SCI-CONF.COM.UA

RESULTS OF MODERN SCIENTIFIC RESEARCH AND DEVELOPMENT

PROCEEDINGS OF III INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE
MAY 29-31, 2021

MADRID
2021

RESULTS OF MODERN SCIENTIFIC RESEARCH AND DEVELOPMENT

Proceedings of III International Scientific and Practical Conference

Madrid, Spain

29-31 May 2021

Madrid, Spain

2021

УДК 001.891.5(042.4)

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Еремеев Владимир Сергеевич,
д. т. н., профессор
Мелитопольский государственный педагогический
университет им. Богдана Хмельницкого
г. Мелитополь, Украина

Аннотация. Предложен метод обработки экспериментальных данных с использованием кубического сплайна, на границах которого заданы граничные условия для первой производной. Рассмотрены примеры построения уравнений регрессии, описывающих зависимость функции отклика от входного фактора.

Ключевые слова: интерполяция, кубический сплайн, обработка эксперимента, построение сплайна, уравнение регрессии, функция отклика.

Введение. Математические методы обработки экспериментальных данных являются мощным инструментом при изучении влияния одного или нескольких входных факторов x_i на выходной параметр y [1], [2]. Обычно предполагается, что значение y является функцией от входных величин, которая в случае одной переменной определяется рядом Тейлора $y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$. Наличие шумовых помех исключает возможность его использования при обработке эксперимента. На практике часто применяется функция отклика в виде уравнения регрессии, представляемой отрезком ряда Тейлора с конечным числом слагаемых. Задача сходится к выбору аппроксимирующей функции отклика, которая, например, может быть построена с использованием интерполяционных сплайнов [3]. В настоящей работе рассмотрен метод построения уравнения регрессии с использованием кубических сплайнов с учётом экспериментальных ошибок.

Цель выполнения работы и постановка задачи. Пусть при изучении влияния некоторого фактора X на параметр Y получены экспериментальные данные, где каждому значению x_i на отрезке $[a,b]$ соответствует значение y_i, i = 1, 2,…, n. Будем считать, что между указанными величинами существует функциональная зависимость в виде непрерывной функции $y(x)$ с непрерывными производными до второго порядка включительно. Рассмотрим возможность представления этой функции на отрезке $[a,b]$ в некотором приближении с помощью сплайна $S(x)$, Представим $S(x)$ в виде n многочленов третьего порядка

$$f_k(x)=a_k+b_k(x-x_k)+c_k(x-x_k)^2+d_k(x-x_k)^3,\ k=[1,\dots,n],\ x_{k-1}<=x<=x_k. \quad (1)$$

Теория полиномиальных сплайнов изложена во многих трудах [3], [4]. Чаще всего используется так называемый «естественный сплайн», построенный в предположении, что его вторые производные на концах отрезка $[a,b]$ равны нулю. На практике встречаются задачи с иными условиями, рассмотрение которых представляет определённый интерес. Настоящая работа посвящена разработке алгоритма использования кубического сплайна при задании значений первой производной функции на границах её определения. Для обеспечения непрерывности сплайна и его производных потребуем выполнения следующих условий на границах соседних многочленов:

$$f_k(x_k)=f_{k+1}(x_k),\ [1,\dots,n-1], \quad (2)$$

$$f'_k(x_k)= f'_{k+1}(x_k),\ f''_k(x_k)= f''_{k+1}(x_k),\ [1,\dots,n-1]. \quad (3)$$

Пусть на границах отрезка $[a,b]$ заданы первые производные

$$f'_1(x_0)=s_1,\ f'_n(x_n) =s_2. \quad (4)$$

Значения многочленов (1) в узловых точках равны

$$f_k(x_k)=y_k,\ [0,\dots,n]. \quad (5)$$

Сплайн $S(x)$ из n многочленов (1) с $4n$ неизвестными коэффициентами a_k, b_k, c_k, d_k, $k=[1,\dots,n]$ однозначно определяется $4n$ условиями (2)-(5). Для построения этого сплайна необходимо разработать алгоритм решения уравнений (2)-(5).

Результаты работы. Обозначим разности между соседними координатами узлов и значениями функций в этих узлах через $\delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $\delta y_k=y_k-y_{k-1}$. Из условия непрерывности (2) сплайна следует выполнение равенств

$$g_k=b_k-c_k\delta x_k+d_k\delta x_k^2,\ k=[1,...,n-1], \qquad (6)$$

где $g_k=\delta y_k/\delta x_k$.

Условия непрерывности производных (3) с учётом (1) представим в виде

$$b_k=b_{k-1}+2c_k\delta x_k-3d_k\delta x_k^2,\ k=[2,...,n], \qquad (7)$$

$$d_k=(c_k-c_{k-1},)/(3\delta x_k),\ k=[2,...,n]\ . \qquad (8)$$

После подстановки $d_k\delta x_k$ из (8) в формулы (6), (7) получим

$$b_k=g_k+c_k\delta x_k/2+c_{k-1}\delta x_k/3\ k=[2,...,n], \qquad (9)$$

$$b_k-b_{k-1}-c_k\delta x_k-c_{k-1}\delta x_k=0,\ k=[2,...,n], \qquad (10)$$

Из формулы (9) следует

$$b_{k-1}=c_{k-1}\delta x_{k-1}/2+c_{k-2}\delta x_{k-1}/3+g_{k-1},\ k=[3,...,n],$$

Подставляя последнее выражение и формулу (9) в (10), найдём уравнения

$$2\delta x_kc_{k-1}+(4\delta x_{k+1}+3\delta x_k)c_k+3\delta x_{k+1}c_{k+1}=6h_{k+1},\ k=[2,...,n-1], \qquad (11)$$

где $h_k=g_k-g_{k-1}$.

Уравнения (11) несколько отличаются от результатов, полученных в ряде работ с использованием других методов решения [3], [4]. Решение системы уравнений (11) позволяет определить коэффициенты c_k и по формулам (8), (9) найти коэффициенты сплайна d_k и b_k. Таким образом, задача сводится к решению системы из n-2 линейных алгебраических уравнений (11), содержащих n неизвестных c_k, $k=[1,..n]$. Для её численного решения необходимо принять два дополнительных соотношения. В случае «естественного сплайна» с неконтролируемым значением первой производной на границе области изменения восстанавливаемой функции они представляются в форме

$$S'_1(x_0)=0,\quad S'_n(x_n)=0. \qquad (12)$$

Получим решение системы (11) при выполнении требований (4), которые с учётом (1) принимают вид

$$s_1=b_1-2c_1\delta x_1+3d_1\delta x^2_1\ ,\ \ s_2=b_n. \qquad (13)$$

Запишем уравнения (11) в виде

$$A_kc_{k-1}-B_kc_k+C_kc_{k+1}=D_k\ ,\qquad k=[1,...,n-1] \qquad (14)$$

или в матричной форме

$$\begin{array}{ccccccc}
A_1 & -B_1 & C_1 & D_1 & & & \\
 & A_2 & -B_2 & C_2 & D_2 & & \\
 & & . & . & . & . & \\
 & & A_k & -B_k & C_k & D_k & \\
 & & & . & . & . & \\
 & & & A_n & -B_n & C_n & D_n
\end{array}$$

с коэффициентами

$$A_k=2\delta x_k,\ B_k=-(4\delta x_{k+1}+3\delta x_k),\ C_k=3\delta x_{k+1},\ D_k=6h_{k+1}.\ k=[1,\dots,n-1]. \qquad (15)$$

В систему уравнений (14) дополнительно введены формальные коэффициенты $c_0=0$, $\alpha_0=0$, $\beta_0=0$. Решение уравнений (14) проведём методом прогонки

$$c_k=\alpha_k c_{k+1}+\beta_k,\ \ k=[0,\dots,n-1]. \qquad (16)$$

После подстановки (15) в (13) получим формулы для определения α_k и β_k

$$\alpha_k=C_k/(B_k-A_k\alpha_{k-1}),\ \beta_k=(A_k\alpha_{k-1}-D_k)\ /(B_k-A_k\alpha_{k-1}),\ k=[1,\dots,n-1]. \qquad (17)$$

Из (17) и (15) найдём

$$\alpha_k=-3\delta x_{k+1}/(4\delta x_{k+1}+3\delta x_k+2\delta x_k\alpha_{k-1})\ k=[1,..n-1], \qquad (18)$$

$$\beta_k=(-2\delta x_k\beta_{k-1}+6h_{k+1})/(4\delta x_{k+1}+3\delta x_k+\alpha_{k-1}2\delta x_k),\ k=[2,..n-1]. \qquad (19)$$

Коэффициент b_1 определим из формулы (6) для $k=1$ и формулы (13):

$$b_1=(-s_1+3g_1+c_1\delta x_1)/2. \qquad (20)$$

После подстановки b_1 из (20) в формулу (6) для $k=1$ получим значение d_1

$$d_1=(s_1-g_1+c_1\delta x_1)/2\delta x_1^2. \qquad (21)$$

Алгоритм построения сплайна выглядит следующим образом. Сначала вычисляются коэффициенты A_k, B_k, C_k, D_k уравнения (15) и коэффициенты прогонки (18) и (19). На втором шаге, полагая значение c_n равным нулю, с использованием формулы (16) определяются коэффициенты c_k. Далее находятся b_1 и d_1 по формулам (20), (21) и коэффициенты d_k, b_k по формулам (8), (9).

Численные эксперименты показали, что для более точных результатов, особенно при небольшом количестве узлов, для расчёта коэффициентов d_k вместо формулы (8) следует использовать формулу

$$d_k=(g_k-b_k+c_k\,\delta x_k)/\delta x_k^2,\ k=[2,\dots,n], \qquad (22)$$

которая следует из выражения (6).

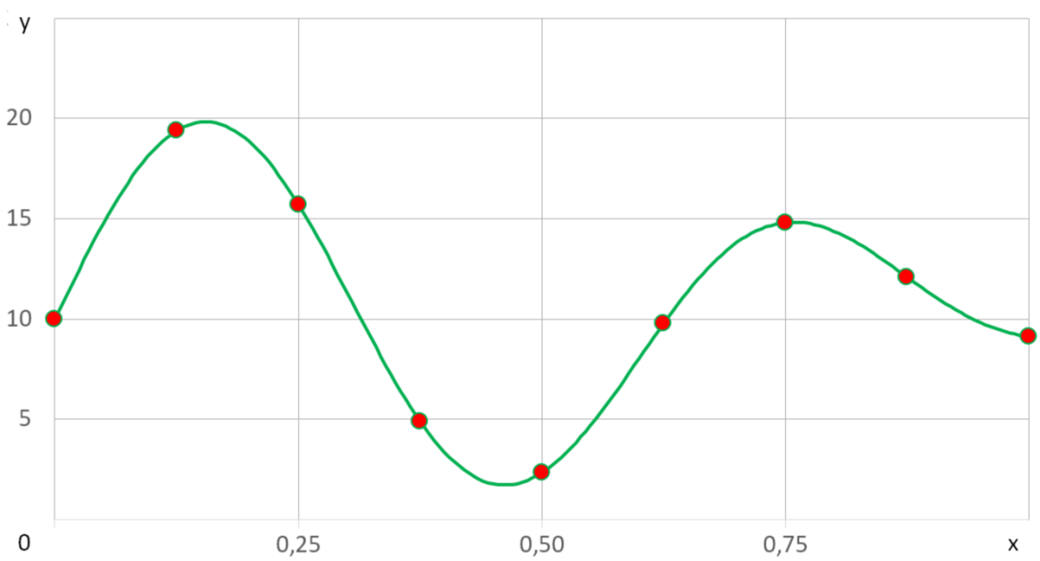
Тестирование предложенного алгоритма проводилось на примере функции *sin(x)* на отрезке [0,π] с граничными условиями s_1=1, s_2=-1. Часть результатов расчётов, относящихся к последнему интервалу на отрезке [2.8274, 3.0473] для количества узлов n=10, приведена в табл. 1.

Таблица 1

Результаты тестирования алгоритма на примере функции sin(x)

i	*x*	*sin(x)*	*S(x)*
0	2.8274	0.3090	0.3090
1	2.8588	0.2790	0.27_{99}
2	2.8903	0.2487	0.25_{03}
3	2.9217	0.2181	0.22_{02}
4	2.9531	0.1874	0.18_{97}
5	2.9845	0.1564	0.15_{86}
6	3.0159	0.1253	0.12_{72}
7	3.0473	0.0941	0.09_{54}

Из табл. 1 видно, что точность представления тестированной функциональной зависимости обеспечивается во втором-третьем знаках после запятой. Согласно проведённым дополнительным расчётам повышение числа узлов до 100 и 1000 приводит к повышению точности, соответственно, до шестого и восьмого знаков после запятой. В качестве примера найдём уравнение регрессии, которое определяет зависимость фактора y от x в соответствие со следующими экспериментальными данными, полученными с относительной точностью около 10^{-3}: при входном факторе x=0.000, 0.125, 0.250, 0.375. 0.500, 0.625, 0.750, 0.875, 1.000 выходной фактор y=10.00, 19.35, 15.70, 5.65, 2.30, 9.75, 14.80, 12.10, 9.10, рис. 1.



Из рис. 2 видно, что графическая зависимость достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными, которые на графике выделены кружочками. Наличие больших экспериментальных ошибок не приводит к дополнительной неточности, связанной с использованием сплайна, но качество графической интерпретации результатов эксперимента, естественно, снижается.

Выводы. Предложен метод построения кубического сплайна, на границах которого заданы условия для первой производной. На примере построения интерполяционного полинома для функции *sin(x)* показано, что точность восстановления функциональной зависимости достаточно велика и при количестве узлов n=10 составляет около 10^{-3}. Повышение n до 100 и 1000 приводит к увеличению точности, соответственно, до 10^{-6} и 10^{-8}.

Список литературы

1. Schoenberg I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A: On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae. Part B: On the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic approximation formulae. // Quart. Appl. Math. - 1946. - Vol. 4. - P. 45–99, 112–141.

2. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций.- М.: Наука, - 1980. - 352 с.

3. Волков Е. А. Численные методы.2-е издание. - М.: Наука. Гл. изд. физ.-мат. литературы, - 1987. - 248 с.

4. Фаддеев М.А., Марков К.А. Численные методы. – Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,- 2010.– 158 с.