УДК 514.18
DOI: 10.32347/0131-579x.2022.103.144-122

Викладач **Лисенко К.Ю.,**
lyksyushka24@gmail.com
д. т. н., професор **Верещага В.М.,**
vervik1949@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0038-8300
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького

ЕЛЕМЕНТИ КОМПОЗИЦІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ У ТОЧКОВІЙ ФОРМІ

Мелітопольська школа прикладної геометрії імені Володимира Найдиша

It is emphasized that composite geometry is one of the applied areas of development of point-based BN calculus. Having analyzed the existing methods of differential analysis, we came to the conclusion that it is necessary to develop a method of compositional differentiation. Traditional functional analysis is designed to differentiate and integrate functions. Since the point polynomial is not a function, but is a composition of fractions of all points, the set of which makes up the original geometric object, the development of a new method of compositional differentiation is relevant for the analysis of its differential characteristics.

The question of the formation of point forms and their corresponding computational expressions, which relate to the issue investigated in this article, is considered.

The differences between graphic and compositional differentiation are indicated. It is emphasized that the composite curve and its composite derivative are not related to each other in the form of analytical transformations.

On the example of an elementary accompanying broken line, which consists of two links, an algorithm for the formation of differential projections, on the basis of which compositional differentiation is formed, is provided.

Ключові слова: похідна кривої; композиційна крива; графічне диференціювання; композиційне диференціювання; диференціальні проекції.

Постановка проблеми. У диференціальному та інтегральному численні розроблено теорію утворення похідних для функцій, рівняння яких утворюються в координатній формі відносно заданої системи координат. Композиційні криві є безвідносними щодо вихідної системи координат, їх точкові рівняння утворюються відносно усіх точок, множина яких складає вихідну дискретно подану криву. Крім того, композиційні криві не є функціями у традиційному розумінні, вони є композицією часток усіх точок вихідної кривої. Отже, традиційні методи аналітичного диференціювання щодо композиційних кривих є достатньо ускладненими і це є певною проблемою. Існують графічні методи утворення похідних для графіків кривих ліній. Однак, графічні алгоритми диференціювання достатньо складно програмно реалізувати методами аналітичної геометрії, що є теж певною проблемою.

Основним призначенням точкового БН-числення є оцифровування кресленників, а композиційна геометрія має це БН-числення своїм підґрунтям, тобто теж призначена для оцифровування геометричної інформації *своїми* композиційними методами. В результаті усього цього, з’явилася ідея щодо оцифровування графічних методів диференціювання. Цей процес названо нами композиційним диференціюванням або скорочено – комподиференціюванням. Однак, комподиференціювання не є повторенням графічних методів диференціювання у повному обсязі. В ньому застосовуються лише ідея побудови напрямків ланок супровідних ламаних ліній, а решта – побудова дифпроекцій та композиційної похідної для графічної дискретно поданої кривої є надбанням композиційного диференціювання.

Виходячи із усього сказаного, створення комподиференціювання наразі є актуальним питанням, розробка і впровадження якого надасть ефективності у розв’язуванні сучасних проблем щодо аналізу композиційних геометричних моделей процесів з великими базами даних.

Формулювання цілей статті. Розробити обчислювальний алгоритм знаходження дифпроекцій, призначених для утворення композиційних похідних у процесі композиційного диференціювання дискретно поданих кривих, які зображені графічно у вигляді своїх супровідних ламаних ліній.

Аналіз останніх досліджень. Точкове числення Балюби-Найдиша (точкове БН-числення) [1], [2] являє собою метод аналітичного опису геометричного об’єкту через встановлення відношень частин його елементів до цілого елементу цього об’єкту. при цьому, відношення утворюються на засадах простого відношення трьох точок.

Композиційна геометрія [3] є одним із прикладних напрямів розвитку точкового БН-числення.

Основним формоутворюючим об’єктом у точковому БН-числення є точка, а усі геометричні об’єкти являють собою певним чином організовані, множини точок. Для розв’язування будь-якої задачі у точковому БН-численні складається відповідна послідовність точкових форм у вигляді виразів, рівнянь та тотожностей, які є схемами (алгоритмами) здійснення операцій над усіма відповідними координатами точок, що входять до складу цих точкових форм.

Однією із особливостей усіх точкових форм є те, що вони утворюються не відносно вихідної системи координат, а відносно усіх точок, що складають геометричну композицію вихідного геометричного об’єкту.

Точкова форма прямої має вигляд:

$$\frac{M-A}{B-A}=t \Leftrightarrow M=(B-A)t+A \Leftrightarrow M=A(1-t)+Bt=A\bar{t}+Bt \qquad (1)$$

,

де *A*, *B* – точки початку і кінця відрізку, тобто геометричний визначник прямої;

M – поточна точка відрізку;

$t, \bar{t}$ – параметр поточної точки *M* відносно кінців *A* і *B*, сума яких дорівнює одиниці $t+\bar{t}=1$.

Реалізуються точкові форми через відповідні координатні рівняння. Так для *n*-простору координатних рівнянь прямої лінії (1) буде *n*:

$$K_{iM}=K_{iA}\cdot\bar{t}+K_{iB}\cdot t,\ \text{для}\ i=\overline{1,n};\ -\infty\le t\le+\infty;\ t+\bar{t}=1, \qquad (2)$$

де K_{iM}, K_{iA}, K_{iB} – *i*-ти координати, відповідно, точок *M*, *A*, *B*.

Коли $t=\frac{1}{2}$, тоді $2M=A+B$ – умова колініарності трьох точок.

Для проведення паралельних прямих використовуються властивості паралелограма, які покажемо у наступному алгоритмі.

Нехай у паралелограмі (рис. 1) задано три його вершини A_1, A_2, A_3 тоді четверта вершина A відшукується наступним чином:

1. Середина діагоналі (A_1A_3) точка *M* знаходиться із (2): $M=\frac{A_1+A_3}{2}$.

2. Ця ж точка *M* є серединою другої діагоналі (A_2A), $M=\frac{A_2+A}{2}$, звідкіля:

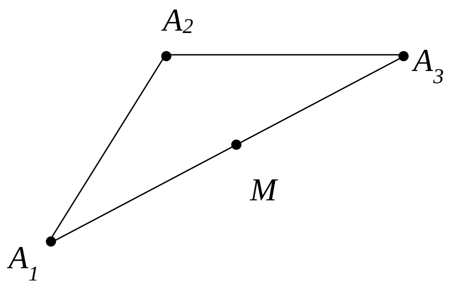

Рис. 1. Щодо проведення паралельних прямих.

$$\frac{A_1+A_3}{2}=\frac{A_2+A}{2} \Leftrightarrow A=A_1+A_3-A_2. \qquad (3)$$

Для трипростору рівняння (3) у координатній формі записуватимуться наступним чином:

$$x_A=x_{A_1}+x_{A_3}-x_{A_2};\ y_A=y_{A_1}+y_{A_3}-y_{A_2};\ z_A=z_{A_1}+z_{A_3}-z_{A_2}. \qquad (4)$$

Координати із (4) визначають положення шуканої точки *A* у трипросторі, яка буде четвертою вершиною паралелограма $A_1A_2A_3A_4$.

У точковому БН-численні рівняння прямої на площині, що визначена симплексом *ABC* з вершиною у точці *C*, визначається таким рівнянням для поточної точки *M*:

$$M=Ap+Bq+Cr,\ \text{де}\ p+q+r=1, \qquad (5)$$

де p, q, r – поточні параметри для відповідальних точок A, B, C , при цьому, два з них обираються довільно, а третій визначається із виразу: $r = 1 - p - q$ або $p = 1 - q - r$, або $q = 1 - p - r$.

Враховуючи (5), нехай будь-яка i-та поточна точка M_i на цій прямій визначатиметься із виразу:

$$M_i = Ap_i + Bq_i + Cr_i,\ p_i + q_i + r_i = 1, \tag{6}$$

де p_i, q_i, r_i – значення параметрів у симплексі ABC для i-тої точки.

Отже, точкове БН-числення призначене для аналітичного опису графічних методів, яке виникло із потреб розв’язування інженерних задач. Через це його математичний апарат направлений, в першу чергу, для створення геометричних моделей в точковій формі, які достатньо легко реалізуються комп’ютерно. Виникає слушне питання, а чому не аналітична геометрія? Тому, що в аналітичній геометрії всі геометричні об’єкти віднесені до системи координат і параметри положення геометричного об’єкту відносно неї входять до рівнянь, що значно ускладнює ці рівняння. Точкові форми БН-числення є безвідносними щодо вихідної системи координат, що значно їх спрощує.

В аналітичній геометрії для кожної із координат розв’язки є окремими. У точкових формах розв’язки здійснюються одночасно для усіх координат. Через це для точкових форм не є важливою розмірність простору в якому знаходиться геометричний об’єкт.

В аналітичній геометрії завжди існує необхідність розв’язування систем алгебраїчних рівнянь. Точкові форми позбавлені цього взагалі. І таке інше.

Виходячи із сказаного, нами запропоноване композиційне диференціювання, яке є аналогом графічного диференціювання [4], пропонується до розв’язання в аналітичному вигляді у точкових формах методами точкового БН-числення. Відмінністю композиційного диференціювання від графічного є те, що у графічному диференціюванні функції визначаються відносно глобальних систем координат як в аналітичній геометрії, а у композиційному – відносно локальних симплексів. Графічно побудовані похідна і функція, у традиційних методах, зрештою пов’язані між собою, хай не встановленими, аналітичними перетвореннями. Композиційна крива і її композиційна похідна не мають між собою зв’язку у вигляді аналітичних перетворень. Хоча, у сенсі фізики та геометрії композиційна похідна є, відповідно, кривою зміни швидкості та кута нахилу дотичної для вихідної композиційної кривої. Тобто композиційну похідну можна використовувати для аналізу компокривих. Отже, дослідження і розробка методу композиційного диференціювання є актуальною проблемою. Тому, що методи традиційного аналізу стосуються кривих віднесених до певної системи координат, а композиційні криві є безвідносними щодо системи координат. Більше того, композиційні криві не є функціями у традиційному визначенні, вони є композицією часток усіх базисних точок, які складають вихідний дискретний геометричний об'єкт у вигляді каркасу точок.

У даній статті буде розглянуто елементи композиційного диференціювання методами точкового БН-числення.

Основна частина. Без втрати загальності, розглянемо симплекс CAB, який є прямокутним з вершиною у точці C, яка збігається з початком координат. Нехай у цьому знаходиться супровідна ламана лінія (СЛЛ) сегменту якоїсь кривої (рис. 1), яка визначена вершинами $A_1(p_1, q_1, r_1)$, $A_2(p_2, q_2, r_2)$, $A_3(p_3, q_3, r_3)$. Тут p_i, q_i, r_i для $i = \overline{1,3}$ є параметрами кожної з точок A_i, за допомоги яких кожна з цих точок СЛЛ визначається відносно симплексу CAB:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = Ap_1 + Bq_1 + Cr_1 \\ A_2 = Ap_2 + Bq_2 + Cr_2 \\ A_3 = Ap_3 + Bq_3 + Cr_3 \end{array}\right] \quad (7)$$

У кожної із рівностей (7) – права частина являє собою суму часток базисних точок A, B, C, при цьому,розміри часток визначаються значеннями параметрів p_i, q_i, r_i, ($i = \overline{1,3}$).

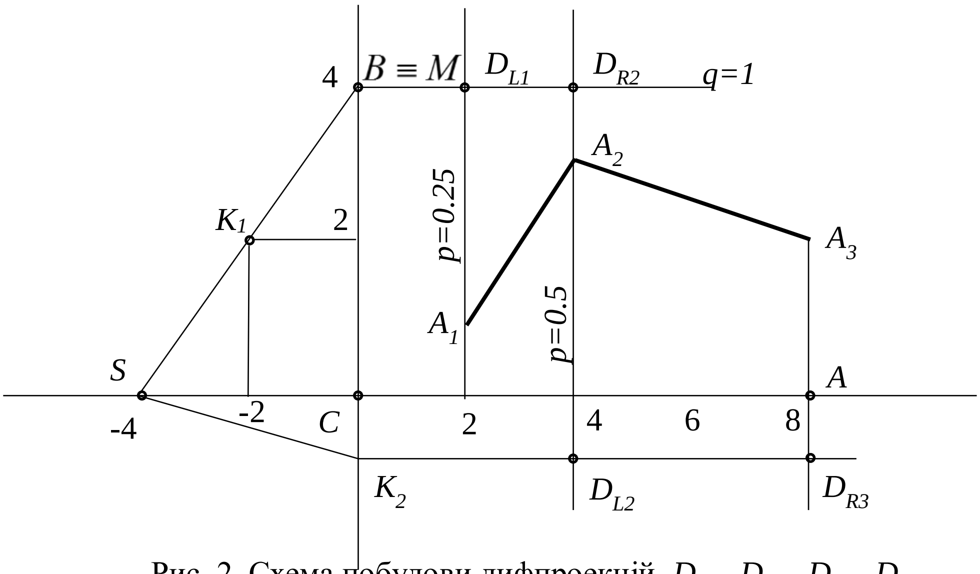

Рис. 2. Схема побудови дифпроекцій D_{L1}, D_{R2}, D_{L2}, D_{R3}.

У відповідності до схеми (рис. 2), відносно симплексу CAB, визначимо параметри точок супровідної ламаної лінії:

$$A_1: p_1 = \frac{2}{8} = 0.25;\ q_1 = \frac{1}{4} = 0.25;\ r_1 = 1 - 0.25 - 0.25 = 0.5 \Rightarrow A_1(0.25, 0.25, 0.5);$$

$$A_2:\ p_2 = 0.5;\ q_2 = \frac{3}{4} = 0.75;\ r_1 = 1 - 0.5 - 0.75 = -0.25 \Rightarrow A_2(0.5, 0.75, -0.25);$$

$$A_3:\ p_3=\frac{8}{8}=1;\ q_3=\frac{2}{4}=0.5;\ r_1=1-1-0.5=-0.5\Rightarrow A_3(1{,}0.5{,}-0.5).$$

Якщо ці значення параметрів підставимо у (7) дістанемо точки A_1, A_2, A_3. Крім цього, для композиційного диференціювання (комподиференціювання) необхідно довільним чином обрати полюс, наприклад $S(-4{,}0)$ на CA. З полюсу S проводимо пряму паралельну A_1A_2. Для цього скористаємося (3) і (4) та знайдемо точку K_1 як: $K_1=A_2+S-A_1$ $\Rightarrow x_{K_1}=x_{A_2}+x_S-x_{A_1}=4-4-2=-2;\ y_{K_1}=y_{A_2}+y_S-y_{A_1}=3+0-1=2$. Отже, здобута пряма $SK_1\|A_1A_2$.

Далі, необхідно знайти точку перетину M прямої $SK_1\cap BC=M$, враховуючи, що $S(-0.5{,}0)$; $K(-0.25{,}0.5)$ або у символьному записі $S(p_4,q_4)$; $K(p_5,q_5)$. Тут не враховується параметр r_4 і r_5 через те, що вершина симплексу – точка C збігається з початком координат, а це означає що доданки Cr_4 та Cr_5 дорівнюють нулю. У цьому випадку рівняння аналогічні (6) та (7) матимуть вигляд:

$$S=Ap_4+Bq_4;\ K_1=Ap_5+Bq_5. \tag{8}$$

Визначимо поточну точку M на прямій SK_1:

$$M=(K_1-S)u+S. \tag{9}$$

Підставимо (8) у (9), дістанемо:

$$\begin{gathered}M=(Ap_5+Bq_5-Ap_4-Bq_4)u+Ap_4+Bq_4=\\=A[(p_5-p_4)u+p_4]+B[(q_5-q_4)u+q_4].\end{gathered} \tag{10}$$

Для того, щоб точка M знаходилась на прямій BC необхідно мати рівним нулю параметр біля точки A, тобто:

$$(p_5-p_4)u+p_4=0\Rightarrow u=\frac{p_4}{p_4-p_5}. \tag{11}$$

Підставимо (11) у (10), дістанемо:

$$M=B\frac{q_5p_4-q_4p_5}{p_4-p_5}=B\frac{(-0.5)\cdot 0.5+0\cdot 0.25}{-0.5+0.25}=B\frac{0.25}{0.25}=B. \tag{12}$$

Як бачимо (рис. 2), пряма SK_1 перетинає лінію BC саме у точці B, що має параметри $B(0{,}1)$. Через точку проводимо лінію $q=1$ до перетину з лінією $p=0.25$, дістаємо точку D_{L1}, що є диференціальною проекцією (дифпроекцією) точки A_1. Продовжуємо лінію $q=1$ до перетину з лінією $p=0.5$, дістаємо точку D_{R2}, що є дифпроекцію точки A_2. Отже, маємо $D_{L1}(0.25{,}1)$; $D_{R2}(0.5{,}1)$ – дифпроекції, відповідно, точок A_1 та A_2, тобто початкової і кінцевої точок відрізку (A_1A_2) – першої ланки вихідної супровідної ламаної лінії.

Аналогічно знайдемо дифпроеції D_{L2} та D_{R3} для другої ланки супровідної ламаної лінії, тобто для відрізку (A_2A_3).

З полюсу $S(-0.5,0)$ проводимо пряму паралельне відрізку $(A_2 A_3)$, скориставшись (3), (4) і визначимо точку K_2:

$$K_2 = A_3 + S - A_2 . \qquad (13)$$

Точкову форму (13) запишемо у координатній (обчислювальній) формі:

$$\begin{aligned} p_5 &= p_3 + p_4 - p_2 = 1 - 0.5 - 0.5 = 0 ; \\ q_5 &= q_3 + q_4 - q_2 = 0.5 + 0 - 0.75 = -0.25 . \end{aligned} \qquad (14)$$

У відповідності до (14) точка $K_2(0,-0.25)$. Через те, що параметр $p_5 = 0$, то точка K_2 знаходиться на прямій *CB* і не потребує дій аналогічних до (9), (10), (11) та (12).

Параметри $q_5 = q_{L2} = q_{R3} = -0.25 = const$, тому що знаходяться на прямій, яка паралельна прямій *CA*. Отже, маємо диференціальні проекції $D_{L2}(0.5,-0.25)$ і $D_{R3}(1,-0.25)$ для точок, відповідно, A_2 та A_3.

У графічному диференціюванні точки D_{L1}, D_{L2}, D_{R2}, D_{R3} сприймаються як похідні для кривої, що проходить через вершини A_1, A_2, A_3 супровідної ламаної лінії, зображеної на рис. 2.

У композиційному диференціюванні (компродиференціюванні) ці точки визначаються як дифпроекції, з використанням яких у подальшому знаходяться похідні композиційної кривої (компокривої), що проходить через A_1, A_2, A_3.

Отже, графічні алгоритми побудови похідної у графічному диференціюванні, під час здійснення операцій компродиференціювання, замінимо обчислювальними операціями, які завжди є точнішими ніж графічні побудови.

Висновки. Введено вперше поняття композиційного диференціювання або скорочено – компродиференціювання, яке ґрунтується на раніше введеному (1979 рік) авторами понятті: «диференціальні проекції» або «дифпроекції» [5]. Компродиференціювання є схожим на відоме графічне диференціювання. Різниця між ними полягає у тому, що у компродиференціюванні, замість графічних побудов, алгоритм розв’язку подається у точкових формах, яким, у подальшому, поставлені у відповідність обчислювальні операції. При цьому, у статті надано обчислювальні алгоритми лише для знаходження дифпроекцій, які є початковими елементами для утворення композиційної похідної. Обчислювальні алгоритми щодо утворення композиційної похідної, знаходяться поза межами цілей цієї статті, тому тут не розглядаються. Отже, застосування точкового БН-числення щодо компродиференціювання призводить до утворення простих точкових форм, які легко реалізуються у відповідних координатно-параметричних виразах через здійснення елементарних математичних операцій. Компродиференціювання може і є менш точним у порівнянні з традиційними методами диференціювання функцій, які достатньо повно досліджені у математичному аналізі, однак, через те, що композиційні криві не є функціями у традиційному розумінні, а є композицією часток усіх базисних точок вихідного дискретного геометричного об’єкту, при цьому, степінь характеристичних функції точкових поліномів завжди є достатньо високою, то, на наш погляд, застосування композиференціювання буде більш ефективним у обчислювальних алгоритмах в процесі їхньої програмної реалізації.

Література

1. *Балюба И.Г.* Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: дис. … доктора тех. наук. Макеевка: МИСИ, 1995. 227 с.
2. *Балюба И.Г., Найдыш В.М.* Точечное исчисление (учебное пособие под ред. Верещаги В.М.). Мелитополь: Изд-во МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. 234 с.
3. *Лисенко К.Ю., Найдиш А.В., Верещага В.М., Адоньєв Є.О.* Основи композиційного геометричного моделювання: навчальний посібник. МДПУ ім. Б. Хмельницького. Мелітополь, 2019. 255 с.
4. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. инд. перераб. Москва : Наука, 1980, 996с.
5. *Верещага В.М.* О поле дифпроекций эмпирической кривой. Начертательная геометрия и черчение» (межвузовский сборник). Алма-Ата, 1979. С. 63-66.

References

1. *Baljuba Y.G.* Konstruktyvnaja geometryja mnogoobrazyj v tochechnom yschyslenyy: dys. … doktora teh. nauk. Makeevka: MYSY, 1995. 227 s.
2. *Baljuba Y.G., Najdysh V.M.* Tochechnoe yschyslenye (uchebnoe posobye pod red. Vereshhagy V.M.). Melytopol': Yzd-vo MGPU ym. B. Hmel'nyckogo, 2015. 234 s. {in Russian}
3. *Lysenko K.Ju., Najdysh A.V., Vereshhaga V.M., Adon'jev Je.O.* Osnovy kompozycijnogo geometrychnogo modeljuvannja: navchal'nyj posibnyk. MDPU im. B. Hmel'nyc'kogo. Melitopol', 2019. 255 s. {in Russian}
4. *Bronshtejn Y.N., Semendjaev K.A.* Spravochnyk po matematyke dlja ynzhenerov y uchashhyhsja vuzov. ynd. pererab. Moskva : Nauka, 1980, 996s. {in Russian}
5. *Vereshhaga V.M.* O pole dyfproekcyj эmpyrycheskoj kryvoj. Nachertatel'naja geometryja y cherchenye» (mezhvuzovskyj sbornyk). Alma Ata, 1979. S. 63-66. {in Russian}

UDC 514.18

Kseniia Lysenko
yksyushka24@gmail.com
PhD, prof. **Viktor Vereshchaga**,
vervik1949@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0038-8300
Bogdan Khmelnitsky Melitopol State Pedagogical University

ELEMENTS OF COMPOSITE DIFFERENTIATION IN POINT FORM

It is emphasized that composite geometry is one of the applied areas of development of point-based BN calculus. Having analyzed the existing methods of differential analysis, we came to the conclusion that it is necessary to develop a method of compositional differentiation. Traditional functional analysis is designed to differentiate and integrate functions. Since the point polynomial is not a function, but is a composition of fractions of all points, the set of which makes up the original geometric object, the development of a new method of compositional differentiation is relevant for the analysis of its differential characteristics.

The question of the formation of point forms and their corresponding computational expressions, which relate to the issue investigated in this article, is considered.

The differences between graphic and compositional differentiation are indicated. It is emphasized that the composite curve and its composite derivative are not related to each other in the form of analytical transformations.

On the example of an elementary accompanying broken line, which consists of two links, an algorithm for the formation of differential projections, on the basis of which compositional differentiation is formed, is provided.

Keywords: curve derivative, composite curve, graphical differentiation, composite differentiation, differential projections.