайдене в (5.62) значення. Аналогічно розраховується згущення ряду  $y = y_n$ .

Для ряду  $x = 0$

$$\delta_{j+0,5}^1 = \frac{-1}{4} \min \left[ |\delta_j^0|; |\delta_{j+0,5}^0| \right]; \quad (5.64)$$

$$z_{j+0,5} = \frac{1}{2} [z_{0,j} + z_{0,j+1} - \delta_{j+0,5}^1] \leq \frac{1}{2} [z_{1/2,j+0,5} - z_{1,j+0,5}] \quad (5.65)$$

Аналогічно здійснюється розрахунок ряду  $x = x_m$ . Після цього вузли згущеного каркаса перенумеровуються і розрахунок повторюється спочатку.

Як бачимо, спосіб має властивість локальності розрахунків, дозволяє формувати як завгодно щільний згущений точковий каркас ДПП на прямокутній у плані сітці. По закінченні згущення поверхня апроксимується багатогранною поверхнею, що і використовується надалі при розв'язанні прикладної задачі.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому полягає метод двовимірного згущення на основі тотожностей?
2. Що таке центр комірки? Як визначаються перевищення точок над центром комірки?
3. У чому полягає спосіб розв'язку системи рівнянь, складеної на основі тотожностей?

#### 5.4.3. ДВОВИМІРНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ НА ОСНОВІ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ

Застосування базисних функцій уже показало ефективність для дискретного геометричного моделювання розв'язання багатьох прикладних задач на площині. Розглянемо можливості цього методу для розв'язання задач двовимірної дискретної інтерполяції.

Суть методу полягає в тому, що вводиться деяка базисна функція (поверхня), що включає визначену підмножину дискретних базисних елементів ДПП (точок, значення похідних і т.п.). Потім за умови інцидентності отриманої базисної функції (поверхні) визначається точка згущення і, при необхідності, диференціальні характеристики модельованої поверхні в цій точці. Таким чином, кожна точка згущення спирається на цілком визначену підмножину базисних елементів, що тільки її породжує. Зрушення індексів на одиницю в якому-небудь напрямку формує новий склад базисних елементів і нову точку згущення.

Наприклад, якщо на рис. 5.14 у якості базисних узяти 4 точки  $[0, 0; 1, 0; 0, 1; 1, 1]$ , то, провівши через них параболоїд  $z = ax + by + cxy + d$ , де  $a, b, c, d$  – числові коефіцієнти, обумовлені з умови інцидентності зазначеним точкам, можна при  $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$  визначити аплікату точок всередині комірки.

Далі вибираємо вершини комірки, що примикає,  $[0, 1; 0, 2; 1, 2; 1, 1]$ , проводимо аналогічний параболоїд (коефіцієнти будуть іншими) і розрахову-



емо приналежну йому точку  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{3}{2}$ , і т. д.

Зауважимо, що множина отриманих точок згущення не належить єдиному параболоїдові (див. також п. 3.3.).

Рівняння параболоїда має вигляд

$$\begin{vmatrix} z & x & y & xy & 1 \\ z_{i,j} & x_i & y_j & x_i y_j & 1 \\ z_{i+1,j} & x_{i+1} & y_j & x_{i+1} y_j & 1 \\ z_{i,j+1} & x_i & y_{j+1} & x_i y_{j+1} & 1 \\ z_{i+1,j+1} & x_{i+1} & y_{j+1} & x_{i+1} y_{j+1} & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (5.66)$$

де  $(x_i, y_j, z_{i,j})$ ,  $(x_{i+1}, y_j, z_{i+1,j})$ ,  $(x_i, y_{j+1}, z_{i,j+1})$ ,  $(x_{i+1}, y_{j+1}, z_{i+1,j+1})$  – вузли 4-кутної комірки, що однозначно визначають параболоїд за умови, що вони не лежать в одній площині. Підставляючи в (5.66) значення  $x = x_{i+0,5}$ ,  $y = y_{j+0,5}$ , можна визначити аплікату  $z_{i+0,5,j+0,5}$  точки згущення в центрі комірки.

Запропонований спосіб особливо ефективний тоді, коли дискретне представлення базисної функції є різницевою схемою. Зокрема, на рівномірній у двох напрямках сітці з кроками  $h_x = x_{i+1} - x$ ,  $h_y = y_{j+1} - y_j$  з (5.66) маємо

$$\begin{vmatrix} z_{i+0,5,j+0,5} & x_i + h_x/2 & y_j + h_y/2 & (x_i + h_x/2)(y_j + h_y/2) & 1 \\ z_{i,j} & x_i & y_j & x_i y_j & 1 \\ z_{i+1,j} & x_i + h_x & y_j & (x_i + h_x)y_j & 1 \\ z_{i,j+1} & x_i & y_j + h_y & x_i(y_j + h_y) & 1 \\ z_{i+1,j+1} & x_i + h_x & y_j + h_y & (x_i + h_x)(y_j + h_y) & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.67)$$

Після елементарних перетворень маємо рівність, що не залежить ні від кроків сітки, ні від початкових точок комірки

$$\begin{vmatrix} z_{i+0,5,j+0,5} & 1/2 & 1/2 & 1/4 & 1 \\ z_{i,j} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ z_{i+1,j} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ z_{i,j+1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ z_{i+1,j+1} & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.68)$$

Звідси одержуємо різницеве рівняння

$$z_{i,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j+1} + z_{i+1,j+1} - 4z_{i+0,5,j+0,5} = 0, \quad (5.69)$$

справедливе при  $i = \overline{0;m}, j = \overline{0;n}$  в області представлення ДПП.

Відповідно до цього рівняння розраховується апліката  $z_{i+0,5,j+0,5}$  точок згущення в центрі комірки

$$z_{i+0,5,j+0,5} = 1/4 (z_{i,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j+1} + z_{i+1,j+1}). \quad (5.70)$$

Як показано нами раніше, не усякі функції (поверхні) і не на всякій сітці мають дискретні представлення у вигляді різницевих схем. Цією властивістю на рівномірній сітці володіють тільки алгебраїчні функції в області своєї регулярності.

Викладений спосіб можна застосувати і при параметричному представленні поверхні. У цьому випадку кожна з координат  $x, y, z$  розраховується за формулами, аналогічним (5.70), якщо множина значень параметрів  $u$  і  $v$  задано на рівномірній сітці  $u_i$  і  $v_i, h_u = u_{i+1} - u = \text{const}; h_v = v_{j+1} - v_j = \text{const}$

$$\begin{aligned} x_{i+0,5,j+0,5} &= 1/4 (x_{i,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1}), \\ y_{i+0,5,j+0,5} &= 1/4 (y_{i,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}), \\ z_{i+0,5,j+0,5} &= 1/4 (z_{i,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j+1} + z_{i+1,j+1}). \end{aligned} \quad (5.71)$$

Тут значення  $x_{i,j}, x_{i+1,j}, \dots; y_{i,j}, y_{i+1,j}, \dots; z_{i,j}, z_{i+1,j}, \dots$  є функціями  $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$  параметрів  $u, v$ , причому всі ці функції аналогічні на сітці  $(u, v)$  зазначеному раніше параболоїдові.

Замість (5.71) зручніше записати

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i+0,5,v_{j+0,5}}^k &= \frac{1}{4} (\mathbf{f}_{i,v_j}^k + \mathbf{f}_{i+1,v_j}^k + \mathbf{f}_{i,v_{j+1}}^k + \mathbf{f}_{i+1,v_{j+1}}^k), \\ k &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5.72)$$

або, опускаючи індекс  $k$ , тому що формули ідентичні для кожної з координат точок, а також позначення параметрів, маємо

$$\mathbf{f}_{+0,5,j+0,5} = \frac{1}{4} (\mathbf{f}_{j} + \mathbf{f}_{+1,j} + \mathbf{f}_{j+1} + \mathbf{f}_{+1,j+1}) \quad (5.73)$$

У запропонованому способі більш універсальним є використання в якості базисну функцію рівняння комірки Кунса

$$-(u, v) = l_1 \begin{bmatrix} -1 & l_2 \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} 0,0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0,1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0,v \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0,0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0,1 \end{bmatrix} \\ l_2 \begin{bmatrix} 0,v \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0,0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0,1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

Тут індекс, що вказує номер координати, опущений, сторони 4-кутної комірки описуються функціями  $(u,0)_k, (u,1)_k, (0,v)_k, (1,v)_k$ ,  $k=1,2,3$ ; вершини комірки мають координати  $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ ,

$$l_1(u) = u, \quad l_2(u) = 1 - l_1(u) = 1 - u \quad (5.75)$$

перехідні (змішуючі) функції.

Запис (5.74) носить умовний характер і означає, що кожен елемент матриці помножується на відповідні множники, зазначені ліворуч і зверху матриці.

Відповідна координата точки згущення комірки Кунса при  $u = v = 1/2$  дорівнює

$$-(1/2, 1/2) = 1/2 \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1/2,0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1/2,1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0,1/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0,0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0,1 \end{bmatrix} \\ 1/2 & \begin{bmatrix} 0,1/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0,0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0,1 \end{bmatrix} \end{bmatrix};$$

або

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2,1/2 \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2,0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2,1 \end{bmatrix} \\ -1/4 \begin{bmatrix} 0,0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

Якщо ребра комірки – відрізки прямих ліній, то

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1/2,0 \end{bmatrix} &= 1/2 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1/2,1 \end{bmatrix} &= 1/2 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0,1/2 \end{bmatrix} &= 1/2 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0,1/2 \end{bmatrix} &= 1/2 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.77)$$

Тоді

$$(1/2, 1/2) = 1/4 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (5.78)$$

що цілком збігається з (5.70), тому що в обох випадках точка згущення належить поверхні гіперболічного параболоїда.

У загальному випадку  $(1/2,0)$ ,  $(1/2,1)$ ,  $(0,1/2)$ ,  $(1,1/2)$  – середини криво-лінійних ребер комірки при їхньому параметричному представленні (рис. 5.19). Користуючись визначеннями, даними в п. 5.4.2., відзначимо на рис. 5.19 центр  $S$  комірки з вершинами у вузлах і центр  $\bar{S}$  комірки з вершинами в середині бічних ребер. Незавжди бачити з (5.76), що координата точок згущення дорівнює різниці подвоєної координати центра  $\bar{S}$  і координати  $S$ . Чим більше різниця між зазначеними координатами (більш опуклі ребра), тим вище розташована точка згущення, тим більш опуклим є формоване згущення комірки. Очевидно, що якщо  $S = \bar{S}$ , то всі точки, включаючи точку згущення, розташовані в одній площині.

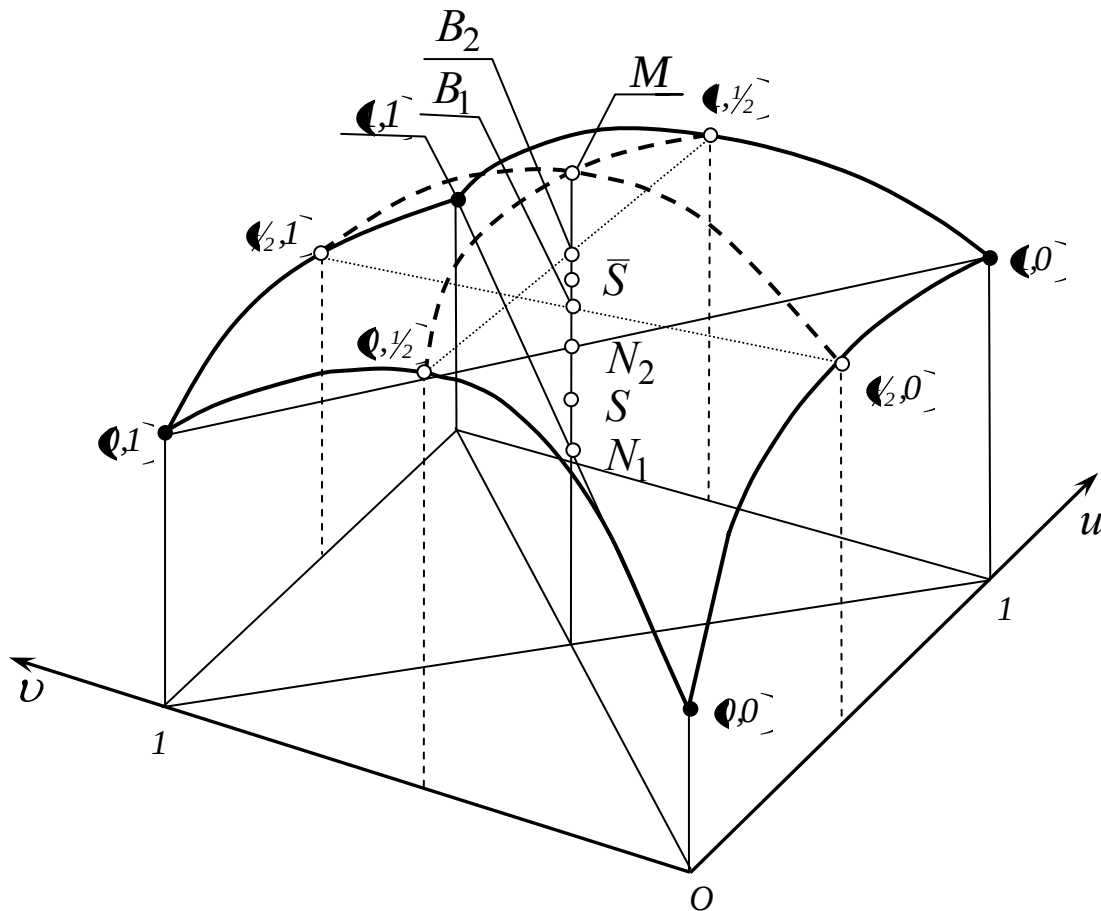


Рисунок 5.19 – До обґрунтування розрахунку точки згущення 4-кутної комірки

Щоб продовжити процес згущення, необхідно отриману точку згущення включити в число вузлових і надалі розглядати вихідну комірку, що складається з 4-х комірок поменше, кожна з яких розраховується окремо. Процес згущення можна закінчити тоді, коли відстань  $S\bar{S}$  (усередині комірки досить малих розмірів) не стане менше заданого як завжди малого  $\varepsilon > 0$ .

Особливість і переваги викладеного способу згущення полягають у тому, що

- забезпечується локальність розрахунків;
- немає необхідності зберігати проміжні результати, вони можуть бути

відновлені на підставі вихідних даних.

Недоліком є неможливість корекції формованої комірки.

Щоб уникнути цього, можна розглянути рівняння 4-кутної комірки з заданими похідними на межі:

$$\begin{aligned}
 -(u,v) = & \begin{array}{c} -1 \\ l_1(u) \\ l_2(u) \\ l_3(u) \\ l_4(u) \\ l_5(u) \\ l_6(u) \end{array} \left[ \begin{array}{ccccc} -1 & l_1(v) & l_2(v) & l_3(v) & l_4(v) \\ 0 & (u,0) & (u,1) & (u,0)_v & (u,1)_v \\ (0,v) & (0,0) & (0,1) & (0,0)_v & (0,1)_v \\ (1,v) & (1,0) & (1,1) & (1,0)_v & (1,1)_v \\ (0,v)_u & (0,0)_u & (0,1)_u & (0,0)_{uv} & (0,1)_{uv} \\ (1,v)_u & (1,0)_u & (1,1)_u & (1,0)_{uv} & (1,1)_{uv} \\ (0,v)_{uu} & (0,0)_{uu} & (0,1)_{uu} & (0,0)_{uuv} & (0,1)_{uuv} \\ (1,v)_{uu} & (1,0)_{uu} & (1,1)_{uu} & (1,0)_{uuv} & (1,1)_{uuv} \end{array} \right] \rightarrow \\
 & \begin{array}{cc} l_5(v) & l_6(v) \\ (u,0)_{vv} & (u,1)_{vv} \\ (0,0)_{vv} & (0,1)_{vv} \\ \rightarrow (1,0)_{vv} & (1,1)_{vv} \\ (0,0)_{uvv} & (0,1)_{uvv} \\ (1,0)_{uvv} & (1,1)_{uvv} \\ (0,0)_{uuvv} & (0,1)_{uuvv} \\ (1,0)_{uuvv} & (1,1)_{uuvv} \end{array} \cdot \quad (5.79)
 \end{aligned}$$

Тут  $(u,0)_v, (u,1)_v, (u,0)_{vv}, (u,1)_{vv}$  – поперечні похідні по  $v$  ребер, що залежать від  $u$ ;  $(0,v)_u, (0,v)_{uu}, (0,v)_{uu}$  – поперечні похідні по  $u$  ребер, що залежать від  $v$ . Інші елементи матриці – це значення відповідних частинних похідних поверхні у вузлах комірки.

Перехідні функції

$$l_1 \llcorner = 1 - 10u^3 + 15u^4 - 6u^5;$$

$$l_2 \llcorner = 1 - l_1 \llcorner;$$

$$l_3 \llcorner = u - 6u^3 + 8u^4 - 3u^5;$$

$$l_4 \llcorner = -4u^3 + 7u^4 - 3u^5;$$

$$l_5 \llcorner = \frac{1}{2} \llcorner^2 - 3u^3 + 3u^4 - u^5 \llcorner;$$

$$l_6 \llcorner = \frac{1}{6} \llcorner^3 - 2u^4 + u^5 \llcorner,$$

узяті з класу алгебраїчних поліномів, забезпечують виконання граничних умов і є множниками полінома Ерміта.

Рівняння (5.79) забезпечує другий порядок гладкості на стику двох комірок. З нього можна виділити (штрихова лінія) рівняння комірки, що забезпечує 1-й порядок гладкості. У цьому випадку

$$l_1 \llcorner \rceil = 1 - u^3; \quad l_2 \llcorner \rceil = u^3; \quad l_3 \llcorner \rceil = u - u^3; \quad l_4 \llcorner \rceil = u^3 - u^2.$$

Методика побудови згущення розглянутих комірок нічим не відрізняється від раніше розглянутої. У формулу (5.79) підставляються значення  $u = v = 1/2$  і визначаються відповідні координати точки згущення, потім рівняння (5.79) диференціюється по  $u$  і визначається значення 1-ї похідної по  $u$  в точці згущення при  $u = v = 1/2$  і т.д. Після того, як визначені значення всіх необхідних частинних похідних у точці згущення і серединах ребер, комірка розбивається на 4 складові комірки і розрахунок продовжується.

Особливі складнощі виникають при завданні значень похідних у вузлах комірки. У силу того, що геометричний зміст старших параметричних змішаних похідних важко уявний, то можливі помилки, що можуть викликати одержання незадовільної форми комірки.

Форма поверхні в околі заданої точки цілком залежить від співвідношень других частинних похідних  $r, s$  і  $t$ , де

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

При  $s^2 - rt = 0$  маємо точку поверхні, що розгортається (параболічна точка), при  $s^2 - rt < 0$  – точку опуклої поверхні (еліптична точка), при  $s^2 - rt > 0$  – гіперболічну точку. При дискретному представленні поверхні  $r$  і  $t$  – це другі похідні ребер каркаса (ліній рівня  $y = \text{const}$  або  $x = \text{const}$  відповідно). Вони легко уявні і контрольовані. Тоді значення  $s$  у вузлах каркаса повинне відповідати вимогам, обумовленим типом поверхні в розглянутому околі.

Справа ще ускладнюється тим, що рівняння комірки представлені в параметричній формі, де потрібно задавати похідні за параметрами.

Якщо поверхня задана в параметричній формі  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ , то перші похідні  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$  визначаються за формулами

$$p = \frac{-1}{\Delta} \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}; \quad q = \frac{-1}{\Delta} \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}; \quad (5.80)$$

де індекси вказують параметр, за яким диференціюється відповідна функція.

Другі похідні дорівнюють:

$$r = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & x_u & x_v \\ m & y_u & y_v \\ n & z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad (5.81)$$

де

$$\begin{aligned} l &= x_{uu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + x_{vv} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2x_{uv} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \\ m &= y_{uu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + y_{vv} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2y_{uv} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \\ n &= z_{uu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + z_{vv} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2z_{uv} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$s = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} l_1 & x_u & x_v \\ m_1 & y_u & y_v \\ n_1 & z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad (5.82)$$

де

$$\begin{aligned} l_1 &= x_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + x_{uv} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) + x_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}; \\ m_1 &= y_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + y_{uv} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) + y_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}; \\ n_1 &= z_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + z_{uv} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) + z_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

А також

$$t = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} l_2 & x_u & x_v \\ m_2 & y_u & y_v \\ n_2 & z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad (5.83)$$

де

$$\begin{aligned} l_2 &= x_{uu} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + x_{vv} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2x_{uv} \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}; \\ m_2 &= y_{uu} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + y_{vv} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2y_{uv} \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}; \end{aligned}$$

$$n_2 = x_{uu} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + x_{vv} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2x_{uv} \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

З огляду на те, що для лінійної смуги (крива лінія, у кожній точці якої задана дотична площина)

$$z_u = p \cdot x_u + q \cdot y_u; \quad z_v = p \cdot x_v + q \cdot y_v; \quad (5.84)$$

де  $\{1, p, q\}$  – координати вектора нормалі, дійдемо висновку, що і перші і другі похідні не незалежні.

Дійсно

$$\begin{aligned} z_{uu} &= r \cdot x_u^2 + 2s \cdot x_u y_u + t \cdot y_u^2 + p \cdot x_{uu} + q \cdot y_{uu}; \\ z_{vv} &= r \cdot x_v^2 + 2s \cdot x_v y_v + t \cdot y_v^2 + p \cdot x_{vv} + q \cdot y_{vv}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Усе це необхідно враховувати при формуванні матриць розрахунку відповідно до рівнянь (5.79).

Функції поперечних похідних у найпростішому випадку можна сформулювати за допомогою перехідної функції  $l_1$ . Зокрема,

$$\begin{aligned} \langle 0, 0 \rangle_{uv} &= \langle 0, 0 \rangle_{uv} \cdot l_1 \langle 1 \rangle + \langle 0, 0 \rangle_{uv} \cdot [-l_1 \langle 2 \rangle] \\ \langle 1, 1 \rangle_{uv} &= \langle 1, 1 \rangle_{uv} \cdot l_1 \langle 1 \rangle + \langle 1, 1 \rangle_{uv} \cdot [-l_1 \langle 2 \rangle] \\ \langle 0, 1 \rangle_{uv} &= \langle 0, 0 \rangle_{uv} \cdot l_1 \langle 1 \rangle + \langle 0, 1 \rangle_{uv} \cdot [-l_1 \langle 2 \rangle] \\ \langle 1, 0 \rangle_{uv} &= \langle 0, 0 \rangle_{uv} \cdot l_1 \langle 1 \rangle + \langle 1, 1 \rangle_{uv} \cdot [-l_1 \langle 2 \rangle] \end{aligned} \quad (5.86)$$

а також

$$\begin{aligned} \langle 0, 0 \rangle_{vu} &= \langle 0, 0 \rangle_{vu} \cdot l_1 \langle 1 \rangle + \langle 0, 0 \rangle_{vu} \cdot [-l_1 \langle 2 \rangle] \\ \langle 1, 1 \rangle_{vu} &= \langle 1, 1 \rangle_{vu} \cdot l_1 \langle 1 \rangle + \langle 1, 1 \rangle_{vu} \cdot [-l_1 \langle 2 \rangle] \\ \langle 0, 1 \rangle_{vu} &= \langle 0, 0 \rangle_{vu} \cdot l_1 \langle 1 \rangle + \langle 0, 1 \rangle_{vu} \cdot [-l_1 \langle 2 \rangle] \\ \langle 1, 0 \rangle_{vu} &= \langle 0, 0 \rangle_{vu} \cdot l_1 \langle 1 \rangle + \langle 1, 1 \rangle_{vu} \cdot [-l_1 \langle 2 \rangle] \end{aligned} \quad (5.87)$$

При цьому змішані похідні за параметрами утворюються диференціюванням отриманих вище формул. Вузлові значення їх обнуляються, за рахунок чого здійснюється узгодження їх значень у вузлах. Якщо обнуління не можна допускати, то замість  $l_1$  варто взяти більш складні з багаточленів Ерміта.

При згущенні  $u = v = 1/2$  і значення похідних у цих точках, як неважко бачити з (5.86) і (5.87), дорівнюють напівсумі граничних вузлових значень.

До викладеного способу, заснованому на згущенні комірки Кунса, близько примикає спосіб, заснований на згущенні комірки так званої «кускової» поверхні, основні теоретичні положення якої розроблені в докторській дисертації Найдіша В.М. [26].



Рівняння 4-кутної комірки поверхні, обмеженої кривими рівня  $\langle \mathbf{r}, y_j \rangle, \langle \mathbf{r}, y_{j+1} \rangle$  при  $y = y_j; y_{j+1}$  і  $\langle \mathbf{r}_i, y \rangle, \langle \mathbf{r}_{i+1}, y \rangle$  при  $x = x_i; x_{i+1}$ , має вигляд

$$\begin{vmatrix} z & (xy_j) & (x, y_{j+1}) \\ (x_i y) & (x_i, y_j) & (x_i, y_{j+1}) \\ (x_{i+1}, y) & (x_{i+1}, y_j) & (x_{i+1}, y_{j+1}) \end{vmatrix} = 0. \quad (5.88)$$

Тут елементи визначника являють собою аплікати точок, зазначених у дужках своїми координатами в плані.

Опускаючи позначення координат при параметричному представленні поверхні і розкриваючи визначник за 1-м елементом для точки згущення  $(i+0,5, j+0,5)$ , маємо

$$\langle +0,5, j+0,5 \rangle = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & \langle +0,5, j \rangle & \langle +0,5, j+1 \rangle \\ \langle \mathbf{r}, j+0,5 \rangle & \langle \mathbf{r}, j \rangle & \langle \mathbf{r}, j+1 \rangle \\ \langle +1, j+0,5 \rangle & \langle +1, j \rangle & \langle +1, j+1 \rangle \end{vmatrix}, \quad (5.89)$$

де  $\Delta$  – це обкреслений визначник, складений з аплікати вершин комірки.

Якщо  $\Delta = 0$ , то вершини комірки розташовані в одній площині. Тоді аплікати середин бічних ребер не незалежні, тому що з (5.89) маємо

$$\begin{aligned} & \langle +0,5, j \rangle \langle +1, j+0,5 \rangle \langle \mathbf{r}, j+1 \rangle - \langle \mathbf{r}, j+0,5 \rangle \langle +1, j+1 \rangle = \\ & = \langle +0,5, j+1 \rangle \langle +1, j+0,5 \rangle \langle \mathbf{r}, j \rangle - \langle \mathbf{r}, j+0,5 \rangle \langle +1, j \rangle \end{aligned} \quad (5.90)$$

Точку згущення в цьому випадку можна розрахувати за рівнянням (5.76)

Якщо задані тільки аплікати вузлових точок сітки, то попередньо треба згустити ребра комірки. У найпростішому випадку за умови запобігання осциляції ребер це можна зробити за способом  $\delta_{min}^1$ .

Тоді

$$\begin{aligned} \langle +0,5, j+1 \rangle &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{r}, j+1 \rangle + \langle +1, j+1 \rangle \delta_{j+1}^1; \\ \langle +0,5, j \rangle &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{r}, j \rangle + (i+1, j) - \delta_j^1; \\ \langle \mathbf{r}, j+0,5 \rangle &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{r}, j \rangle + \langle \mathbf{r}, j+1 \rangle \delta_i^1; \\ \langle +1, j+0,5 \rangle &= \frac{1}{2} \langle +1, j \rangle + \langle +1, j+1 \rangle \delta_{j+1}^1; \end{aligned} \quad (5.91)$$

де  $\delta_i^1, \delta_{i+1}^1$  – це  $\delta_{min}^1$  і при  $x = x_i, x = x_{i+1}$  відповідно,

$\delta_j^1, \delta_{j+1}^1$  – це  $\delta_{min\ j}^1$  при  $y = y_j, y = y_{j+1}$  відповідно.

Для точок згущення маємо

$$\llbracket +0,5, j+0,5 \rrbracket = \frac{-1}{4\Delta} \begin{vmatrix} \sum \delta - \sum(i, j) & \delta_j^1 & \delta_{j+1}^1 \\ \delta_i^1 & \llbracket j \rrbracket & \llbracket j+1 \rrbracket \\ \delta_{i+1}^1 & \llbracket +1, j \rrbracket & \llbracket +1, j+1 \rrbracket \end{vmatrix}. \quad (5.92)$$

Тут  $\sum \delta = \delta_i^1 + \delta_{i+1}^1 + \delta_j^1 + \delta_{j+1}^1$ ;

$$\sum(i, j) = \llbracket j \rrbracket + \llbracket +1, j \rrbracket + \llbracket j+1 \rrbracket + \llbracket +1, j+1 \rrbracket.$$

Після того, як розраховані точки згущення ребер згідно з (5.91) і точка згущення комірки згідно з (5.92), вихідна комірка розбивається на 4 більш дрібних і розрахунок згущення продовжується для кожної з них.

Подальші узагальнення засновані на застосуванні рівняння комірки, аналогічно (5.89) з урахуванням похідних першого, другого, ... порядків.

Переваги методу "кускових" поверхонь у порівнянні з методом Кунса полягають у спрощенні розрахунків та відсутності перехідних функцій, що є додатковим джерелом виникнення осциляції.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Запишіть рівняння комірки Кунса й охарактеризуйте його елементи.
2. Як підвищити гладкість базисної функції Кунса? Як формуються при цьому перехідні функції і частинні змішані поділені різниці?
3. Якими співвідношеннями яких частинних похідних визначається форма поверхні в околі заданої точки?
4. Яка точка називається еліптичною, параболічною, гіперболічною?
5. Чим відрізняється метод «кускових» поверхонь від методу Кунса?
6. Як впливає на формування точкового каркаса ДПП відсутність перехідних функцій у методі «кускових» поверхонь?

## ВИСНОВКИ

У посібнику дана вичерпна інформація, необхідна для того, щоб приступити до дискретного геометричного моделювання, основними напрямками якого є: інтерполяція (згущення), апроксимація, дискретне диференціювання, дискретне інтегрування. Усі ці напрямки характеризуються тим, що вихідною інформацією, як і результатом моделювання є дискретні геометричні образи. Крім того, результат моделювання не розраховується однозначно, а вибирається з області припустимих рішень, визначаючи в такий спосіб *варіативність* моделювання. Такий підхід забезпечує локальність розрахунків, можливість корекції розв'язання, відсутність осциляції, завдяки чому гарантується висока точність моделювання.

Інформаційною основою дискретного геометричного моделювання є викладені в посібнику положення, сукупність яких можна розглядати, як основи *прикладної дискретної геометрії*. Ці основи містять у собі дискретні представлення геометричних образів (ДПК і ДПП), їхні диференціальні властивості й аналітичні описи, формоутворення ДПК і ДПП за заданими позиційними, метричними і диференціально-геометричними умовами, початкові відомості про дискретну інтерполяцію (згущення), дискретне диференціювання, дискретне інтегрування.

У результаті багаторічних наукових досліджень колективу по розвитку сформованого нами напрямку *варіативного дискретного геометричного моделювання* визначилися наступні основні принципи і припущення:

1. Моделюваний геометричний образ володіє своєю внутрішньою геометрією, обумовленою сукупністю геометричних параметрів і властивостей, незалежних від системи координат. Ця сукупність визначає названу нами *апріорну інформацію* про геометричний об'єкт, що повинна зберегтися і розвинути в процесі його моделювання.
2. При моделюванні ДПП і просторових ДПК визначальним є *незалежність* координат і проекцій ліній, якщо їхня залежність заздалегідь не обумовлена.
3. При дискретному геометричному моделюванні головним є не єдиність розв'язання, а його *варіативність*, що дає можливість *вибору* оптимального результату.
4. Кінцевим результатом варіативного дискретного геометричного моделювання є *кусково-лінійна ДПК чи ДПП*, що наближає з заданою точністю за визначеним критерієм деякий неперервний геометричний образ і замінює його при подальших розрахунках в межах поставленої задачі.
5. Найважливішою і неодмінною умовою досягнення заданої точності є *відсутність осциляції* розв'язку, тому всі розрахункові алгоритми спрямовані на її запобігання.
6. Показником придатності розрахункових алгоритмів є їхня *працездатність в околі особливих точок* ДПК, при розрахунках прямолінійних відрізків ДПК, де методи неперервного геометричного моделювання неминує ведуть до осциляції.

На основі цих принципів і припущень викладені основні положення даного посібника. Їхній розвиток і конкретизація передбачається в підготовлюваному нами до видання посібнику, що включає в себе найважливіші наукові і прикладні результати, отримані вченими Мелітопольської школи по варіативному дискретному геометричному моделюванню при розв'язанні важливих прикладних задач.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Волков Е.А. Численные методы. - М.: Наука, 1987.- 248 с.
2. Математическая энциклопедия. Т2. - М.: Сов. энциклопедия, 1979. - 1104 с.
3. Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия. - М.- Л.: ГИТТЛ, 1949.- 512 с.
4. Математический энциклопедический словарь. /Гл. ред. К.В. Прохоров. - М.: Сов. энциклопедия, 1988. - 847 с.
5. Милинский В.И. Дифференциальная геометрия. - Л.: Кубуч, 1934. - 332 с.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987. - 598 с.
7. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа: Справочное руководство. - М.: Физматгиз, 1961.- 524 с.
8. Самарский А.А. Введение в численные методы. - М.: Наука, 1987. - 288 с.
9. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве: Пер. с англ. - М.: Мир, 1982.- 304с.
10. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров: Пер. с англ. - М.: Наука, 1972. - 400 с.
11. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. - М.: ГИТТЛ, 1954. - 328 с.
12. Гельфонд Л.О. Исчисление конечных разностей. - М.: ГИТТЛ, 1959. - 400 с.
13. Щиголев Б.М. Математическая обработка наблюдений. - М.: Физматгиз, 1962. - 344 с.
14. Верещага В.М. Дискретно-параметричний метод геометричного моделювання кривих ліній та поверхонь: Автореф. ...д-ра техн. наук. - К.: КДТУБА, 1996. - 32 с.
15. Найдыш А.В. Геометрическое моделирование кривых линий и поверхностей методом адаптивной полиномиальной интерполяции: Дис. ... канд. техн. наук. - Мелитополь, 1992.
16. Грибов С.М. Дискретна геометрія інтерактивного конструювання кінематичних поверхонь на основі кривих скінченних сум: Автореф. ... д-ра техн. наук. - К., КДТУБА, 1994. - 48 с.
17. Ковалев С.Н. Статико-геометрический способ формирования дискретных сетей //Прикл. геом. и инж. граф. - К.: 1989. - Вып.48. - с. 17 - 19.
18. Михайленко В.Е., Ковалев С.Н. Конструирование форм современных архитектурных сооружений. К.: Будівельник, 1978. - 112 с.
19. Найдиш В.М. Відновлення інформації на основі скінченних різниць //Праці/ Тавр. держ. агротехн. академія. - Мелітополь: ТДАТА, 2000, Вип. 4., т.11, с.3 - 9.

20. Пугачов Є.В. Дискретне геометричне моделювання скалярних і векторних полів стосовно будівельної світлотехніки. Дис. ... д-ра техн наук, Київ, 2001.
21. Найдыш В.М. Теоретические основы дискретного геометрического моделирования //Прикл. геом. и инж. графика. – К: 1995. – Вып. 58. – с.25-29.
22. Найдиш В.М. Найдиш А.В. Геометричні аспекти дискретної інтерполяції //Праці/ Тавр. держ. агротехн. академія . – Мелітополь: ТДАТА, 2004, Вип. 4., т.23, с.3-8.
23. Найдиш В.М. Найдиш А.В. Новый взгляд на проблемы дискретного геометрического моделирования //Прикл. геом. та інж. графіка. – К: 2004. – Вип. 74. – с.14-19.
24. Лебедев В.А. Дискретная интерполяция плоских дискретно представленных кривых линий на основе углов сгущения: Дис. ... канд. техн. наук. – Мелітополь, 2004.
25. Щербина В.М. Геометрическое моделирование спиралеобразных дискретно представленных кривых линий: Дис. ... канд. техн. наук. – Мелітополь, 2002. – 192 с.
26. Найдыш В.М. Методы и алгоритмы формирования поверхностей и обводоов по заданным дифференциально-геометрическим условиям: Дис. ... д-ра техн. наук. – Мелітополь, 1983.
27. Бубенников А.В. Начертательная геометрия. – М.: ВЗПИ. – 1968. – 424с.