УДК 514.18

ЗАМЕНА СИМПЛЕКСА В УРАВНЕНИИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Балюба И.Г.
Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого (г. Мелитополь, Украина),
Конопацкий Е.В.
Мелитопольская школа прикладной геометрии

В работе предложен способ замены симплекса в уравнении плоской кривой, который позволяет преобразовать уравнение дуги любой плоской кривой и определить, для каждого уравнения, оптимальный, с точки зрения арифметических вычислений, симплекс плоскости, а также способы его применения в практике моделирования дуг плоских кривых.

***Ключевые слова**: исчисление Балюбы-Найдыша (БН-исчисление), симплекс плоскости, плоская кривая, точечное уравнение, параболическая дуга.*

Постановка проблемы. В БН-исчислении одна и та же кривая в разных симплексах имеет разные точечные уравнения, из которых можно выбрать более удобное для практического использования. Для упрощения вычислений важен не только выбор оптимального параметра, но и оптимального симплекса. Дело в том, что при удачном выборе симплекса на стадии постановки задачи, итоговое точечное уравнение может очень сильно сократиться, что в свою очередь значительно влияет на быстродействие при программной реализации такого уравнения. Например, значительное упрощение точечного уравнения можно получить, если принять один из углов симплекса плоскости равным $\frac{\pi}{2}$ (Декартовая система координат). В равностороннем плоском симплексе также имеют место быть значительные упрощения искомого точечного уравнения. Отдельной и очень важной задачей в БН-исчислении является задача построения дуг кривых через наперед заданные точки. Для решения этой задачи важно максимально использовать заданные точки в качестве вершин симплекса. Исходя из всего выше сказанного, можно сделать вывод, что задача замены симплекса в уравнении плоской кривой является актуальной и может иметь широкое практическое применение.

Анализ последних исследований и публикаций. В аналитической геометрии [1] подобная задача – это преобразование координат, которая нашла широкое применение и эффективно используется при выделении видов кривых второго порядка из общего уравнения, определении их канонических уравнений, особых точек и линий этих кривых. С другой стороны для точечных уравнений, в силу их специфики, преобразование системы координат не подходит. В аффинной геометрии [2], которая является наиболее близкой к БН-исчислению, для преобразования аффинной системы координат матрица перехода от одного базиса к другому. Но в БН-исчислении [3] нет необходимости в использовании матрицы перехода, поскольку в качестве параметра в уравнении используется инвариант параллельного проецирования. В таком случае сама задача замены симплекса упрощается и сводится к простым арифметическим операциям над точками и функциями параметра.

Формулирование целей статьи. Продемонстрировать на примерах возможности способа замены плоского симплекса в БН-исчислении.

Основная часть. В общем случае задачу можно сформулировать следующим образом.

Задано точечное уравнение дуги кривой в симплексе RPQ:

$$M=(P-R)p_P+(Q-R)q_Q+R, \tag{1}$$

где $p_P,\ q_Q$ являются функциями некоторого параметра t.

Требуется определить дугу кривой, которая определяется текущей точкой M в симплексе CAB.

Для решения поставленной задачи необходимо выполнить следующие этапы: точки $P,\ Q,\ R$ выразить через точки $C,\ A,\ B$ и подставить их значения в уравнение (1). Таким образом, уравнение приобретёт следующий вид:

$$M=(A-C)p+(B-C)q+C. \tag{2}$$

где $p,\ q$ также являются функциями параметра t.

Тогда решение поставленной задачи сводится к определению функций p и q по заданным функциям p_P и q_Q.

Рассмотрим несколько примеров применения замены симплекса плоской дуги кривой.

Задача 1. Задана параболическая дуга обвода первого порядка гладкости:

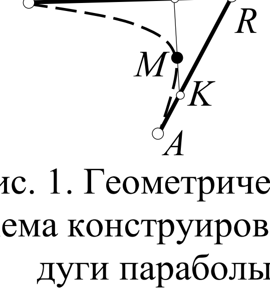

Рис. 1. Геометрическая схема конструирования дуги параболы

$$M=(A-R)\overline{t}^{\,2}+(B-R)t^2+R,\ 0\le t\le 1. \qquad (3)$$

Требуется определить уравнение параболы, которая задана сопряженными осями.

Решение. Из [4] известно, что, если $\dfrac{AK}{AR}=\dfrac{RL}{RB}=\dfrac{KM}{KL}=t$, то уравнение (3) определяет дугу параболы AMB (рис. 1). При $t=0\to M\equiv A$, а при $t=1\to M\equiv B$, RA, RB – касательные к дуге параболы.

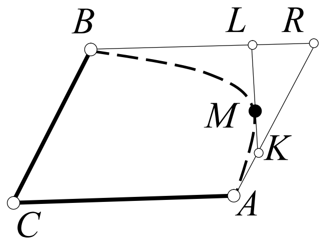

Рис. 2. Результат замены симплекса дуги параболы

Заменим симплекс RAB на новый симплекс CAB (рис. 2), где R является четвертой вершиной параллелограмма $BCAR$:

$$R=A+B-C.$$

Исключим R из уравнения дуги параболы (3), получим:

$$M=(A-A-B+C)\overline{t}^{\,2}+(B-A-B+C)t^2+A+B-C. \qquad (4)$$

Далее преобразуем уравнение (4) в уравнение дуги параболы в новом симплексе CAB:

$$M=(A-C)\left[1-t^2\right]+(B-C)t\left[2-t\right]+C. \qquad (5)$$

Графический алгоритм (рис. 2) и уравнение (5) определяют, ранее заданную графическим алгоритмом (рис.1) и уравнением (3) дугу параболы. Для параболы, заданной уравнением (5), отрезки CA и CB являются сопряженными осями.

Задача 2. В соответствии с [5] задан геометрический алгоритм построения дуги эллипса по сопряженным осям RA, RB (рис. 3): $SR=RA$, $M=AK\cap SQ$, $PK\parallel RB$. Требуется определить уравнение дуги эллипса M по этому алгоритму и заменой симплекса преобразовать это уравнение к уравнению дуги

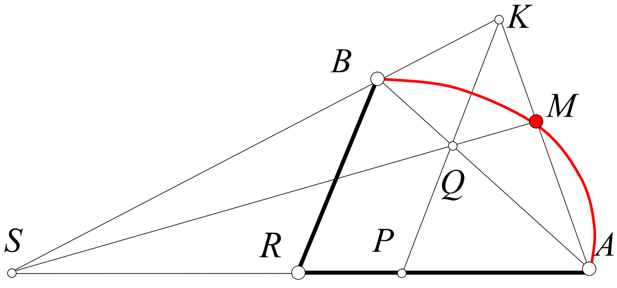

Рис. 3. Геометрический алгоритм построения дуги эллипса

эллиптического обвода.

Решение. Определяем уравнение эллипса по геометрическому алгоритму (рис. 3). Согласно условию $SR = RA$ [5] определяем точку S: $S = 2R - A = -(A - R) + R$.

В качестве параметра t принимаем следующее отношение:

$$t = \frac{PR}{AR} = \frac{QB}{AB} = \frac{KB}{BS}.$$

Из этих отношений определяем точки Q и K:

$$\frac{QB}{AB} = \frac{Q - B}{A - B} = t \to Q = At + B\overline{t} = (A - R)t + (B - R)\overline{t} + R,$$

$$\frac{KB}{BS} = \frac{K - B}{B - S} = t \to K = (B - S)t + B = (A - R)t + (B - R)(t + 1) + R.$$

Текущую точку $M(p_R, q_R)$ определим с помощью $S-$теоремы БН-исчисления:

$$\begin{vmatrix} M \\ K \\ A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M \\ Q \\ S \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_R & q_R & 1 \\ t & t+1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_R & q_R & 1 \\ t & \overline{t} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to$$

$$\begin{cases} p_R(t+1) + q_R\overline{t} = t + 1 \\ p_R\overline{t} - q_R(t+1) = -\overline{t} \end{cases} \to p_R = \frac{2t}{1+t^2},\ q_R = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Тогда уравнение дуги эллипса BMA в симплексе сопряженных осей RA и RB принимает следующий вид:

$$M = (A - R)\frac{2t}{1+t^2} + (B - R)\frac{1-t^2}{1+t^2} + R,\ 0 \le t \le 1. \tag{6}$$

Переходим ко второй части задачи. Для определения эллиптической дуги обвода заменим симплекс RAB на новый симплекс CAB (рис. 4), где R является четвертой вершиной параллелограмма $BCAR$: $R = A + B - C$.

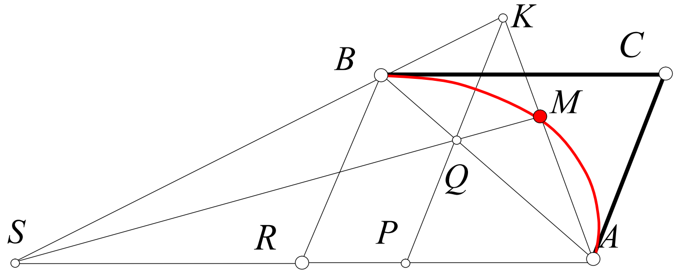

Рис. 4. Определение эллиптической дуги обвода

Исключая точку R из уравнения (6), получим:

$$M = (A - A - B + C)\frac{2t}{1+t^2} + (B - A - B + C)\frac{1-t^2}{1+t^2} + A + B - C. \qquad (7)$$

После преобразований получим уравнение дуги эллиптического обвода в новом симплексе CAB:

$$M = (A - C)\frac{2t^2}{1+t^2} + (B - C)\frac{(1-t)^2}{1+t^2} + C\,,\ 1 \geq t \geq 0\,. \qquad (8)$$

Утверждение. *Замена в симплексе точечного уравнения дуги обвода начальной точки по правилу параллелограмма преобразует его в уравнение кривой с сопряженными осями. Справедливо и обратное преобразование.*

Задача 3. В соответствии с [6] задан геометрический алгоритм построения дуги обвода кривой второго порядка отношением на медиане, которая имеет следующее точечное уравнение:

$$M = (A - C)\frac{k\bar{t}^{\,2}}{k(1-2t)^2 + 2t\bar{t}} + (B - C)\frac{kt^2}{k(1-2t)^2 + 2t\bar{t}} + C, \qquad (9)$$

где $t = \dfrac{AT}{AB},\ k = \dfrac{KC}{K_C C},\ K_C = \dfrac{A+B}{2}$.

Требуется преобразовать уравнение дуги эллипса M по этому алгоритму и заменой симплекса преобразовать это уравнение к уравнению дуги эллиптического обвода.

Решение. Определим точку C из следующего соотношения:

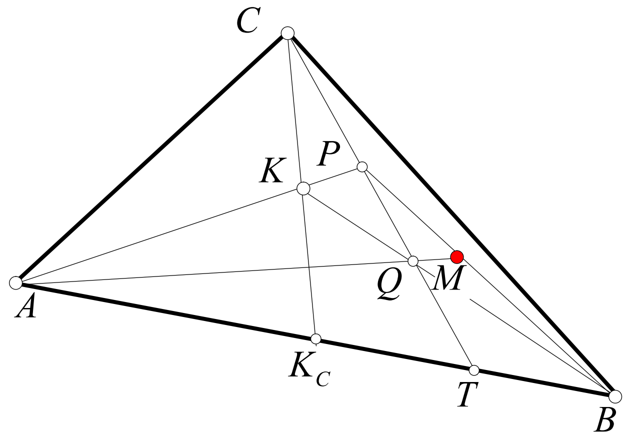

Рис. 5. Геометрическая схема конструирования дуги к2п

$$k = \frac{KC}{K_C C} \to C\bar{k} = K - K_C k.$$

Далее подставим в уравнение точку K_C:

$$C = K\frac{1}{\bar{k}} - \frac{A+B}{2}\frac{k}{\bar{k}} = -A\frac{k}{2\bar{k}} - B\frac{k}{2\bar{k}} + K\frac{1}{\bar{k}}. \qquad (10)$$

Произведём замену симплекса в уравнении (9), подставив вместо точки C уравнение (10). После некоторых преобразований, получим:

$$M = \left(A-K\right)\frac{k\bar{t}\left(1-2t\right)}{k(1-2t)^2+2t\bar{t}} + \left(B-K\right)\frac{kt\left(2t-1\right)}{k(1-2t)^2+2t\bar{t}} + K. \qquad (11)$$

Следует отметить, что геометрические свойства дуги кривой, несмотря на замену точек в уравнении, полностью сохранились и в соответствии с [6] при $k=\frac{1}{2}$ получим дугу параболы, при $k>\frac{1}{2}$ – дугу эллипса, а при $k<\frac{1}{2}$ – дугу гиперболы.

Выводы. В работе предложен способ замены симплекса в уравнении плоской кривой, который позволяет преобразовать точечное уравнение дуги любой плоской кривой таким образом, чтобы дуга кривой обладала определенными, наперёд заданными свойствами, а её уравнение было оптимизировано с точки зрения арифметических вычислений. Также в работе приводятся уравнения дуги параболы, заданной сопряженными осями, эллиптической дуги обвода и дуги кривой второго порядка, проходящей через 3 наперед заданные точки, полученные предложенным выше способом замены симплекса, что является отдельным результатом исследований и может иметь широкое практическое внедрение при конструировании геометрических объектов по наперед заданным условиям.

Литература

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. / Александров П.С. – М.: Наука, 1968. – 912 с.
2. Яглом И.М. Идеи и методы аффинной и проективной геометрии. Часть 1. Аффинная геометрия. / Яглом И.М., Ашкинузе В.Г. – М.: Учпедгиз, 1962. – 248 с.
3. Балюба И.Г. Точечное исчисление: учебное пособие / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш. – Мелитополь: МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. – 236 с.
4. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: диссертация на соискание научной степени доктора технических наук: 05.01.01 / Балюба Иван Григорьевич – Макеевка: МИСИ, 1995. – 227 с.

5. Глаголев Н.А. Проективная геометрия / Глаголев Н.А. – М.: Высшая школа, 1963. – 344 с.
6. Конопацький Є.В. Геометричне моделювання алгебраїчних кривих та їх використання при конструюванні поверхонь у точковому численні Балюби-Найдиша. Дис. … канд. техн. наук: 05.01.01. Конопацький Євген Вікторович. – Мелітополь, 2012. – 164 с.

ЗАМІНА СИМПЛЕКСУ В РІВНЯННІ ПЛОСКОЇ КРИВОЇ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Балюба І.Г., Конопацький Є.В.

В роботі запропоновано спосіб заміни симплексу в рівнянні плоскої кривої, який дозволяє перетворити рівняння дуги будь-якої плоскої кривої і визначити, для кожного рівняння, оптимальний, з точки зору арифметичних обчислень, симплекс площині, а також способи його застосування у практиці моделювання дуг плоских кривих.

Ключові слова: Балюби-Найдиша числення (БН-числення), симплекс площини, плоска крива, точкове рівняння, параболічна дуга.

REPLACEMENT OF THE SIMPLEX IN THE EQUATION OF PLANE CURVE AND ITS APPLICATION

I. Balyuba, E. Konopatskiy

In paper presents a way to replace the simplex in equation of plane curve, which allows you to convert equation of any arc plane curve and determine for each equation, the optimum in terms of arithmetic, simplex plane, as well as ways of its application in practice arcs plane curves modeling.

Keywords: BN-calculation, simplex plane, plane curve, dot equation, parabolic arc.