УДК 514.18
DOI: 10.32347/0131-579x.2023.104.49-58
д. т. н., професор **Верещага В.М.,**
vervik1949@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0038-8300
к. п. н., доцент **Муртазієв Е.Г.,**
ernest_gaf@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2154-5523
Мелітопольський державний педагогічний університет
імені Богдана Хмельницького

УТВОРЕННЯ КОМПОЗИЦІЙНИХ ПОХІДНИХ ДЛЯ ТОЧКОВИХ ПОЛІНОМІВ

Мелітопольська школа прикладної геометрії імені Володимира Найдиша

Точкові поліноми є композиційними кривими, що неперервно, у параметричній формі, описують плоский або просторовий дискретно поданий точковий ряд довільної форми, у тому числі і з кратними точками, який складається із n *точок.*

Надається, у загальному вигляді, запис точкового поліному степеня $n-1$ *для супровідної ламаної лінії, яка утворюється* n *базисними точками. Показано у розгорнутому вигляді запис характеристичних функцій цього точкового поліному степеня* $n-1$. *Пояснюється яким чином здійснюється параметризація вихідної супровідної ламаної лінії для утворення точкового поліному. За використання метричного оператора довжини, надається обчислення довжин усіх ланок вихідної супровідної ламаної лінії. Наведено один із способів обчислення довжини одиниці відносного вимірювання, яка застосовується для знаходження значень параметрів в усіх базисних точках.*

Вказується, що характеристичні функції утворюються для кожної з базисних точок вихідної супровідної ламаної лінії, при цьому, усі разом характеристичні функції складають функціональний параметричний базис точкового поліному, що моделюється. На відміну від бернштейнівських функціональних базисів традиційних поліномів, який є однаковим для них усіх, параметричний базис точкового поліному утворюється індивідуально, враховуючи геометричні особливості вихідної супровідної ламаної лінії. Обґрунтовується застосування одного і того самого функціонального базису як для точкового поліному, так і для його композиційної похідної за умови, що композиційні похідні у базисних точках обчислювалися з використанням смуги диференціальних проєкцій (дифпроєкцій).

Ключові слова: точковий поліном; характеристичні функції; композиційні похідні; параметричний базис.

Постановка проблеми. Основою моделювання композиційних геометричних об'єктів є характеристичні функції, які утворюються індивідуально для кожної базисної точки цих геометричних об'єктів. При цьому, шляхом параметризації, враховуються геометричні особливості та взаємне розташування базисних точок супровідної ламаної лінії, для вершин якої створюються характеристичні функції. Усі разом характеристичні функції являють собою функціональний базис точкового поліному, який є композиційною моделлю геометричного об'єкту. Характеристичні функції точкового поліному, як його функціональний параметричний базис, забезпечують композиційну інтерполяцію усіх без виключення n базисних точок вихідного дискретно поданого геометричного об'єкту, не застосовуючи, при цьому, методів лінійної алгебри. Якщо бернштейнівські функціональні базиси традиційних поліномів існують самі по собі та застосовуються без змін до інтерполяції будь-якого точкового ряду, то функціональний параметричний базис точкових поліномів є настільки чутливим до геометричних особливостей супровідної ламаної лінії, що зміна положення хоча б однієї з її базисних точок, призводить до необхідності переобчислення усіх характеристичних функцій створюваного точкового поліному. Через це на традиційних поліномах високих степенів виникають неконтрольовані точки перегину, що викликає великі амплітуди відхилення інтерполяційної кривої від вихідних даних, а на точкових поліномах високих степенів неконтрольовані точки перегину можуть і не виникати. А у разі, якщо вони виникли, то відсутніми є великі амплітуди відхилення точкового поліному, які б спотворювали форму вихідної дискретно поданої кривої.

Оскільки характеристичні функції являють собою відношення, то вони є і числовим, і функціональним інваріантом паралельного проєктування, а це означає, що і у просторі, і на паралельних проєкціях їх значення і записи лишаються без змін. Це кардинально спрощує перетворення геометричних об'єктів, пов'язаних з паралельним проєктуванням. До речі, розв'язування усіх задач у композиційній геометрії здійснюється спочатку у просторі, а потім цей розв'язок проєктується на осі проєкцій, з яких через комбінування здобуваються проєкції на площинах, просторах, тощо. Через це композиційні моделі є безвідносними щодо виміру простору, тобто створена композиційна модель однаково може розглядатися у дво-, три- або n-просторі. При цьому, кількість осей може змінюватись або замінюватись у відповідності до вимірності простору. Це є важливим для проведення аналізу діяльності реального об'єкту на основі його композиційної геометричної моделі.

Складовими точкових поліномів є добутки кожної з базисних точок на її характеристичну функцію, яку створено саме для цієї базисної точки. При цьому, складові-добутки або елементи точкового поліному ніколи не поєднуються поміж собою під час виконання будь-яких операцій з цим точковим поліномом, а завжди лишаються його окремими елементами. Через це форму композиційних геометричних об'єктів (ліній, поверхонь, геометричних тіл) можна змінювати, рухаючи його базисні точки, не чіпаючи, при цьому, параметричний базис точкового поліному, за допомогою якого цей об'єкт описано.

Кількість базисних точок, які можуть бути композиційно інтерполювати, теоретично є необмеженою. Під час оцифровування креслеників методами композиційної геометрії виключається застосування методів аналітичної геометрії як таких, що є громіздкими у порівнянні з композиційними.

У більшості випадків, для аналізу результатів моделювання реальних об'єктів з використанням композиційних геометричних моделей, виникає необхідність диференціювання точкових поліномів. Як показали наші дослідження щодо диференціювання точкових поліномів традиційними методами, які застосовуються у математичному аналізі, точковий поліном як композиційна крива після диференціювання має похідну, що не є композиційною кривою. І у цьому випадку похідна точкового поліному позбавляється усіх переваг композиційних кривих. Отже, із усього сказаного, постає проблема необхідності розробки способу диференціювання такого, щоб похідна точкового поліному залишалась композиційною кривою як і сам точковий поліном.

Формулювання цілей статті. Обґрунтувати один із способів диференціювання точкових поліномів, за результатом застосування якого, його похідна лишалась би композиційною кривою як і сам точковим поліном.

Аналіз останніх досліджень. Починаючи з 2015 року у Мелітопольській школі прикладної геометрії імені Володимира Найдиша зародилася ідея і у подальшому отримала свій розвиток теорія композиційного геометричного моделювання [1, 3, 5, 6, 9, 15]. За результатами цих досліджень було захищено дві дисертації Є.О. Адоньєвим [1] та К.Ю. Лисенко [7].

Для подальшого викладення матеріалу цієї статті, знадобляться деякі відомості щодо метричного оператору трьох точок [7, 13, 14]. Метричний оператор трьох точок (МОТТ) у композиційній геометрії є аналогом скалярного добутку двох векторів у векторному численні. Різниця між ними полягає у тому, що скалярний добуток є віднесеним до системи координат, а МОТТ є безвідносним щодо неї.

Означення. Метричний оператор трьох точок – це число, здобуте як сума добутків різниць між координатами точок основи і вершиною, за усіма координатними напрямами.

Позначається МОТТ: $\sum_{BC}^{A}$ – читається: «сигма BC з вершиною A». Тут точки B і C являють основу у МОТТ, а точка A – його вершина. Формалізація МОТТ у точковій формі має вигляд: $\sum_{BC}^{A} = \sum(B-A)(C-A)$. Формалізація МОТТ у координатній формі –

$$\sum_{BC}^{A} = \sum_{i=x,y,z} (i_B - i_A)(i_C - i_A) = (x_B - x_A)(x_C - x_A) +$$
$$+ (y_B - y_A)(y_C - y_A) + (z_B - z_A)(z_C - z_A).$$

Наведений МОТТ є метричним оператором загального типу. Розглянемо окремий випадок, коли точки основи МОТТ збігаються, тобто $B \equiv C$. Тоді МОТТ матиме вигляд

$$\sum_{BB}^{A} = \sum_{CC}^{A} = \sum(B-A)(B-A) = \sum(B-A)^2 = (x_B - x_A)^2 +$$
$$+ (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2.$$ Тобто $\sum_{BB}^{A} = \sum_{CC}^{A} = (AB)^2$.

Звідкіля, $AB = \sqrt{\sum_{BB}^{A}}$. Отже, метричний оператор трьох точок має назву: «Метричний оператор довжини», коли у нього збігаються позначення двох точок основи і дорівнює квадрату довжини відрізку, що визначається літерами основи і вершини.

Ще інший термін, який знадобиться у подальших дослідженнях, це смуга диференціальних проєкцій (дифпроєкцій). Вперше це поняття було застосоване у роботі [4], (1979 рік), а потім розвинуто у роботах [2, 11, 12]. Наразі застосування смуги дифпроєкцій дістало поштовх до подальшого розвитку [8, 10] у зв’язку з необхідністю розробки нового методу композиційного диференціювання. Застосування смуги дифпроєкцій дозволяє у кожній базисній точці дискретно поданої кривої визначити не одну дотичну, а межі смуги, в середині якої можна обирати різні варіанти дотичних для ДПК, які б не викликали появу незапланованих точок перегину на точковому поліномів. Це надає значних переваг під час створення композиційних геометричних об’єктів.

Основна частина. Будь-який точковий поліном утворюється на ДПК – дискретно поданій кривій чи то плоскій, чи то просторовій. Її точки, що з’єднані поспіль, утворюють супровідну ламану лінію (СЛЛ).

Нехай задана просторова супровідна ламана лінія, що складається з *n* базисних точок (рис. 1).

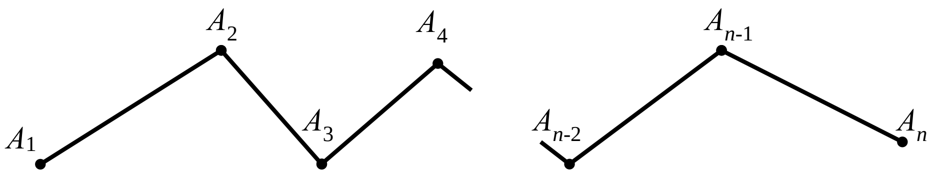

Рис. 1. Вихідна супровідна ламана лінія (СЛЛ)

У загальному вигляді точковий поліном, що неперервно описуватиме просторову криву лінію, яка інтерполюватиме усі вершини цієї СЛЛ, матиме такий запис:

$$M_{n-1}=\sum_{i=1}^{n} A_{(i)} \frac{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq(i)}}^{n}\left(t_i-t\right)}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq(i)}}^{n}\left(t_i-t_{(i)}\right)}=\sum_{i=1}^{n} A_{(i)}\cdot \underset{i\neq(i)}{p_i}(t),\ 0\le t\le t_n, \qquad (1)$$

де t, t_i, $t_{(i)}$ – параметри уздовж СЛЛ, відповідно, поточний і у базисних точках;

$i\neq(i)$ – запис означає, що із добутків різниць у чисельнику і знаменнику виключаються різниці, індекси зменшуваних у яких збігаються з індексом (i), що узятий у дужки, яким позначено базисну точку $A_{(i)}$.

Через те, що одну із різниць виключено з добутків у чисельнику, усі характеристичні функції мають однаковий степінь, який дорівнює $n-1$.

$$M_{n-1}=A_1p_1(t)+A_2p_2(t)+\ldots+A_{n-1}p_{n-1}(t)+A_np_n(t),\ 0\le t\le t_n, \qquad (2)$$

Розкриємо характеристичні функції $p_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, із (2).

$$\left.\begin{aligned}
p_1(t)&=\frac{(t_2-t)(t_3-t)\ldots(t_{n-2}-t)(t_{n-1}-t)(t_n-t)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)\ldots(t_{n-2}-t_1)(t_{n-1}-t_1)(t_n-t_1)},\\
p_2(t)&=\frac{(t_1-t)(t_3-t)\ldots(t_{n-2}-t)(t_{n-1}-t)(t_n-t)}{(t_1-t_2)(t_3-t_2)\ldots(t_{n-2}-t_2)(t_{n-1}-t_2)(t_n-t_2)},\\
p_3(t)&=\frac{(t_1-t)(t_2-t)\ldots(t_{n-2}-t)(t_{n-1}-t)(t_n-t)}{(t_1-t_3)(t_2-t_3)\ldots(t_{n-2}-t_3)(t_{n-1}-t_3)(t_n-t_3)},\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots,\\
p_{n-1}(t)&=\frac{(t_1-t)(t_2-t)\ldots(t_{n-2}-t)(t_n-t)}{(t_1-t_{n-1})(t_2-t_{n-1})\ldots(t_{n-2}-t_{n-1})(t_n-t_{n-1})},\\
p_n(t)&=\frac{(t_1-t)(t_2-t)\ldots(t_{n-2}-t)(t_{n-1}-t)}{(t_1-t_n)(t_2-t_n)\ldots(t_{n-2}-t_n)(t_{n-1}-t_n)}.
\end{aligned}\right]\quad 0\le t\le t_n. \qquad (3)$$

Розглянемо параметризацію супровідної ламаної лінії, яку будемо здійснювати уздовж довжини кожної із її ланок, з метою обчислення значень параметрів t_i, $i=\overline{1,n}$, для кожної базисної точки A_i, $i=\overline{1,n}$, цієї СЛЛ.

Для цього, за використання метричного оператора довжини $\sum_{i,i}^{i-1}$ визначаються довжини $l_{i,i-1}$; $i=\overline{2,n}$, кожної з ланок СЛЛ, де долішній індекс "i" збігається з долішніми індексами базисних точок A_i та A_{i-1}.

Метричний оператор довжини $\sum_{i,i}^{i-1}$ є у точковому БН-численні аналогом скалярного добутку двох векторів у векторному численні, та розкривається у точковій формі наступним чином:

$$\sum_{i,i}^{i-1}=\sum(A_i-A_{i-1})(A_i-A_{i-1})=\sum(A_i-A_{i-1})^2, \qquad (4)$$

або у координатній формі для трипростору:

$$\sum_{i,i}^{i-1}(A_i - A_{i-1})^2 = \left(x_{A_i} - x_{A_{i-1}}\right)^2 + \left(y_{A_i} - y_{A_{i-1}}\right)^2 + \left(z_{A_i} - z_{A_{i-1}}\right)^2. \qquad (5)$$

Звідкіля:

$$l_{i,i-1} = \sqrt{\sum_{i,i}^{i}}\,,\ i = \overline{2,n}. \qquad (6)$$

Після визначення довжин усіх $n-1$ ланок $l_{i,i-1}$ із (6) переходимо, безпосередньо, до параметризації вершин A_i, $i = \overline{2,n}$. Тут індекс "i" веде відлік з числа "2", тому що $t_1 = 0$ у прийнятому нами варіанті параметризації завжди дорівнює нулю.

Обираємо довжину одиниці відносного вимірювання L_e як суму якоїсь кількості довжин ланок СЛЛ:

$$L_e = \sum_{i=2}^{e} l_{i,i-1}, \qquad (7)$$

де e – антьє числа $[0.5\cdot(n+1)]$;

n – кількість базисних точок.

Тоді параметри для усіх базисних точок уздовж довжини ланок СЛЛ у загальному вигляді матиме наступний запис:

$$t_{(i)} = \frac{\sum\limits_{i=2}^{\tau} l_{i,i-1}}{L_e},\ i = \overline{2,n};\ \tau = \overline{2,(i)}. \qquad (8)$$

Тут у (8) індекс узято у дужки з метою обмеження індексу τ та вирізнення його серед інших значень індексів "i". Підставивши значення параметрів t_i із (8) у (3), дістанемо відповідні характеристичні функції $p_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, та точковий поліном M_{n-1} із (1).

Характеристичні функції $p_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ являють собою параметричний базис точкового поліному (1), який утворено, виходячи, безпосередньо, із геометричних особливостей вихідної дискретно поданої кривої, що задана базисними точками A_i, $i = \overline{1,n}$; на відміну від бернштейнівського базису традиційних поліномів.

Оскільки композиційне диференціювання базисних точок здійснюється з урахуванням геометричних особливостей тих самих базисних точок A_i, $i = \overline{1,n}$; за використання яких було утворено параметричний базис $p_i(t)$, $i = \overline{1,n}$; то цей параметричний базис можемо застосовувати як для утворення точкового поліному (1), так і для утворення його неперервної першої похідної:

$$M'_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} A'_i \cdot p_i(t), \qquad (9)$$

де A'_i – композиційні похідні у вихідних базисних точках A_i, $i = \overline{1,n}$.

Зауважимо, що композиційне диференціювання забезпечує знаходження композиційних похідних в усіх базисних точках в тому числі і крайніх A_1 та A_n .

Враховуючи усе сказане, надамо наступне означення.

Означення. Композиційне рівняння похідної точкового поліному утворюється шляхом заміни, у його рівнянні, записів базисних точок на відповідні записи композиційних похідних у цих точках лишаючи, при цьому, незмінним їх функціональний параметричний базис.

Отже, функціональний параметричний базис і у точкового поліному, і у його композиційної похідної є одним і тим самим. При цьому, значення композиційних похідних A_i' у базисних точках A_i мусять обчислюватись із застосуванням смуги диференціальних проєкцій.

Висновки. У статті вперше надається розроблений авторами метод композиційного диференціювання дискретно поданих кривих із застосуванням смуги дифпроєкцій. Показано, яким чином вихідну дискретно подану криву композиційно інтерполювати точковим поліномом з подальшим його диференціюванням. При цьому, наголошується, що традиційні методи диференціювання точкових поліномів, як композиційних кривих, позбавляють його похідну властивостей композиційної кривої, що є неприпустимим у композиційному геометричному моделюванні. Обґрунтовано, на основі параметричного зв’язку між точковим поліномом і його композиційною похідною, що для знаходження похідної необхідно у записі точкового поліному замість базисних точок підставити значення їхніх похідних. При цьому, функціональний параметричний базис і у точкового поліному, і у його композиційної похідної є одним і тим самим.

Література

1. *Адоньєв Є.О.* Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем: дис. ... д-ра техн. наук. К.: КНУБА, 2018. 512 с.
2. *Верещага В.М.* Дискретно-параметричний метод геометричного моделювання кривих ліній та поверхонь: дис. ... док-ра. техн. наук. КДТУБА. К, 1996. 320 с.
3. *Верещага В.М.* Композиційне геометричне моделювання: Моногафія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2017. 108с.
4. *Верещага В.М.* О поле дифпроекций эмпирической кривой. Начертательная геометрия и черчение» (межвузовский сборник). Алма-Ата, 1979. с. 63-66.
5. *Верещага В.М., Найдиш А.В., Адоньєв Є.О.* Метод композиційного геометричного моделювання. Монографія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. 310с.

6. *Верещага В.М., Найдиш А.В., Адоньєв Є.О., Лисенко К.Ю.* Основи композиційного геометричного моделювання: навчальний посібник. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. 255 с.
7. *Лисенко К.Ю.* Теоретичні основи методів утворення композиційних ліній і поверхонь: дис…к.т.н. Київ : КНУБА, 2022. 267с.
8. *Лисенко К.Ю., Верещага В.М.* Елементи композиційного диференціювання у точковій формі. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ, 2022. Вип. 103. С. 114-122.
9. *Лисенко К.Ю., Найдиш А.В., Балюба І.Г., Верещага В.М.* Особливості композиційного геометричного моделювання. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*: міжвід. наук.-техн. збірник. Київ : КНУБА, 2019. Вип. 95. С.131-136.
10. *Муртазієв Е.Г., Верещага В.М.* Узагальнений графічний аналіз кривих з використанням їхніх похідних. *Прикладна геометрія та інженерна графіка.* Київ : КНУБА, 2022. Вип. 103. С. 142-150.
11. *Найдиш В.М.* Дискретна інтерполяція. Мелітополь: ВДП «Люкс», 2007. 250 с.
12. *Найдиш В.М., Верещага В.М., Найдиш А.В., Малкіна В.М.* Основи прикладної дискретної геометрії. Мелітополь: ВДП «Люкс», 2007. 193 с.
13. *Павленко О.М.* Геометричне моделювання вертикального планування горизонтальної земельної ділянки засобами точкового БН-числення: автореф. дис…канд.. техн. наук, 05.01.01 Прикладна геометрія та інженерна графіка. Мелітополь, 2017. 23 с.
14. *Павленко О.М.* Геометричне представлення властивостей метричного оператора трьох точок прямої. Сучасні проблеми геометричного моделювання: збірник праць XVII Міжнародної науково-практичної конференції. Мелітополь : вид-во МДПУ ім. Б.Хмельницького, 2015. С.77-81.
15. Павленко О.М. Порівняльний аналіз композиційної інтерполяції з традиційними методами. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ : КНУБА. 2022. Вип. 103. С. 162-174.

PhD, professor **Viktor Vereshchaga,**
vervik1949@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0038-8300
PhD, assistant professor **Ernest Murtaziiev**,
ernest_gaf@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2154-5523
Bogdan Khmelnitsky Melitopol State Pedagogical University

FORMATION OF COMPOSITION DERIVATIVES FOR POINT POLYNOMIALS

Point polynomials are composite curves that continuously, in parametric form, describe a flat or spatial discrete point series of arbitrary shape, including multiple points, consisting of n points.

The notation of the point polynomial power for the accompanying broken line, which is formed by n basis points, is given, in general form. The record of the characteristic functions of this point polynomial power is shown in expanded form. It is explained how the initial accompanying broken line is parameterized to form a point polynomial. Using the metric length operator, the calculation of the lengths of all links of the original accompanying broken line is provided. One of the ways to calculate the length of the relative measurement unit, which is used to find parameter values at all base points, is given.

It is indicated that the characteristic functions are formed for each of the basic points of the original accompanying broken line, while all the characteristic functions together make up the functional parametric basis of the modeled point polynomial. Unlike the Bernstein functional basis of traditional polynomials, which is the same for all of them, the parametric basis of the point polynomial is formed individually, taking into account the geometric features of the original accompanying broken line. The use of the same functional basis for both the point polynomial and its composite derivative is substantiated, provided that the composite derivatives at the base points were calculated using a band of differential projections (difprojections).

Keywords: point polynomial; characteristic functions; composite derivatives; parametric basis.

References

1. *Adonyev E.O.* Composite method of geometric modeling of multifactorial systems: dissertation. ... Dr. Tech. of science Kyiv : KNUBA, 2018. 512 p.
2. *Vereshchaga V.M.* Discrete-parametric method of geometric modeling of curved lines and surfaces: dissertation. ... doc-ra. technical of science. Kyiv : KDTUBA, 1996. 320 p.
3. *Vereshchaga V.M.* Composite geometric modeling: Monograph. Melitopol: FOP Odnorog T.V., 2017. 108p.
4. *Vereshchaga V.M.* On the field of diffrictions of the empirical curve. Sketchy geometry and sketching" (interuniversity collection). Alma-Ata, 1979. p. 63-66.
5. *Vereshchaga V.M., Naidysh A.V., Adonyev E.O.* The method of composite geometric modeling. Monograph. Melitopol: FOP Odnorog T.V., 2019. 310p.
6. *Vereshchaga V.M., Naidysh A.V., Adonyev E.O., Lysenko K.Yu.* Fundamentals of composite geometric modeling: a tutorial. Melitopol: FOP Odnorog T.V., 2019. 255 p.
7. *Lysenko K.Yu.* Theoretical foundations of the methods of formation of compositional lines and surfaces: Dissertation... Ph.D. Kyiv :, 2022. 267p.
8. *Lysenko K.Yu., Vereshchaga V.M.* Elements of compositional differentiation in point form. Applied geometry and engineering graphics. Kyiv : KNUCA, 2022. Issue 103. P. 114-122.

9. *Lysenko K.Yu., Naidysh A.V., Balyuba I.G., Vereshchaga V.M.* Features of composite geometric modeling. Applied geometry and engineering graphics: interdisciplinary. science and technology collection. Kyiv : KNUCA, 2019. Issue 95. P.131-136.
10. *Murtaziev E.G., Vereshchaga V.M.* Generalized graphic analysis of curves using their derivatives. Applied geometry and engineering graphics. Kyiv : KNUCA, 2022. Issue 103. P. 142-150.
11. *Naidysh V.M.* Discrete interpolation. Melitopol: VDP "Lux", 2007. 250 p.
12. *Naidysh V.M., Vereshchaga V.M., Naidysh A.V., Malkina V.M.* Fundamentals of applied discrete geometry. Melitopol: VDP "Lux", 2007. 193 p.
13. *Pavlenko O.M.* Geometrical modeling of the vertical planning of a horizontal plot of land by means of point BN-calculation: autoref. dis... candidate.. tech. Sciences, 05.01.01 *Applied geometry and engineering graphics*. Melitopol, 2017. 23 p.
14. *Pavlenko O.M.* Geometric representation of the properties of the metric operator of three points on a straight line. Modern problems of geometric modeling: collection of works of the XVII International Scientific and Practical Conference. Melitopol: type of MDPU named after B. Khmelnytskyi, 2015, pp. 77-81.
15. *Pavlenko O.M.* Comparative analysis of composite interpolation with traditional methods. Applied geometry and engineering graphics. Kyiv, 2022. Issue 103. P. 162-174.