

SCI-CONF.COM.UA

THE WORLD OF SCIENCE AND INNOVATION



**PROCEEDINGS OF X INTERNATIONAL
SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE
MAY 5-7, 2021**

**LONDON
2021**

THE WORLD OF SCIENCE AND INNOVATION

Proceedings of X International Scientific and Practical Conference

London, United Kingdom

5-7 May 2021

London, United Kingdom

2021

55.	<i>Гусейнова Сабина Гусейн кызы</i> РАЗЛИЧНЫЕ АСПЕКТЫ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТРУКТУР АГРОБИЗНЕСА.	378
56.	<i>Гурська Л. І.</i> ВИКОРИСТАННЯ ДИСТАНЦІЙНИХ ОСВІТНІХ ТЕХНОЛОГІЙ ДЛЯ НАВЧАННЯ ТА ТЕСТУВАННЯ ІНОЗЕМНИХ СЛУХАЧІВ.	385
57.	<i>Даниленко Н. В., Бєліцька К. В.</i> ВПЛИВ МАТЕРІ НА ФОРМУВАННЯ МАТЕРИНСЬКОЇ СФЕРИ ДОЧКИ.	394
58.	<i>Дахно Р. Ю., Порошина А. С.</i> ПІДСТАВИ ТА УМОВИ ЦИВІЛЬНО-ПРАВОВОЇ ВІДПОВІДАЛЬНОСТІ.	406
59.	<i>Дем'янюк Н. Ю.</i> ФАХОВА ПІДГОТОВКА МАГІСТРАНТІВ У КУРСІ «ПРАКТИКУМ З МУЗИЧНО-ПІСЕННОГО РЕПЕРТУАРУ».	416
60.	<i>Денисенко С. А., Герасименко О. И., Стеценко С. А., Гойдина В. С., Медушевский К. С.</i> ОСОБЕННОСТИ МЕТАБОЛИЗМА ЦИНКА В ОРГАНИЗМЕ ЧЕЛОВЕКА.	422
61.	<i>Денисюк С. П., Романченко О. С.</i> ВПЛИВ ЗАСТОСУВАННЯ ДИНАМІЧНОЇ ТАРИФІКАЦІЇ НА ГРАФІКИ ГЕНЕРАЦІЇ ТА СПОЖИВАННЯ ЕЛЕКТРОЕНЕРГІЇ В MICROGRID.	429
62.	<i>Долусова Н. В., Кліменченко С. В.</i> РЕПРЕЗЕНТАЦІЯ ЖІНОЧОГО ТА ЧОЛОВІЧОГО ГЕНДЕРНОГО СТЕРЕОТИПУ У РОМАНІ Д. СТИЛ “MAGIC”.	442
63.	<i>Дурманенко О. Л.</i> КУЛЬТУРА МІЖОСОБИСТІСНОГО СПІЛКУВАННЯ ЯК ПОКАЗНИК СФОРМОВАНOSTІ ПРОФЕСІЙНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНЬОГО ВИХОВАТЕЛЯ ЗДО.	446
64.	<i>Еремеев В. С.</i> ПОСТРОЕНИЕ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ В СЛУЧАЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ.	450
65.	<i>Збарський В. К., Грибова Д. В., Збарська А. В.</i> ОСОБЛИВОСТІ РОЗВИТКУ СІЛЬСЬКОГО ЗЕЛЕНОГО ТУРИЗМУ В УКРАЇНІ.	456
66.	<i>Исмаилов В. И., Сафаров Аббас Тофик</i> МОДЕЛЬ СТРАТЕГИИ ГОСПОДДЕРЖКИ ПРОИЗВОДИТЕЛЕЙ СЕЛЬХОЗПРОДУКЦИИ.	464
67.	<i>Іодко А. Л.</i> ПРОБЛЕМАТИКА ПРОВЕДЕННЯ АНАЛІЗУ ФІНАНСОВОЇ ЗВІТНОСТІ В УКРАЇНІ.	474
68.	<i>Калушка І. В., Семеняк А. В.</i> ОСОБЛИВОСТІ ПЕРЕБІГУ ВАГІТНОСТІ З ЦУКРОВИМ ДІАБЕТОМ.	483

ПОСТРОЕНИЕ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ В СЛУЧАЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Еремеев Владимир Сергеевич

д.т.н., профессор

Мелитопольский государственный

педагогический университет

им. Богдана Хмельницкого

г. Мелитополь, Украина

Аннотация. Разработан алгоритм восстановления функциональной зависимости с использованием кубического сплайна, на границах которого заданы граничные условия для первой производной. На примере тестирования возможности построения интерполяционного полинома для функции $\sin(x)$ показано, что точность интерполирования достаточно велика и при количестве узлов $n=10$ составляет около 10^{-2} - 10^{-3} . Повышение n до 10^2 и 10^3 обеспечивает увеличение точности, соответственно, до 10^{-5} - 10^{-6} и 10^{-8} - 10^{-9} .

Ключевые слова: восстановление функции, интерполяционный полином, интерполяция, кубический сплайн, построение сплайна.

Введение

Восстановление функциональной зависимости на основании дискретного множества чисел является одной из важных задач вычислительной математики. В простейшем случае это множество задаётся в виде таблицы с двумя переменными (x_k, y_k) , $k=0, 1, 2, \dots, n$, принадлежащими отрезку $[a, b]$. Определение зависимости $y(x)$ для больших n с использованием интерполяционных полиномов типа полинома Лагранжа встречается с непреодолимыми трудностями, которые можно обойти с использованием

сплайнов. Теория полиномиальных сплайнов разработана в трудах [1], [2], [3, с. 63-68] и в трудах многих других ученых. В первую очередь она расширила возможности интерполирования функций [4]. Чаще всего используется так называемый «естественный сплайн», в котором вторые производные на границах области $[a, b]$ равны нулю [3, с. 63-68], [5]. На практике встречаются задачи с иными граничными условиями, рассмотрение которых представляет определённый интерес. Настоящая работа посвящена созданию кубического сплайна при задании условий для первой производной функции на границах её определения.

Цель выполнения работы и постановка задачи

Пусть на отрезке $[a, b]$ существует непрерывная функция $F(x)$ с непрерывными производными до второго порядка включительно. Предположим, что в узловых точках $x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b$ она принимает известные значения, равные, соответственно, $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$. Рассмотрим возможность восстановления этой функции на $[a, b]$ при задании первой производной в точках $x=a$ и $x=b$. Представим сплайн $S(x)$ в виде многочленов третьего порядка

$$f_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3, \quad k = [1, \dots, n], \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k. \quad (1)$$

Для обеспечения непрерывности сплайна и его производных потребуем выполнения следующих условий на границах соседних многочленов:

$$f_k(x_k) = f_{k+1}(x_k), \quad [1, \dots, n-1], \quad (2)$$

$$f'_k(x_k) = f'_{k+1}(x_k), \quad f''_k(x_k) = f''_{k+1}(x_k), \quad [1, \dots, n-1]. \quad (3)$$

Пусть на границах отрезка заданы первые производные

$$f'_1(x_0) = s_1, \quad f'_n(x_n) = s_2. \quad (4)$$

Потребуем, чтобы значения многочленов (1) в узловых точках равнялись y_k

$$f_k(x_k) = y_k, \quad [0, \dots, n]. \quad (5)$$

Известно, что сплайн $S(x)$, представленный в виде n многочленов, содержащих $4n$ коэффициентов $a_k, b_k, c_k, d_k, k = [1, \dots, n]$, однозначно определяется $4n$ условиями (2)-(5) [2]. Для нахождения неизвестных

коэффициентов требуется решить поставленную задачу, которая сводится к разработке алгоритма их вычисления.

Результаты работы

Обозначим разности между соседними координатами узлов и значениями функций в этих узлах через $\delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\delta y_k = y_k - y_{k-1}$. Из условия непрерывности (2) сплайна следует выполнение равенств

$$g_k = b_k - c_k \delta x_k + d_k \delta x_k^2, \quad k = [1, \dots, n-1], \quad (6)$$

где $g_k = \delta y_k / \delta x_k$.

Условия непрерывности производных (3) с учётом (1) представим в виде

$$b_k = b_{k-1} + 2c_k \delta x_k - 3d_k \delta x_k^2, \quad k = [2, \dots, n], \quad (7)$$

$$d_k = (c_k - c_{k-1}) / (3\delta x_k), \quad k = [2, \dots, n]. \quad (8)$$

После подстановки d_k из (8) в формулы (6), (7) получим

$$b_k = g_k + c_k \delta x_k / 2 + c_{k-1} \delta x_k / 3, \quad k = [2, \dots, n], \quad (9)$$

$$b_k - b_{k-1} - c_k \delta x_k - c_{k-1} \delta x_k = 0, \quad k = [2, \dots, n]. \quad (10)$$

Из формулы (9) следует

$$b_{k-1} = c_{k-1} \delta x_{k-1} / 2 + c_{k-2} \delta x_{k-1} / 3 + g_{k-1}, \quad k = [3, \dots, n],$$

Подставляя последнее выражение и формулу (9) в (10), найдём уравнения

$$2\delta x_k c_{k-1} + (4\delta x_{k+1} + 3\delta x_k) c_k + 3\delta x_{k+1} c_{k+1} = 6h_{k+1}, \quad k = [2, \dots, n-1], \quad (11)$$

где $h_k = g_k - g_{k-1}$.

Отличие формы представления зависимостей между коэффициентами c_k от результатов, полученных в ряде работ [2], [5], связано с использованием других методов постановки задачи.

Решение системы уравнений (11) позволяет найти коэффициенты c_k и по формулам (8), (9) определить коэффициенты сплайна d_k и b_k . Таким образом, задача сводится к решению системы из $n-2$ линейных алгебраических уравнений (11), содержащих n неизвестных c_k , $k = [1, \dots, n]$. Для её численного решения необходимо принять два дополнительных соотношения. В случае «естественного сплайна» с неконтролируемым значением первой производной на границе области изменения восстанавливаемой функции они

представляются в форме [2], [5].

$$f''_1(a)=0, f''_n(b)=0 \text{ или в виде } c_1=0, c_2=0. \quad (12)$$

Получим решение системы (11) при выполнении условий для первых производных на границах области (4), которые с учётом (1) принимают вид

$$s_1=b_1-2c_1\delta x_1+3d_1\delta x_1^2, s_2=b_n. \quad (13)$$

Запишем уравнения (11) в виде

$$A_k c_{k-1} - B_k c_k + C_k c_{k+1} = D_k, \quad k=[1, \dots, n-1] \quad (14)$$

или в матричной форме

$$\begin{array}{cccc} A_1 & -B_1 & C_1 & D_1 \\ & A_2 & -B_2 & C_2 & D_2 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & A_k & -B_k & C_k & D_k \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & A_n & -B_n & C_n & D_n \end{array}$$

с коэффициентами

$$A_k=2\delta x_k, B_k=-(4\delta x_{k+1}+3\delta x_k), C_k=3\delta x_{k+1}, D_k=6h_{k+1}. k=[1, \dots, n-1]. \quad (15)$$

В систему уравнений (14) дополнительно введены формальные коэффициенты $c_0=0, \alpha_0=0, \beta_0=0$. Решение уравнений (14) проведём методом прогонки

$$c_k=\alpha_k c_{k+1}+\beta_k, \quad k=[0, \dots, n-1]. \quad (16)$$

После подстановки (16) в (13) получим формулы для вычисления прогоночных коэффициентов α_k и β_k

$$\alpha_k=C_k/(B_k-A_k\alpha_{k-1}), \beta_k=(A_k\alpha_{k-1}-D_k)/(B_k-A_k\alpha_{k-1}), k=[1, \dots, n-1]. \quad (17)$$

Из (17) и (15) найдём

$$\alpha_k=-3\delta x_{k+1}/(4\delta x_{k+1}+3\delta x_k+2\delta x_k\alpha_{k-1}) \quad k=[1, \dots, n-1], \quad (18)$$

$$\beta_k=(-2\delta x_k\beta_{k-1}+6h_{k+1})/(4\delta x_{k+1}+3\delta x_k+\alpha_{k-1}2\delta x_k), \quad k=[2, \dots, n-1]. \quad (19)$$

Коэффициент b_1 определим из формулы (6) для $k=1$ и формулы (13):

$$b_1=(-s_1+3g_1+c_1\delta x_1)/2. \quad (20)$$

После подстановки b_1 из (20) в формулу (6) для $k=1$ получим значение d_1

$$d_1=(s_1-g_1+c_1\delta x_1)/2\delta x_1^2=d_1. \quad (21)$$

Алгоритм построения сплайна выглядит следующим образом. Сначала вычисляются коэффициенты уравнения (15) A_k, B_k, C_k, D_k и коэффициенты

прогонки (18) и (19). На втором шаге, полагая значение c_n равным нулю, с использованием формулы (16) определяются коэффициенты c_k . Далее находятся b_1 и d_1 по формулам (20), (21) и коэффициенты d_k , b_k по формулам (8), (9).

Тестирование предложенного алгоритма проводилось на примере функции $\sin(x)$ на отрезке $[0, \pi]$ с граничными условиями $s_1=1$, $s_2=-1$ с количеством узлов $n=10$. Часть результатов расчётов, относящихся к последнему интервалу на отрезке $[2.8274, 3.1416]$, приведено в табл. 1.

Таблица 1

Результаты тестирования на примере функции $\sin(x)$

i	x	$\sin(x)$	Spline(x)
0	2.8274	0.3090	0.3090
1	2.8588	0.2790	0.2799
2	2.8903	0.2487	0.25 ₀₃
3	2.9217	0.2181	0.22 ₀₂
4	2.9531	0.1874	0.18 ₉₇
5	2.9845	0.1564	0.15 ₈₆
6	3.0159	0.1253	0.12 ₇₂
7	3.0473	0.0941	0.0954
8	3.0788	0.0628	0.06 ₃₅
9	3.1102	0.0314	0.03 ₁₆
10	3.1416	0.0000	0.0000

Из табл. 1 видно, что точность представления тестируемой функциональной зависимости обеспечивается во втором-третьем знаках после запятой. Согласно дополнительно проведённым расчётам повышение числа узлов до 100 и 1000 приводит к повышению точности, соответственно, до 5-6-го и 8-9-го знаков после запятой.

Выводы

Предложен метод определения кубического сплайна, на границах которого заданы условия для первой производной. На примере построения полинома для проведения интерполяции функции $\sin(x)$ показано, что точность восстановления функциональной зависимости достаточно велика и при количестве узлов $n=10$ составляет около 10^{-3} . Повышение n до 100 и 1000 приводит к увеличению точности, соответственно, до 10^{-6} и 10^{-9} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schoenberg I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A: On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae. Part B: On the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic approximation formulae. // Quart. Appl. Math. - 1946. - Vol. 4. - P. 45–99, 112–141.
2. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций.- М.: Наука, - 1980. - 352 с.
3. Волков Е. А. Численные методы.2-е издание. - М.: Наука. Гл. изд. физ.-мат. литературы, - 1987. - 248 с.
4. Фаддеев М.А., Марков К.А. Численные методы. – Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,- 2010.– 158 с.
5. Интерполяция кубическими сплайнами. Электронный ресурс: <http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title.>