УДК 514.18

О.М. ПАВЛЕНКО, Е.Г. МУРТАЗІЄВ, В.М. ВЕРЕЩАГА
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького
Мелітопольська школа прикладної геометрії імені Володимира Найдиша

ТОЧКОВІ ПОЛІНОМИ ЯК КОМПОЗИЦІЙНІ ГЕОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ

Надано означення точкових поліномів, вказується, що їх рівняння є безвідносними щодо вихідної системи координат, а утворюються відносно базисних точок дискретної кривої на основі якої складається цей точковий поліном. У загальному вигляді записано рівняння однопараметричного точкового поліному. Надано означення однопараметричних характеристичних функцій і їх вирази у загальному вигляді, показано послідовність параметризації кривих ліній для визначення параметрів у базисних точках з метою їхнього застосування для обчислення характеристичних функцій. Надано послідовність перетворення характеристичних функцій у БН-координати однопараметричних точкових поліномів, яку названо гармонізацією характеристичних функцій. З використанням БН-координат, у загальному вигляді, надано рівняння гармонізованого точкового поліному. Вказується на переваги застосування гармонізованих точкових поліномів перед негармонізованими.

Надається, у загальному вигляді, рівняння двопараметричного точкового поліному та його характеристичних функцій для усіх базисних точок за обома параметричними напрямами U та V. Наголошується, що кожна базисна точка вихідної дискретно поданої поверхні обирається лише в місцях перетину каркасів ліній, утворених за двома параметричними напрямами. Через це кожна базисна точка має дві характеристичні функції, тобто визначається двома координатами у відповідності до кожного із параметричних напрямів. Розроблено, у загальному вигляді для двох параметричних напрямів, методику обчислення значень параметрів у всіх його базисних точках, які використовуються, у подальшому, для складання виразів характеристичних функцій. Наголошується, що реалізація операцій множення характеристичних функцій та БН-координат між собою і на базисні точки для складання точкових поліномів, найліпше здійснювати у компоматричній формі. Надаються, у загальному вигляді, приклади множення між собою компоматриць параметричних і множення компоматриці точкової на параметричну. При цьому, наголошується, що операції множення двох компоматриць здійснюються лише поміж їхніх елементів, які мають однаковими чи то одинарні, чи то подвійні індекси. Звертається увага на особливості гармонізації двопараметричних характеристичних функцій і точкових поліномів. Надається загальний вигляд гармонізованого двопараметричного точкового поліному.

Ключові слова: точкові поліноми, характеристичні функції, БН-координати, композиційна інтерполяція, гармонізовані точкові поліноми.

O.M. PAVLENKO, E.G. MURTAZIIEV, V.M. VERESHCHAHA
Bogdan Khmelnitsky Melitopol State Pedagogical University
Melitopol School of Applied Geometry named after Volodymyr Naidysh

POINT POLYNOMS AS COMPOSITE GEOMETRIC MODELS

The definition of point polynomials is given, it is indicated that their equations are irrelevant to the original coordinate system, but are formed relative to the base points of the discrete curve on the basis of which this point polynomial is formed. In its general form, the equation of a one-parameter point polynomial is written. The definition of one-parameter characteristic functions and their expressions in a general form is provided, the sequence of parametrization of curved lines for determining parameters at base points with the aim of their application for calculating characteristic functions is shown. The sequence of transformation of characteristic functions into BN-coordinates of one-parameter point polynomials is given, which is called harmonization of characteristic functions. With the use of BN-coordinates, in a general form, the equation of the harmonized point polynomial is given. The advantages of using harmonized point polynomials over non-harmonized ones are indicated.

The equation of a two-parameter point polynomial and its characteristic functions for all base points along both parametric directions U and V are provided, in general form. It is emphasized that each base point of the original discretely presented surface is chosen only at the intersections of the line frames formed along the two parametric directions. Because of this, each base point has two characteristic functions, that is, it is determined by two coordinates in accordance with each of the parametric directions. A method of calculating the values of parameters at all its base points, which are used, in the future, for compiling expressions of characteristic functions, has been developed, in a general form, for two parametric directions. It is emphasized that the implementation of the operations of multiplication of characteristic functions and BN-coordinates between themselves and on base points for the compilation of point polynomials is best carried out in compomatrix form. In a general form, examples of multiplication of parametric compomatrixes and multiplication of a point compomatrix by a parametric one are provided. At the same time, it is emphasized that the operations of

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-8

multiplication of two compomatrices are carried out only between their elements, which have the same either single or double indices. Attention is drawn to the peculiarities of the harmonization of two-parameter characteristic functions and point polynomials. A general view of the harmonized two-parameter point polynomial is provided.

Key words: point polynomials, characteristic functions, BN-coordinates, composite interpolation, harmonized point polynomials.

Постановка проблеми

Однією із проблем традиційних методів поліноміальної інтерполяції є виникнення неконтрольованої осциляції на інтерполянтах, яка спотворює форму кривої за великої кількості вузлів інтерполяції. Для уникнення цієї осциляції застосовується поділення вихідної дискретно поданої кривої на декілька сегментів, до яких застосовується сплайнінтерполяція, зокрема нерівномірні раціональні B-сплайни (NURBS). Наразі нічого ліпшого ніж NURBS-технології в автоматизованих системах проектування і виробництва не існує. Однак, для моделей з великими даними таке поділення призводить до збільшення ресурсоємності програмних продуктів. Крім того, B-сплайни утворюють задовільну форму кривої але вона не проходить через усі вихідні точки. Виходячи зі сказаного, виникає проблема в необхідності розробки нових методів інтерполяції, які б одним рівнянням, без сегментування описували б, проходячи через усі точки, геометричні об’єкти довільної форми за наперед визначеними умовами, мали велику кількість вузлів інтерполяції і, при цьому, високий степінь інтерполянта, навіть за наявних на ньому точок перегину, не викликав би великих амплітуд відхилення від початкового дискретно поданого геометричного об’єкту, які б створювали його в аналітичному поданні. В окремих випадках, для визначеної кількості базисних точок, цю задачу раніше було розв’язано у джерелах, на які вказуватиметься у аналізі останніх досліджень. Однак, у загальному вигляді, для n базисних точок, ця проблема у даній статті, викладається вперше.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Одним із основних призначень композиційного геометричного моделювання [1], [2], [3] є оцифровування графічних рішень шляхом утворення, замість них, обчислювальних алгоритмів з метою аналізу великих баз даних.

Підґрунтям для виникнення композиційного геометричного моделювання стало точкове числення Балюби-Найдиша (точкове БН-числення) [4], [5]. Із згаданих наукових напрямів, у цьому аналізі, коротко торкнемося аналізу лише того матеріалу, який у подальшому буде застосований в основному тексті статті.

Композиційні геометричні об’єкти не є функціями аргументів у системах координат. Їх рівняння утворюються відносно базисних точок, які початково дискретно визначають ці об’єкти. Базисними точками є мінімальна їх кількість, що належать об’єкту, яка здатна породити весь континуум його множини, за застосуванням певного алгоритму, що відтворює форму цього об’єкту.

Утворення однопараметричних та двопараметричних точкових поліномів здійснюється шляхом застосування композиційних матриць (компоматриць), які є результатом оцифровування (параметризації) дискретного каркасу базисних точок геометричного об’єкту і являють собою прямокутні таблиці. Тобто, компоматриці враховують геометричні особливості форми вихідного каркасу точок. У компоматрицях можна замінювати окремі елементи – точки, не чіпаючи решти елементів. Позначаються компоматриці подвійними квадратними дужками:

$\underset{l}{[[A]]} = \underset{i=\overline{1,l}}{[[A_i]]}$ – однорозмірні компоматриці точкові;

$\underset{l}{[[a(t)]]} = \underset{i=\overline{1,l}}{[[a_i(t)]]}$ – однорозмірні компоматриці параметричні;

$\underset{l\times m}{[[A]]} = \underset{i=\overline{1,l};\, j=\overline{1,m}}{[[A_{ij}]]}$ – дворозмірні компоматриці точкові;

$\underset{l\times m}{[[a(U,V)]]} = \underset{i=\overline{1,l};\, j=\overline{1,m}}{\{[a_{ij}(U,V)]]}$ – дворозмірні компоматриці параметричні.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-8

Наданий тут знак рівності вказує, що можна застосовувати обидва варіанти позначень як рівнозначні в залежності від тексту.

У дворозмірних компоматрицях точкових елементи – базисні точки обираються лише у місцях перетину ребер каркасу ліній поверхні. Індексація елементів компоматриць здійснюється у відповідності до номерів ребер каркасів ліній поверхні та може не збігатися з їхнім місцезнаходженням у самій компоматриці відносно її рядків і стовпців. Тобто, компоматриці упорядковуються у відповідності до каркасів ліній поверхонь за двома її параметричними напрямами. Виходячи з цього, операції над компоматрицями здійснюються через відповідні операції над їхніми елементами з однаковими індексами чи то одинарними, чи то подвійними.

Точкове БН-числення є аналогом векторного числення, у якому замість векторів оперують відношенням довжин відрізків. Метричний оператор трьох точок (МОТТ) у точковому БН-числення є аналогом скалярного добутку векторів векторного числення. За допомоги МОТТ будемо визначати довжини відрізків у координатному трипросторі. Однак, МОТТ використовується і у *n*-просторі. Позначається МОТТ: $\Sigma^{A_1}_{A_2A_3}$ – читається: «сигма A_2A_3 при вершині A_1». Якщо у долішньому індексі двічі записана одна і та сама літера $\Sigma^{A_1}_{A_2A_2}$, то такий МОТТ дорівнює квадрату довжини відрізку (A_1A_2), тобто $\Sigma^{A_1}_{A_2A_2} = \left(A_1A_2\right)^2$. Для спрощення записів, у цьому випадку позначень, застосовуються лише індекси, а літера: "A" не записується $\Sigma^{i-1}_{ii} = \left(A_{i-1}A_i\right)^2$, тобто $A_{i-1}A_i = \sqrt{\Sigma^{i-1}_{ii}}$. Розкривається МОТТ у точковій формі наступним чином:

$\Sigma^{i-1}_{ii} = \Sigma\left(A_{i-1}A_i\right)\left(A_{i-1}A_i\right) = \Sigma\left(A_{i-1}A_i\right)^2$. Звідкіля у координатній формі для *n*-простору можемо визначити довжину відрізку $\left(A_{i-1}A_i\right) = \sqrt{\left(1_{i-1}-1_i\right)^2 + \left(2_{i-1}-2_i\right)^2 + \left(3_{i-1}-3_i\right)^2 + \ldots + \left(n_{i-1}-n_i\right)^2}$, де натуральними числами позначено номер координат *n*-простору точок A_{i-1} та A_i. Довжина відрізку визначено через МОТТ у трипросторі матиме наступний запис:

$$\left(A_{i-1}A_i\right) = \sqrt{\left(x_{i-1}-x_i\right)^2 + \left(y_{i-1}-y_i\right)^2 + \left(z_{i-1}-z_i\right)^2}\,.$$

Мета дослідження

Із застосуванням композиційних матриць точкових і параметричних розробити і викласти, у загальному вигляді для *n* базисних точок, метод утворення однопараметричних та двопараметричних точкових поліномів.

Викладення основного матеріалу дослідження

Рівняння точкових поліномів утворюються у параметричній формі як сума добутків базисних точок геометричної фігури на характеристичні функції, що складаються окремо для кожної точки геометричної фігури за результатами її параметризації. В результаті чого рівняння точкових поліномів є безвідносними щодо вихідної системи координат, а утворюються відносно базисних точок. Координатами точкових поліномів є значення характеристичних функцій для параметрів поточної точки.

Рівняння однопараметричного точкового поліному має наступний вигляд:

$$L = \sum_{i=1}^{l} A_i \cdot p_i\left(t\right),\ 0 \le t \le 1, \tag{1}$$

де L – позначення поточної точки;
A_i – базисні точки вихідної дискретно поданої кривої;
$p_i\left(t\right)$ – характеристичні функції для кожної з базисних точок;
l – кількість складових (базисних точок) точкового поліному.

Характеристична функція утворюється у вигляді дробу, чисельник і знаменник якого являють собою добутки різниць параметрів, де зменшувані цих різниць є параметри усіх базисних точок кривої крім тієї, для якої утворюється ця характеристична функція, а від'ємниками є у чисельнику – поточний параметр, у знаменнику – параметр базисної точки, для якої утворюється ця характеристична функція.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-8

Параметри t_i, для $i=\overline{1,l}$ базисних точок кривої визначаються за результатами її параметризації.

Виходячи зі сказаного, вираз характеристичних функцій у загальному запису для базисних точок кривої лінії матиме наступний вигляд:

$$p_{(i)}(t)=\frac{\prod\limits_{\substack{i=1\\(i)\neq i}}^{l}(t_i-t)}{\prod\limits_{\substack{i=1\\(i)\neq i}}^{l}\left(t_i-t_{(i)}\right)},\ 0\le t\le 1, \tag{2}$$

де t – поточний параметр композиційної кривої;

t_i – значення параметрів у базисних точках дискретно поданої кривої;

$t_{(i)}$ – значення параметру у базисній точці, для якої утворюється характеристична функція;

$(i)\neq i$ – цей запис вказує, що використовуються усі значення параметрів, окрім того, індекс якого збігається з індексом базисної точки в дужках, для якої створюється характеристична функція.

Для знаходження значень параметрів t_i, для $i=\overline{1,l}$ у базисних точках дискретно поданої кривої A_i, $i=\overline{1,l}$, утворимо супровідну ламану лінію (СЛЛ), уздовж ланок якої будемо здійснювати параметризацію дискретно поданої кривої (ДПК). Позначимо довжину кожної із ланок СЛ через $\Delta_{i-1,i}$ для $i=\overline{2,l}$. Тоді, з використанням метричного оператора трьох точок (МОТТ), знайдемо модуль довжини кожної з ланок СЛЛ:

$$\Delta_{i-1,i}=\sqrt{\Sigma_{ii}^{i-1}},\ i=\overline{2,l}. \tag{3}$$

Тут у (3) нумерація індексів i починається із цифри “2” через те, що довжина першої ланки СЛЛ завжди дорівнює нулю, тобто $\Delta_{1,1}=0$.

Визначимо сумарну довжину – $L_{l,1}$ усіх ланок супровідної ламаної лінії:

$$L_{l,1}=\sum_{i=2}^{l}\sqrt{\Sigma_{ii}^{i-1}}=\sum_{i=2}^{l}\Delta_{i-1,i}. \tag{4}$$

Враховуючи (3), (4) визначимо сукупність параметрів t_i, $i=\overline{1,l}$, для кожної з базисних точок A_i, $i=\overline{1,l}$:

$$t_i=\frac{\sum\limits_{\tau=2}^{\psi=i}\Delta_{\tau,\tau-1}}{L_{l,1}},\ i=\overline{2,l};\ \tau=\overline{2,l}. \tag{5}$$

Підставляючи параметри (5) у (2), дістанемо вирази характеристичних функцій для кожної із базисних точок A_i, серед яких $t_1=0$; $t_l=1$, а всі решта значень t_i для $i=\overline{2,l-1}$ мають значення $0\le t_i\le 1$. При цьому, сума значень параметрів t_i в усіх базисних точках завжди дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{l}p_i(t_i)=1, \tag{6}$$

а поміж базисних точок – може відхилятися від одиниці, тобто:

$$\sum_{i=1}^{l}p_i(t)\neq 1. \tag{7}$$

Для того, щоби сума характеристичних функцій (7) дорівнювала одиниці і поміж базисних точок, необхідно їх гармонізувати, перетворивши кожну з них у Балюби-Найдиша координати (БН-координати), які позначимо $b_i(t)$, $i=\overline{1,l}$:

$$b_i(t)=\frac{p_i(t)}{\sum\limits_{i=1}^{l}p_i(t)},\ i=\overline{1,l},\ 0\le t\le 1. \tag{8}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-8

$$b_i(t) = \frac{p_i(t)}{\sum_{i=1}^{l} p_i(t)},\ i = \overline{1,l},\ 0 \le t \le 1. \tag{8}$$

Враховуючи (8), негармонізований точковий поліном (1) перетвориться у гармонізований шляхом заміни в записах:

$$L = \sum_{i=1}^{l} A_i \cdot b_i(t),\ 0 \le t \le 1. \tag{9}$$

При цьому, у гармонізованого точкового поліному (9) сума БН-координат дорівнює одиниці і в базисних точках A_i, і поміж ними $\sum_{i=1}^{l} b_i(t) = 1$, а це означає, що БН-координати точкового поліному відповідають вимогам щодо простого відношення трьох точок, тобто являють собою і функціональні, і числові інваріанти паралельного проєктування. Таким чином, БН-координати гармонізованого однопараметричного точкового поліному (9) і у просторі, і на його проєкціях мають однаковий і запис, і значення для параметру поточної точки, отже їх вирази не потребують жодних перетворень під час паралельного проєктування точкового поліному чи то на осі проєкцій, чи то на площини проєкцій. А це надає значних переваг у проведенні аналізу композиційних кривих ліній, поданих у вигляді однопараметричних гармонізованих точкових поліномів.

Рівняння двопараметричного точкового поліному має наступний вигляд:

$$L_{lm} = \sum_{i:j=1}^{l,m} A_{(ij)} \cdot \underset{ij \ne (ij)}{p_{ij}(U) \cdot q_{ij}(V)},\ 0 \le U : V \le 1, \tag{10}$$

де L_{lm} – позначення поточної точки на поверхні;
A_{ij} – базисні точки вихідної дискретно поданої поверхні;
$p_{ij}(U)$, $q_{ij}(V)$ – характеристичні функції для кожної з базисних точок за двома параметричними напрямами U та V;
l, m – кількість базисних точок кожного з ребер каркасів ліній за параметричними напрямами U та V;
$i : j$ – цей запис означає, що обидва індекси розпочинають свій відлік з одиниці;
$U : V$ – означає, що обидва поточні параметри знаходяться у визначених межах;
$ij \ne (ij)$ – цей запис означає, що утворювані обидві характеристичні функції використовують усі значення параметрів базисних точок окрім того, подвійний індекс якого збігається з подвійним індексом базисної точки, для якої ці характеристичні функції створюються.

Утворення характеристичних функцій $p_{ij}(U)$ та $q_{ij}(V)$ є аналогічним до утворення $p_i(t)$ із (1) та (2).

Параметри U_{ij} та V_{ij}, для $i = \overline{1,l}$; $j = \overline{1,m}$, у базисних точках A_{ij}, визначаються за результатами параметризації ребер каркасів ліній, відповідно, за параметричними напрямами U та V.

Виходячи із сказаного, вираз характеристичних функцій в узагальненому записі для усіх базисних точок каркасу ребер, за параметричним напрямом U, матиме наступний вигляд:

$$p_{(ij)}(U) = \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ (ij)\ne ij}}^{l} \left(U_{ij} - U\right)}{\prod_{\substack{i=1 \\ (ij)\ne ij}}^{l} \left(U_{ij} - U_{(ij)}\right)},\ j = \overline{1,m},\ 0 \le U \le 1, \text{ де} \tag{11}$$

U – поточний параметр за напрямом;
U_{ij} – значення параметрів в усіх, крім однієї, базисних точках;
$U_{(ij)}$ – значення параметру у базисній точці, для якої утворюється характеристична функція;
$ij \ne (ij)$ – цей запис вказує, що використовуються усі значення параметрів, крім того, подвійний індекс якого збігається з подвійним індексом базисної точки, в дужках, для якої створюється ця характеристична функція.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-8

Аналогічно за параметричним напрямом V матимемо:

$$q_{(ij)}(V) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ (ij)\neq ij}}^{m} \left(V_{ij} - V\right)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ (ij)\neq ij}}^{m} \left(V_{ij} - V_{(ij)}\right)}, \; i = \overline{1,l}, \; 0 \le V \le 1. \tag{12}$$

У (12) позначення є аналогічними як і (11) тільки для напряму V.

Аналогічно (3), (4), (5), за параметричним напрямом U, для кожного j-того ребра обчислимо значення параметрів в усіх його базисних точка – U_{ij}. Для кожного j-того ребра позначимо довжину кожної із ланок його СЛЛ через $\Delta^{j}_{i,i-1}$.

Модулі довжин:

$$\Delta^{j}_{i,i-1} = \sqrt{\Sigma^{i-1}_{ii}}, \; i = \overline{2,l}, \; j = \overline{1,m}.$$

Сумарна довжина:

$$L^{j}_{l,1} = \sum_{i=2}^{l} \Delta^{j}_{i,i-1}, \; j = \overline{1,m}. \tag{13}$$

Для кожної з базисних точок A_{ij} j-того ребра обчислимо значення параметрів за напрямом U:

$$U_{ij} = \frac{\sum\limits_{\tau=2}^{\psi=i} \Delta^{j}_{\tau,\tau-1}}{L^{j}_{l,1}}, \; i = \overline{2,l}; \; \tau = \overline{2,l}. \tag{14}$$

Аналогічно (13), (14) за параметричним напрямом V, для кожного і-того ребра обчислимо значення параметрів V_{ij} у всіх його базисних точках A_{ij}. Для цього, для кожного і-того ребра позначимо довжину кожного із ланок його СЛЛ через $\Delta^{i}_{j,j-1}$.

Модулі довжин:

$$\Delta^{i}_{j,j-1} = \sqrt{\Sigma^{j-1}_{jj}}, \; j = \overline{2,m}, \; i = \overline{1,l}.$$

Сумарна довжина:

$$M^{i}_{m,1} = \sum_{j=2}^{m} \Delta^{i}_{j,j-1}, \; i = \overline{1,l}. \tag{15}$$

Спираючись на (15), для кожної базисної точки A_{ij} і-того ребра, обчислюємо значення параметрів за параметричним напрямом V.

$$V_{ij} = \frac{\sum\limits_{\tau=2}^{\psi=j} \Delta^{i}_{\tau,\tau-1}}{M^{i}_{m,1}}, \; j = \overline{2,m}, \; i = \overline{1,l}. \tag{16}$$

Підставляючи значення (14) в (11) і (16) у (12), а потім разом (11) і (12) в (10), дістанемо шуканий двопараметричний точковий поліном, який одним рівнянням композиційно інтерполює, за наперед визначеними точками, сегмент поверхні довільної форми.

Як бачимо, точковий поліном (10) містить доданки, які є добутками. Реалізацію операції множення характеристичних функцій між собою і двопараметричних характеристичних функцій на базисні точки найкраще здійснювати у компоматричній формі (композиційно-матричній формі):

$$\Big[\big[p_{ij}(U)\big]\Big]_{i=\overline{1,l};\,j=\overline{1,m}} \cdot \Big[\big[q_{ij}(V)\big]\Big]_{i=\overline{1,l};\,j=\overline{1,m}} = \Big[\big[p_{ij}(U) \cdot q_{ij}(V)\big]\Big]_{i=\overline{1,l};\,j=\overline{1,m}} = \Big[\big[a_{ij}(U,V)\big]\Big]_{i=\overline{1,l};\,j=\overline{1,m}}. \tag{17}$$

При цьому, у (17) елементи, що є добутками характеристичних функцій фізично перемножувати не потрібно. Застосоване позначення $a_{ij}(U,V)$ цього добутку необхідно сприймати як скорочення запису. Крім того, здійснюється множення елементів лише з однаковими подвійними індексами.

Усі елементи-добутки двопараметричної компоматриці (17) являють собою параметричний функціональний базис двопараметричного точкового поліному (10). Результатом

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-8

множення компоматриці точкової $\left[\left[A_{ij}\right]\right]$ на компоматрицю параметричну (10) є компоматриця геометричної фігури $\left[\left[L_{\Phi}\right]\right]$:

$$\left[\left[L_{\Phi}\right]\right]_{l\times m} = \left[\left[A_{ij}\right]\right]_{i=\overline{1,l};\,j=\overline{1,m}} \cdot \left[\left[a_{ij}\left(U,V\right)\right]\right]_{i=\overline{1,l};\,j=\overline{1,m}} = \left[\left[A_{ij}\cdot a_{ij}\left(U,V\right)\right]\right]_{i=\overline{1,l};\,j=\overline{1,m}},\ 0\le U:V\le 1. \quad (18)$$

У компоматриці поверхні (18) множення елементів A_{ij} та $a_{ij}\left(U,V\right)$ здійснюється лише між тими, у яких збігається подвійні індекси "ij".

Гармонізація двопараметричного точкового поліному (10) здійснюється через гармонізацію ребер каркасів ліній поверхні окремо за кожним із параметричних напрямів аналогічно (8):

$$b_{ij}\left(U\right) = \frac{p_{ij}\left(U\right)}{\sum_{i=1}^{l} p_{ij}\left(U\right)},\ j=\overline{1,m},\ 0\le U\le 1. \quad (19)$$

$$b_{ij}\left(V\right) = \frac{p_{ij}\left(V\right)}{\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\left(V\right)},\ i=\overline{1,l},\ 0\le V\le 1. \quad (20)$$

$$\left[\left[b_{ij}\left(U\right)\right]\right]_{i=\overline{1,l};\,j=\overline{1,m}} \cdot \left[\left[q_{ij}\left(V\right)\right]\right]_{i=\overline{1,l};\,j=\overline{1,m}} = \left[\left[b_{ij}\left(U,V\right)\right]\right]_{i=\overline{1,l};\,j=\overline{1,m}}. \quad (21)$$

Підставляючи в (10) елементи компоматриці (21), що є БН-координатами, дістанемо гармонізований двопараметричний точковий поліном:

$$L_{lm} = \sum_{i:j=1}^{l,m} A_{ij}\cdot b_{ij}\left(U,V\right),\ 0\le U:V\le 1. \quad (22)$$

Зауважимо, що гармонізація двопараметричного точкового поліному за параметричними напрямами уздовж каркасів ліній (19), (20), (21) містить деяку похибку у порівнянні з суцільною його гармонізацією, однак є менш ресурсовитратною під час програмної реалізації.

Висновки

У цьому дослідженні запропоновано метод композиційної інтерполяції шляхом утворення характеристичних функцій, що являють собою функціональний базис однопараметричних та двопараметричних точкових поліномів. Точкові поліноми здатні одним рівнянням, без поділення вихідної геометричної фігури на сегменти, описувати дискретно подані геометричні об’єкти довільної форми, за наперед визначеними геометричними умовами, для будь-якої фінітної множини базисних точок. При цьому, навіть за наявних неконтрольованих точок перегину на графіку цього точкового поліному є відсутніми великі амплітуди коливань, які б спотворювали перебіг процесу, що описується цим точковим поліномом. На нашу думку, таке відбувається через те, що функціональний базис точкових поліномів, який складається із усіх його характеристичних функцій, утворюється виходячи із геометричних особливостей вихідного дискретно поданого геометричного об’єкту, враховуючи їх у повній мірі. Тобто, особливості геометричного об’єкту і функціональний базис точкового поліному, що аналітично описує цей об’єкт, знаходяться у повній злагоді. Тому, за наявних неконтрольованих точок перегину, на точковому поліномі не виникають коливань його форми з великими амплітудами, які б спотворювали форму вихідного геометричного об’єкту. І навпаки, у більшості традиційних методів поліноміальної інтерполяції функціональні базиси є бернштейнівськими, які існують самі по собі як окремі математичні об’єкти і ніяким чином не враховують геометричні особливості вихідного дискретного об’єкту, до інтерполяції якого їх застосовують. Через це виникають на інтерполянтах, побудованих традиційними методами поліноміальної інтерполяції, осциляція з великими амплітудами. Отже, розробка теорії точкових поліномів розв’язує багато проблем зв’язаних з обробкою і аналізом процесів з великими базами даних.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-8

Список використаної літератури

1. Верещага В.М. Композиційне геометричне моделювання: Монографія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2017, 108 с.
2. Адоньєв Є.О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем: дис. ... д-ра техн. наук. К.: КНУБА, 2018, 512 с.
3. Верещага В.М. Лисенко К.Ю., Найдиш А.В., Адоньєв Є.О. Основи композиційного геометричного моделювання: навчальний посібник. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019, 255 с.
4. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: дис. … доктора тех. наук. Макеевка: МИСИ, 1995. 227 с.
5. Балюба И.Г., Найдыш В.М. Точечное исчисление [учебное пособие]; под ред. Верещаги В.М. Мелитополь: Изд-во МГПУ им. Б.Хмельницкого, 2015, 234 с.

References

1. Vereshchaha, V.M. (2017). Composite geometric modeling: Monograph. Melitopol: FOP Odnorog T.V.
2. Adonyev, E.O. (2018). Composite method of geometric modeling of multifactorial systems: dissertation. ... Dr. Tech. of science K.: KNUBA.
3. Vereshchaha, V.M., Lysenko, K.Yu., Naidysh, A.V., & Adonyev, E.O. (2019). Fundamentals of composite geometric modeling: a tutorial. Melitopol: FOP Odnorog T.V.
4. Baliuba, I.G. (1995). Constructive geometry of manifolds in point calculus: Cand. … Dr. tech. Sciences. Makeevka: MISI.
5. Baliuba, I.G., & Naidysh, V.M. (2015). Point calculus [tutorial]; ed. Vereshchagi V.M. Melitopol: Publishing house of MGPU im. B. Khmelnitsky.

Павленко Олександр Михайлович – к.т.н., доцент кафедри управління та адміністрування Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. E-mail: alexander8944@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8646-2622.

Муртазієв Ернест Гафарович – к.пед.н., доцент кафедри математики і фізики Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. E-mail: ernest_gaf@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2154-5523.

Верещага Віктор Михайлович – д.т.н., професор кафедри математики і фізики Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. E-mail: vervik1949@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0038-8300.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-8