УДК 514.18

КОРЕГУВАННЯ ФОРМИ ПЛОСКОГО ТОЧКОВОГО ПОЛІНОМУ ШЛЯХОМ ЗМІНИ ПОЛОЖЕННЯ ЙОГО БАЗИСНИХ ТОЧОК

Верещага В.М., д.т.н.,
vervik49@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0038-8300
Лисенко К.Ю., аспірантка*
Lyksyushka24@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3047-6352
Мелітопольська школа прикладної геометрії
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (Україна)

Точкові поліноми є основою композиційного геометричного моделювання. Утворення точкових поліномів здійснюється із застосуванням геометричного способу інтерполяції, яку названо композиційною інтерполяцією.

Композиційне геометричне моделювання (КГМ) призначене для створення геометричним способом аналітично (математично) формалізованих континуальних точкових множин, що являють собою композиційні моделі геометричних об'єктів довільної форми, які відтворюють перебіг реальних процесів та об'єктів за наперед визначеними умовами, шляхом здійснення композиційної інтерполяції.

Через те, що точковий поліном є осьонезалежною параметричною кривою, його рівняння формується відносно базисних точок вихідної дискретно поданої лінії у вигляді складових, якими є або негармонізовані або гармонізовані характеристичні функції, що являють собою параметричний базис відповідних точкових поліномів.

У статті запропоновано здійснювати параметризацію вихідної геометричної фігури уздовж осі Ох, показано визначення параметрів у її базисних точках.

При цьому, без втрати узагальненості, тестові приклади обчислюються у координатній площині для шести базисних точок, що визначають точковий поліном п'ятого степеня. Показано у розгорнутому вигляді побудову характеристичних функцій для точкового поліному, що визначається шістьма базисними точками, надається, у загальному вигляді, його рівняння.

Показано, що зменшенню кількості розрахункових операцій під час композиційного геометричного моделювання також сприяє наявна у точкових поліномів, можливість побудови конгруентних кривих. У цьому випадку не потрібно розраховувати кожну нову криву, а усі розрахунки можна здійснювати на початково розрахованій кривій, а результат

* Науковий керівник – д.т.н., професор Верещага В.М.

переносити на відповідні конгруентні криві.

Ключові слова: композиційне геометричне моделювання, геометрична інтерполяція, дискретно подана крива, точковий поліном.

Постановка проблеми. Розв’язання задачі корегування форми для просторового точкового поліному, а також розробка методики цілеспрямованого корегування форми, яка б дозволила, заміною вихідних базисних точок, здобувати необхідну форму точкового поліному.

Аналіз останніх досліджень. Основою композиційного геометричного моделювання [3, 4, 5, 6] є геометричні способи інтерполяції одно-, дво- та трипараметричними точковими поліномами. Наразі розроблено тільки способи застосування вказаних точкових поліномів [1, 8, 9, 10, 11]. Вивчення їх властивостей і можливостей застосування у створенні композиційних геометричних моделей є актуальною проблемою. У статті визначають можливості однопараметричних плоских точкових поліномів щодо корегування їх форми шляхом зміни положення вихідних базисних точок, на основі яких відбувається геометричне формування цих точкових поліномів.

Питання корегування форми точкового поліному шляхом зміни його базисних точок, які розглядаються у цьому дослідженні, лише започатковують розв’язання проблеми і ні у якому разі не є завершальним.

Формулювання цілей статті. Показати, для композиційних кривих, можливість корекції їхньої форми шляхом зміни лише положення окремих базисних точок вихідної ДПК.

Основна частина. Для здійснення глобальної композиційної інтерполяції плоских дискретно поданих кривих (ДПК) будемо користатися геометричним способом інтерполяції, який забезпечується побудовою характеристичних функцій точкового поліному. Точкові поліноми покладено у основу композиційного методу геометричного моделювання.

Композиційне геометричне моделювання побудоване на методах точкового числення Балюби-Найдиша (точкового БН-числення), який названо так на честь його розробників [2, 7].

Точкове БН-числення, за визначенням [2], є обчислювальною геометрією відношень частин до цілого, що обираються із елементів – складових (підмножини) вихідної геометричної фігури (ГФ), одержані значення відношень складають параметричний базис досліджуваної ГФ, аналітичні записи якого у явній чи неявній формі являють собою просте відношення трьох точок, при цьому, сума усіх визначених параметрів для базисних точок досліджуваної ГФ, має завжди дорівнювати одиниці.

Геометричний спосіб інтерполяції (ГСІ) забезпечується характеристичними функціями (ХФ), які утворюються, виходячи із геометричних умов, закладених у вихідній геометричній композиції та входять складовими до точкових поліномів.

Гармонізований точковий поліном – це параметричний поліном у точковій формі, що являє собою дробово-раціональну функцію щодо параметру t для $0 \le t \le 1$, і складається із суми добутків базисних точок на гармонізовані характеристичні функції та має запис:

$$M = \sum_{j=1}^{n} A_j \cdot P_j \,, \tag{1}$$

де P_j – гармонізовані характеристичні функції, що названі [4] «Балюби-Найдиша координатами» (БН-координатами), які є параметричною складовою точкового поліному;

A_j – базисні точки вихідної геометричної фігури (ДПК), відносно яких визначається рівняння точкового поліному, являють собою його геометричну складову.

Рівняння (1) гармонізованого точкового поліному (ГТП) визначається не відносно вихідної системи координат, у якій задані точки A_j для $j = \overline{1, n}$, а відносно самих точок A_j; $j = \overline{1, n}$. Через це ГТП (1) є осьонезалежним, тобто рівняння (1) ГТП не змінюється за будь-якої зміни початкових точок A_j; $j = \overline{1, n}$ у вихідній (глобальній) системі декартових координат. Рівняння (1) ГТП ще є осьонезалежним через те, що його геометрична складова, тобто базисні точки A_j; $j = \overline{1, n}$, відокремлена від параметричної складової – гармонізованих характеристичних функцій (ГХФ), тобто P_j; $j = \overline{1, n}$.

Негармонізовані характеристичні функції (НХФ) – це раціональні функції у параметричній формі, що утворюються як добуток різниць між значеннями параметрів t_j для базисних точок та поточним параметром t, для $0 \le t \le 1$, і мають наступний запис:

$$P_j(t) = \frac{1}{\lambda_j} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} (t_i - t), \; j = \overline{1, n}; \; 0 \le t \le 1, \tag{2}$$

де $\lambda_j = \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} (t_i - t_j); \frac{1}{\lambda_j}$ – коефіцієнт перетворення на одиницю НХФ $P_j(t)$, для $i = j$; i – індекс, що визначає степінь раціональної функції, який дорівнює $n-1$; j – номер вузла інтерполяції, $j = \overline{1, n}$; t – поточний параметр точкового поліному, $0 \le t \le 1$; t_j – значення поточних параметрів у вузлах інтерполяції (базисних точках).

Гармонізовані характеристичні функції (ГХФ), або БН-координати – це параметричні дробово-раціональні функції, які утворюються в результаті ділення окремо кожної із НХФ на їх суму і завжди мають степінь ($n-1$) та позначаються P_j:

$$P_j = \frac{P_j(t)}{\sum_{j=1}^{n} P_j(t)};\ j=\overline{1,n};\ 0 \le t \le 1, \tag{3}$$

де ГХФ з (3) – P_j є множником для A_j із (1), сума добутків $A_j \cdot P_j$; $j=\overline{1,n}$, являє собою ГТП.

Базисні точки A_j; $j=\overline{1,n}$ вихідної ДПК, визначаються координатами у довільно обраній системі декартових координат. Для визначення негармонізованих характеристичних функцій – $P_j(t)$ здійснимо параметризацію базисних точок A_j; $j=\overline{1,n}$, тобто визначимо їх взаємне розташування уздовж осі *Ox* (зауважимо, можна здійснювати параметризацію і за будь-яким іншим критерієм). Для цього, визначимо різниці абсцис для усіх базисних точок, позначивши їх подвійними індексами біля літери «*x*», тобто:

$$x_{11} = x_1 - x_1;\ x_{21} = x_2 - x_1;\ x_{31} = x_3 - x_1;\ \dots;\ x_{(n-2)1} = x_{n-2} - x_1;$$
$$x_{(n-1)1} = x_{n-1} - x_1;\ x_{n1} = x_n - x_1;$$

або у загальному вигляді:

$$x_{j1} = x_j - x_1;\ j=\overline{1,n} \tag{4}$$

Тоді, враховуючи (4), параметр t_j будемо визначати:

$$t_j = \frac{x_{j1}}{x_{n1}};\ j=\overline{1,n}. \tag{5}$$

Для однократних ДПК різниця координат t_{n1}, як одиниця вимірювання, є найбільшою, а це означає, що усі значення параметрів t_j із (5) будуть додатними і менше одиниці. Отже, для однократних кривих будемо мати $0 \le t \le 1$ – межі для поточного параметру.

У разі, коли вихідна ДПК є дво-, три-, …, K-кратною, то необхідно обрати будь-який інший критерій для її параметризації.

Через те, що гармонізований точковий поліном (ГТП) із (1) є осьонезалежним, то будь-яке його переміщення у площині загального положення у три-просторі, у тому числі і його суміщення із координатною площиною, не вплине на розв'язок. Виходячи з цього, оберемо вихідну геометричну композицію A_j; $j=\overline{1,n}$, що являє собою дискретно подану криву (ДПК), у координатній площині *Oxy*, тобто виключимо, для спрощення розв'язку, координату z_j для кожної базисної точки, що ніяк не вплине на узагальненість досліджуваного питання.

Нехай, для побудови гармонізованого точкового поліному (ГТП), задано шість точок (табл. 1) вихідної ДПК. У табл. 3.3 значення y_3 не задано, тому що воно буде змінюватися і впливатиме на форму точкового поліному.

Таблиця 1

Вихідна ДПК для побудови ГТП

A_j	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
x_j	20	40	100	150	200	220
y_j	20	60		80	60	40

У відповідності до (5) визначимо параметри t_j; $j=\overline{1,6}$ для базисних точок (табл. 2).

Таблиця 2

Значення параметрів для базисних точок

A_j	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
t_j	0	0,1	0,4	0,65	0,9	1

Користуючись даними табл. 2 розрахуємо значення λ_j; $j=\overline{1,6}$, результати розрахунків покажемо у табл. 3.

Таблиця 1

Значення λ_j

A_j	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
λ_j	0,0234	-0,01188	0,009	-0,0078203125	0,009	-0,0189

Отже, маємо записати точковий поліном:

$$M = y_1 \frac{1}{0{,}0234}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 1}}^{6}(t_i - t) - y_2 \frac{1}{0{,}01188}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{6}(t_i - t) + y_3 \frac{1}{0{,}009}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 3}}^{6}(t_i - t) - \\ - y_4 \frac{1}{0{,}0078203125}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 4}}^{6}(t_i - t) + y_5 \frac{1}{0{,}009}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 5}}^{6}(t_i - t) - y_6 \frac{1}{0{,}0189}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 6}}^{6}(t_i - t) \tag{6}$$

Побудуємо графіки декількох варіантів точкового поліному (6), для різних значень y_3 (рис. 1).

В результаті чого, сума (6), за виключенням доданку з індексом «3», тобто $y_3 \cdot \frac{1}{0{,}009}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 3}}^{6}(t_i - t)$, лишаються інваріантною сумою добутків для решти базисних точок точкового поліному.

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 3}}^{6} y_j \cdot P_j = const\,. \tag{7}$$

Змінюється, при цьому, лише добуток $y_3 \cdot P_3$. Це значно прискорює перерахунок нових варіантів за зміни значення y_3. Зміна значення y_3 суттєво змінює форму точкового поліному, який завжди проходить через усі базисні точки y_j; $j=\overline{1,6}$. Цим точкові поліноми відрізняються від кривих Безьє, В-сплайнів, NURBS-кривих, які не проходять через свої визначальні точки окрім початкової та кінцевої.

Залишаючи незмінним параметричний базис точкового поліному, можна змінювати його форму зміною декількох його базисних точок або, навіть, усіх.

Зауважимо, що ніяких обмежень уздовж осі Oy, щодо обрання проміжних базисних точок, не існує. У той же час координати x_j; $j=\overline{1,6}$ лишаються незмінними в усіх наведених варіантах, тому що з їх використанням було визначено параметри базисних точок A_j; $j=\overline{1,6}$, які увійшли до складу характеристичних функцій.

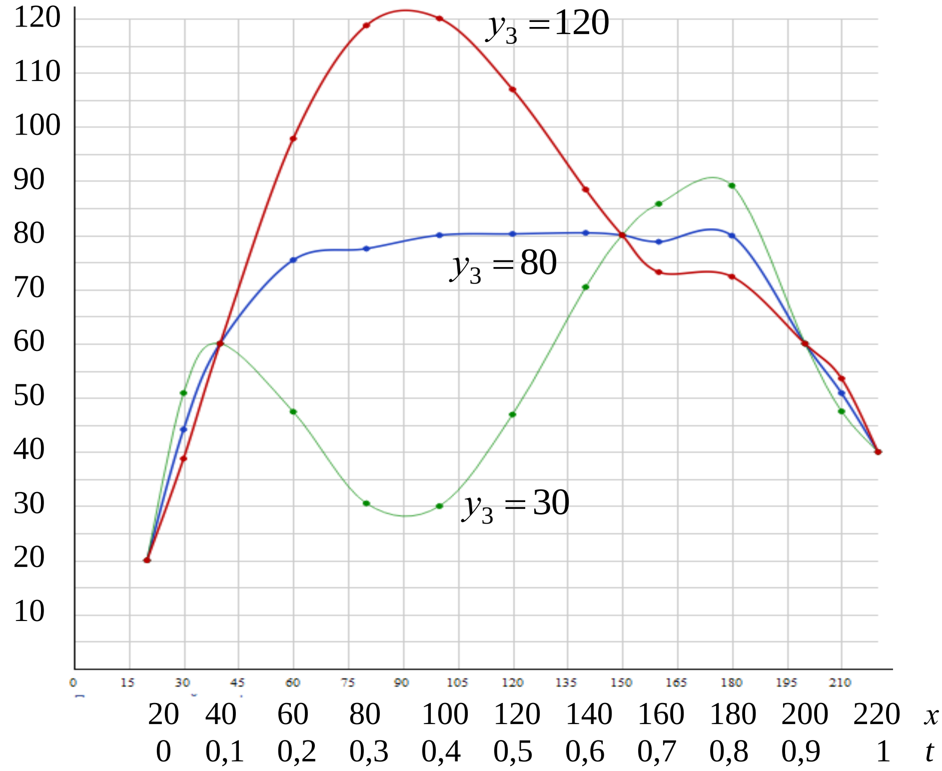

Рис. 1. Зміна форми точкового поліному шляхом зміни базисної точки A_3

Сукупність характеристичних функцій, утворюють негармонізований параметричний базис точкового поліному.

Сукупність гармонізованих характеристичних функцій утворює гармонізований параметричний базис для гармонізованого точкового поліному (1).

Висновки. Однотипність утворення та записів ТП для K точок координатного три-простору, які одночасно знаходяться у площині n-простору параметрів дозволяє у загальному вигляді створити програму для однопараметричної композиційної інтерполяції та автоматизувати необхідні зміни початкових вимог щодо інтерполяетів. Така можливість значно прискорить процес композиційного моделювання та створення різних варіантів моделей, знизить ресурсоємність компомоделі та підвищить ефективність використання розробленої компомоделі, зокрема, і компомоделювання в цілому.

Розроблено послідовність операцій щодо корегування форми точкового поліному шляхом зміни положення окремих його базисних точок лишаючи, при цьому, без змін його параметричний базис, який, за певних умов, є функціональним інваріантом щодо зміни положення базисних точок вихідної ГФ. Незмінність параметричного базису точкового поліному після зміни положення базисних точок його вихідної геометричної фігури, значно зменшує обсяг розрахункових операцій під час формоутворення композиційної геометричної моделі об'єкту, що знижує її вартість та зменшує витрати ресурсів під час її використання, а це, у свою чергу, підвищує ефективність роботи інформаційної системи, у якій використовується створена композиційна модель.

Література

1. Верещага В.М., Лисенко К.Ю. Спосіб визначення опуклості ДПК. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2017. Вип.8. С. 44-48.
2. Балюба И.Г., Найдыш В.М. Точечное исчисление [учебное пособие], под ред. Верещаги В.М. Мелитополь: Изд-во МГПУ им. Б.Хмельницкого, 2015. 234 с.
3. Верещага В.М. Композиційне геометричне моделювання: Монографія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2017, 108 с.
4. Адоньєв Є.О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем : дис. ... д-ра техн. наук. К.: КНУБА, 2018. 512 с.
5. Верещага В.М., Найдиш А.В., Адоньєв Є.О., Лисенко К.Ю. Основи композиційного геометричного моделювання: навчальний посібник. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. 255 с.
6. Верещага В.М., Найдиш А.В., Адоньєв Є.О. Метод композиційного геометричного моделювання. Монографія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. 310 с.
7. Верещага В.М. Дискретно-параметричний метод геометричного моделювання кривих ліній та поверхонь: дис. ... док-ра. техн. наук. КДТУБА. К, 1996, 320 с.
8. Верещага В.М., Лисенко К.Ю., Найдиш А.В. Параметризація багатовимірних геометричних об'єктів методами точкового числення Балюби-Найдиша. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2019. Вип.15. С. 51-57.
9. Лисенко К.Ю., Найдиш А.В., Балюба І.Г., Верещага В.М. Особливості композиційного геометричного моделювання. *Прикладна геометрія та інженерна графіка. Технічні науки.* К., 2019. Вип. 95. С.131-136.
10. Лисенко К.Ю., Верещага В.М., Найдиш А.В. Балюби-Найдиша інтерполяція чотирьох точок у площині. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2019. Вип.13. С. 100-105.

11. Лисенко К.Ю., Найдиш А.В., Верещага В.М., Балюба І.Г. Композиційна інтерполяція плоскої дискретно поданої кривої. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки.* Мелітополь, 2019. Вип.14. С. 113-121.

КОРРЕКТИРОВКА ФОРМЫ ПЛОСКОГО ТОЧЕЧНОГО ПОЛИНОМА ПУТЕМ ИЗМЕНЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ЕГО БАЗИСНЫХ ТОЧЕК

Верещага В.М., Лысенко К.Ю.

Точечные полиномы являются основой композиционного геометрического моделирования. Образование точечных полиномов осуществляется с применением геометрического способа интерполяции, названная композиционной интерполяцией.

Композиционное геометрическое моделирование (КГМ) предназначено для создания геометрическим способом аналитически (математически) формализованных континуальных точечных множеств, представляющие собой композиционные модели геометрических объектов произвольной формы, воспроизводящие ход реальных процессов и объектов по заранее определенным условиям, путем осуществления композиционной интерполяции.

Так как точечный полином является осенезависимой параметрической кривой, его уравнение формируется относительно базисных точек исходной дискретно представленной кривой в виде составляющих, которыми являются или негармонизированные, или гармонизированные характеристические функции, представляющие собой параметрический базис соответствующих точечных полиномов.

В статье предложено осуществить параметризацию исходной геометрической фигуры вдоль оси Ох, показано определение параметров в ее базисных точках.

При этом, без потери обобщенности, тестовые примеры исчисляются в координатной плоскости для шести базисных точек, определяющих точечный полином пятой степени. Показано в развернутом виде построение характеристических функций для точечного полинома, который определяется шестью базовыми точками, предоставляется в общем виде, его уравнение.

Показано, что уменьшению количества расчетных операций при композиционном геометрическом моделировании также способствует имеющаяся в точечных полиномах, возможность построения конгруэнтных кривых. В этом случае не нужно рассчитывать каждую новую кривую, а все расчеты можно осуществлять на изначально рассчитанной кривой, а результат переносить на соответствующие конгруэнтные кривые.

Ключевые слова: композиционное геометрическое моделирование, геометрическая интерполяция, дискретная кривая, точечный полином.

CORRECTING THE SHAPE OF A PLANE POINT POLYNOMA BY CHANGING THE POSITION OF ITS BASE POINTS

Viktor Vereshchaga, Kseniia Lysenko

Point polynomials are the foundation of compositional geometric modeling. The formation of point polynomials is carried out using a geometric interpolation method called compositional interpolation.

Compositional geometric modeling (CGM) is intended to create in a geometric way analytically (mathematically) formalized continual point sets, which are compositional models of geometric objects of arbitrary shape, reproducing the course of real processes and objects according to predetermined conditions, by performing compositional interpolation.

Since the point polynomial is an autumn-dependent parametric curve, its equation is formed with respect to the base points of the original discretely represented curve in the form of components, which are either non-harmonized or harmonized characteristic functions, which are a parametric basis of the corresponding point polynomials.

The article proposes to carry out the parametrization of the original geometric figure along the Ox axis, shows the definition of parameters at its base points.

In this case, without loss of generalization, test cases are calculated in the coordinate plane for six base points that define a point polynomial of the fifth degree. Shown in expanded form the construction of characteristic functions for a point polynomial, which is determined by six base points, is provided in general form, its equation.

It is shown that the possibility of constructing congruent curves, which is available in point polynomials, also contributes to a decrease in the number of computational operations in compositional geometric modeling. In this case, it is not necessary to calculate each new curve, but all calculations can be carried out on the originally calculated curve, and the result can be transferred to the corresponding congruent curves.

Keywords: compositional geometric modeling, geometric interpolation, discrete curve, point polynomial.

References

1. Vereshchaga, V., Lysenko, K. (2017) Method for determining the convexity of DGC. *Modern Problems of Modeling.* Melitopol, 8, 44-48. [in Ukrainian].

2. Balyuba, I., Naydysh, V. (2015) Point calculus [tutorial], ed. Vereshchaga V. Melitopol: Bogdan Khmelnitsky Melitopol State Pedagogical University. [in Russian].
3. Vereshchaga, V. (2017) Composite geometric modeling: Monograph. Melitopol: FOP Odnorog T.V. [in Ukrainian].
4. Adoniev, Ye. (2018) Compositional method of geometric modeling of multifactor systems: Doctor’s thesis. K .: KNUBA. [in Ukrainian].
5. Vereshchaga, V., Naydysh, A., Adoniev, Ye., Lysenko, K. (2019) Fundamentals of compositional geometric modeling: a textbook. Melitopol: FOP Odnorog T.V. [in Ukrainian].
6. Vereshchaga, V., Naydysh, A., Adoniev, Ye. (2019) Method of compositional geometric modeling. Monograph. Melitopol: FOP Odnorog T.V. [in Ukrainian].
7. Vereshchaga, V. (1996) Discrete-parametric method of geometric modeling of curved lines and surfaces: Doctor’s thesis. K: KDTUBA [in Ukrainian].
8. Vereshchaga, V., Naydysh, A., Lysenko, K. (2019) Parameterization of multidimensional geometric objects by the methods of point calculus Balyuba-Naidysha. *Modern Problems of Modeling.* Melitopol, 15, 51-57 [in Ukrainian].
9. Lysenko, K., Naydysh, A., Balyuba, I., Vereshchaga, V. (2019) Features of compositional geometric modeling. *Applied geometry and engineering graphics.* K., 95, 131-136 [in Ukrainian].
10. Lysenko, K., Naydysh, A., Vereshchaga, V. (2019) Balyuba-Naydysha interpolation four points in the plane. *Modern Problems of Modeling.* Melitopol, 13, 100-105 [in Ukrainian].
11. Lysenko, K., Naydysh, A., Balyuba, I., Vereshchaga, V. (2019) Composite interpolation of a flat discretely represented curve. *Modern Problems of Modeling.* Melitopol, 14, 113-121 [in Ukrainian].